

非直交同時対角化アルゴリズムの キャッシュ向け最適化とその評価

1*) 廣田悠輔, 1) 山本有作, 2) 張紹良

1) 神戸大学大学院システム情報学研究科, 2) 名古屋大学大学院工学研究科

*) hirota@stu.kobe-u.ac.jp

1 序論

複数の正則な実対称行列 $C^{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) が与えられるときに,

$$WC^{(k)}W^T = \Lambda^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

を満足する正則な行列 $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ を求める問題を考える。ただし, $\Lambda^{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) は対角行列である。この問題は非直交同時対角化問題 (NOJD 問題) と呼ばれ, 信号処理の分野に応用を持つ [1]。NOJD 問題は, 一般の入力 $\{C^{(k)}\}_k$ に対し解をもたない。そのような場合, 何らかに対角化の尺度を定め, 可能な限り $\{\Lambda^{(k)}\}_k$ を対角に近づける行列 W を求める。

NOJD 問題は, $\{C^{(k)}\}_k$ に対して前処理を行うことで, 直交行列による同時対角問題に帰着することができる。しかしながら, 入力に誤差が含まれる現実の問題に適用すると, 解の精度が低下することが知られている [2]。この問題を回避するため, 前処理を経由せず, 同時対角化する非直交行列を直接求めるアルゴリズムが研究されている。

LUJ2D アルゴリズムは, 近年に Afsari によって提案された NOJD 問題を直接解く反復解法の 1 つである [3]。LUJ2D アルゴリズムは, 対角化の尺度としてスケール不変な評価関数を用い, さらに, $\{C^{(k)}\}_k$ が正定値でない場合にも適用可能であるという望ましい性質を備える。しかしながら, LUJ2D アルゴリズムの従来の実装法では, 計算の大部分がキャッシュ利用効率の低いベクトル更新となるため, 近年のプロセッサでの実行性能が極めて低いという問題がある。独立に実行可能なベクトル更新をまとめることにより, 計算の大部分をベクトル更新よりはキャッシュ性能の高いランク 1/2 更新に置き換えることが可能ではあるが, その場合でも実行性能は依然として低い。

本研究では, 計算量の大部分が行列積となる LUJ2D アルゴリズムの実装法を提案し, アルゴリズムのキャッシュ利用効率を改善する。

2 キャッシュ向け最適化

LUJ2D アルゴリズムでは, 各反復ステップで実行される $KN(N-1)$ 回の更新

$$C^{(k)} \leftarrow R_{i,j}(a_{i,j})C^{(k)}R_{i,j}(a_{i,j})^T \quad (k = 1, \dots, K) \\ (1 \leq i \neq j \leq N)$$

が計算量の大半を占める。ただし, 更新を適用する順序 ((i, j) の順序) については任意性が存在する。また, $R_{i,j}(a) = I + ae_i e_j^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ であり, $a_{i,j}$ は各 (i, j) における $C^{(k)}$ の更新前に $C^{(k)}$ を参照して決定されるスカラパラメータである。

提案法では, 次の 2 つの方針により, $C^{(k)}$ の更新についてキャッシュ性能の改善を行う。

1. (i, j) の順序を変更する。ただし, 丸めを無視したときに, 提案法で得られる解が従来法と一致するようにする。
2. 複数の更新をまとめ, $C^{(k)}$ が行列積によって更新されるようにする。ただし, $a_{i,j}$ の決定に必要な $C^{(k)}$ の少数の要素は行列積を使わずに先行して更新する。

提案法の詳細については当日に発表を行う。

3 数値実験

乱数を用いて生成した $N = 240, K = 240$ の実対称行列の組に対して, 従来の実装法および提案する実装法の LUJ2D アルゴリズムを適用し, Opteron 1210 プロセッサを備える計算機で 1 プロセッサコアのみを使用し性能を調査した。提案法は従来法と比べて最大 1.77 倍高速化され, ピーク性能の 21% を達成した。実験結果の詳細については当日に発表を行う。

参考文献

- [1] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso and E. Moulines, A blind source separation technique using second-order statistics, IEEE Trans. Signal Processing, **45** (1997), 434-444.
- [2] J.-F. Cardoso, On the performance of orthogonal source separation algorithms, in: Proc. of European Signal Processing Conf., pp. 776-779, 1994.
- [3] B. Afsari, Simple LU and QR based non-orthogonal matrix joint diagonalization, in: Proc. of the 6th Int. Conf. on Independent Component Analysis and Blind Source Separation, J. Rosca et al. ed., Lect. Notes in Comput. Sci., Vol. 3889, pp. 1-7, Springer-Verlag, Berlin, 2006.