

# 局所的な不完全コレスキー分解前処理を用いた陰的マルチグリッド法

塚本 昌也<sup>†</sup> 中島 研吾<sup>†</sup> 杉原 正顯<sup>†</sup>

## 1. マルチグリッド法と陰的マルチグリッド法

大規模連立一次方程式のスケラブルな解法として、マルチグリッド法が知られている[1]。偏微分方程式を差分法や有限要素法で離散化した連立一次方程式を解く際、ガウス・ザイデル法などの定常反復法は、誤差の空間的高周波成分を速やかに除去できるが空間的低周波成分の減衰が遅いという性質がある。そこで、離散化に用いた元の格子よりも粗い格子を構築し、その粗い格子に基づく残差方程式の解を用いて誤差の空間的低周波成分を修正するのがマルチグリッド法である。マルチグリッド法はクリロフ部分空間法の前処理としても広く用いられる。

一方、マルチグリッド法の拡張として陰的マルチグリッド法が提案されている[2][3]。陰的マルチグリッド法では、粗さのレベル毎の方程式を統合化してひとつの大きな連立一次方程式を構築し、その方程式を定常反復法や前処理付きクリロフ部分空間法などで解く。統合化された方程式を用いることで、その反復解法に関わらず粗い格子による誤差修正の効果が含まれる。そのため不完全コレスキー分解をはじめとする幅広い前処理手法を併用することができ、悪条件問題にも対応できる可能性がある。

また実装上の利点として、いったん統合化された方程式を構築してしまえば、その反復解法部分は独立したプロセスとみなせるため、既存の反復解法ライブラリを柔軟に適用できることが挙げられる。どのような反復法や前処理が良いかを広く調査したい場合、手法の変更を容易に行うことができる[2]。

## 2. 局所的な不完全コレスキー分解

代表的な前処理として不完全コレスキー分解があるが、これを統合化された方程式の係数行列に対して行うと、ゼロ固有値を多く含むため計算が不安定であることに加え、たとえフィルインレベル 1 でも大量のフィルインが発生してしまうという問題点がある。

統合化された方程式の係数行列はブロック構造を持ち、その対角ブロック行列は、通常のマルチグリッド法における各格子レベル毎の係数行列である。本手法では、これら対角ブロック部分のみに対してそれぞれ独立に不完全コレスキー分解を行い、非対角ブロック行列を無視した前処理を行った。

## 3. 数値実験

### (1) テスト問題と計算手法

正方形領域上の 2 次元ポアソン方程式を差分法で離散化した問題を扱う。境界はディリクレ条件とし、離散化後の未知数の数は  $31 \times 31$ 、加えて粗い格子として

未知数  $16 \times 16$ ,  $8 \times 8$  の 3 レベルの格子を用いた。方程式の係数は均質・不均質両方の場合を扱い、不均質な係数としては地質統計学的手法により生成した数値を用いた。

統合化された方程式に対し、対称ガウス・ザイデル法 1 反復を前処理とする共役勾配法(図.1,2 の SGS), および前章で述べた局所的な不完全コレスキー分解を前処理とする共役勾配法(図.1,2 の L-IC(n), カッコ内はフィルインレベル)を用いた。

### (2) 数値実験結果

均質・不均質の場合について、統合化された方程式に関する残差ノルムが初期値の  $10^{-10}$  倍となるまでに要した浮動小数点演算回数を図.1,2 に示す。均質の場合は各手法で同程度の計算量であるが、不均質の場合では不完全コレスキー分解の方がより高速になっている。

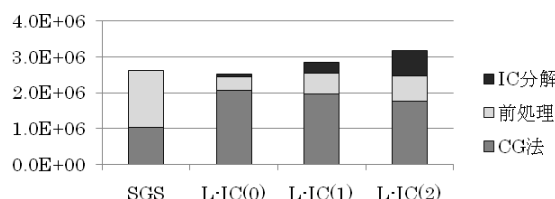


図.1 均質問題の浮動小数点演算回数(FLOPs)

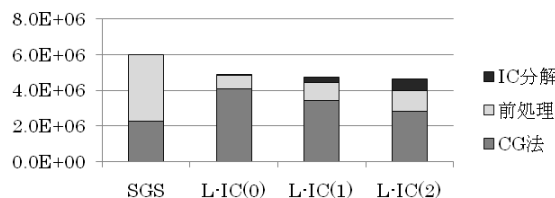


図.2 不均質問題の浮動小数点演算回数(FLOPs)

## 謝辞

本研究にあたって、陰的マルチグリッド法について御指導を戴いた京都大学准教授 岩下武史先生に謝意を表す。

## 参考文献

- [1] William L. Briggs, Van Emden Henson, and Steve F. McCormick: A Multigrid Tutorial Second Edition, SIAM, 2000.
- [2] 岩下武史, 美船健, 島崎真昭, 新しいマルチグリッド解法: 陰的マルチグリッド法の基礎概念, 情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム, Vol.48 No.SIG 8(ACS 18), pp.1-10, 2007.
- [3] T. Iwashita, T. Mifune, and M. Shimasaki: Similarities between implicit correction multigrid method and A-phi formulation in electromagnetic field analysis, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 44, no. 6, pp. 946-949, June 2008.

<sup>†</sup> 東京大学大学院情報理工学系研究科数理工学専攻  
Graduate School of Information Science and Technology,  
The University of Tokyo.