

# 量子三目並べの必勝法解析

石 関 匠 松 浦 昭 洋

東京電機大学 大学院 理工学研究科

E-mail: ishizeki@matsulab.rd.dendai.ac.jp, matsu@rd.dendai.ac.jp

「量子三目並べ」は 2002 年に物理学者 Allan Goff らによって提案された、量子力学の概念を利用した二人完全情報零和ゲームである<sup>1)</sup>。本稿では、直線状の三目を先に完成させれば勝ちとする古典的な三目並べの勝利基準（完勝と呼ぶ）と、両者同時に三目完成させたとき、完成した三目の着手番号の最大値が小さい方を勝ちとする勝利基準（辛勝と呼ぶ）の下で量子三目並べの必勝法の解析を行い、本ゲームが完勝の基準の下では引き分けであり、辛勝の基準の下では先手必勝で勝利に必要な手数が 9 手であることを示す。さらに、探索の高速化とある自然な改訂ルールの下での必勝法についても述べる。

## Analysis of Quantum Tic-Tac-Toe

TAKUMI ISHIZEKI and AKIHIRO MATSUURA

Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Denki University

E-mail: ishizeki@matsulab.rd.dendai.ac.jp, matsu@rd.dendai.ac.jp

Quantum Tic-Tac-Toe is a two-player zero-sum game based on the concepts in quantum physics proposed by physicist Allan Goff et al. in 2002. We analyze winning strategies of Quantum Tic-Tac-Toe under the following two kinds of criteria: one is as in the same way with the classical Tic-Tac-Toe that a player who achieves three-straight marks wins the game (which we call *complete win*) and the other is that when two players both achieve three-straight marks, the player whose maximum order among the three marks is smaller wins the game (which we call *narrow win*). We show that under the criterion of complete win, the game is a tie and under the criterion of narrow win, the first player has a winning strategy and needs nine total marks to win the game. We also explore techniques for accelerating the search and analyze winning strategies for the game with some modified rule.

### 1. はじめに

近年、二人完全情報零和ゲームの探索に関する研究が活発に行われている。チェス、囲碁、将棋など探索空間が  $10^{100}$  を越えるゲームでは、主に探索技術の探究や強いコンピュータプログラムの開発が行われ、より小さい探索空間を持つゲームでは必勝法の厳密な解析も行われている。<sup>2)-9)</sup> 本稿では、2002 年に物理学者 Allan Goff らに

よって提案された「量子三目並べ」<sup>1)</sup> という二人ゲームの必勝法の解析を行う。量子三目並べは、状態の量子重ね合わせ (superposition)、量子もつれ (entanglement) 等、量子力学に現れる基本的な概念を利用した二人ゲームである。元々物理教育における利用を目的に作られたゲームであるが、一定のゲーム性を併せ持ち、現在、Web 上で<sup>10)</sup>、また iPhone アプリとして<sup>11)</sup> プレイすることが可能である。ゲームは古典的な三

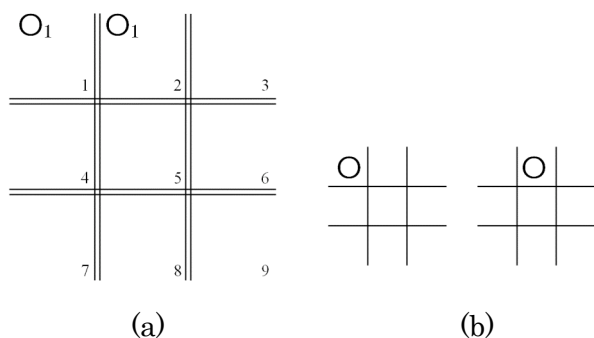


図1 (a) 先手の着手(1, 2), (b) 共存する二つの古典マーク

目並べと同様サイズ 3×3 の盤面で行われ、以下のルールで進行する。本稿では、先手の着手は○を用い、後手の着手は×を用いることとし、着手の順番を添字として○<sub>1</sub>, ×<sub>2</sub>, …, ○<sub>9</sub>と表すこととする。

- **着手方法:** プレーヤーは、各手番で二つの異なるマスにマーク（量子マーク）を置く。図1のように番号1～9をマスに与えたとき、着手場所は量子マークの置かれたマス番号の組で表される。図1に先手が第一手で(1, 2)に量子マークを置いた例を示す。量子マークである間はマークの位置は確定せず、量子マークが置かれたマスには両者共、さらに異なる手番で量子マークを置くことができる。
- **Cyclic entanglement とマークの確定:** どちらかのプレーヤーの着手の結果、それまでの着手のある部分集合で、「ある着手の二つの量子マークを一方のマスに確定させると、その集合の全ての量子マークについてそれらの固定されるマスが連鎖的に確定するとき、cyclic entanglementが発生した、と言う。このとき、相手プレーヤーは二通りのマークの確定のさせ方のいずれかを選び、量子マークを古典マークに確定させる。図2(a)では、○<sub>1</sub>, ×<sub>2</sub>, ○<sub>3</sub>により cyclic entanglementが発生し、図2(b)では後手により、○<sub>3</sub>がマス1に確定するよう三手の古典マークへの確定が行われている。
- **例外処理:** 手番8(すなわち後手の4手目)までで8マス全てが古典マークに確定している場合、先手は手番9(すなわち先手の5手目)で残った一マスに二つの量子マークを置き、即座に古典マークに置き換える。

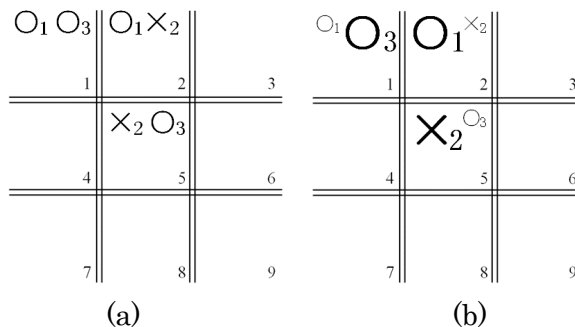


図2 (a) cyclic entanglement の発生, (b) 後手の選択による古典マークへの確定

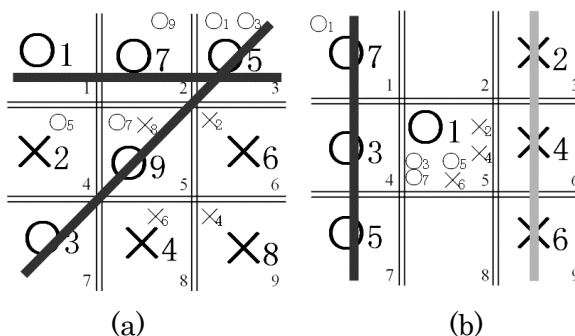


図3 (a) 先手による二筋完成, (b) 両者による二筋完成

- **勝利条件:** 最終的に9手以内(つまり、最大でも先手5手、後手4手以内)で、直線状の三マスを先に揃えた方が勝ちとなる。なお、cyclic entanglement発生時の古典マークへの確定の仕方により、図3(a), (b)のように三マスの並びが二筋同時に完成することもありうる。そこで、両プレーヤーが三マスの並びを同時に作ったときは、三マスの着手番号の最大値を比較し、その値が小さいプレーヤーの勝ちとする。このような勝ちを本稿では「辛勝」と呼ぶ。また、古典的な三目並べと同様一方のプレーヤーのみ三マス完成させる勝ちを「完勝」と呼ぶ。

量子三目並べのオリジナルルールでは、複数回のプレーによる得点を考慮し、辛勝の場合、勝った方に1点、負けた方に0.5点与え、先手が二筋同時に揃った場合は2点(または1.5点)与えることとしている。本稿では一ゲームにおける辛勝、完勝についてのみ考え、量子三目並べが辛勝、完勝の下で必勝か否かを明らかにする。本ゲームの探索空間のサイズは、各着手における二カ所の量子マークの選び方が  ${}^9C_2=36$  通りであるため、9手までの局面数は  $36^9 \approx 1.0 \times 10^{14}$

であり(さらに, 手番2以降 **cyclic entanglement** が生じると局面が二つに分岐するため, 探索空間は若干大きくなる), 手計算で必勝か否かを調べるのは困難である. そこで本研究では, 計算機を利用して量子三目並べの解析を行い, 以下の結果を得た.

- 量子三目並べは, 完勝の基準の下では引き分けである. 辛勝の基準の下では先手必勝であり, 勝つためには両者合わせて 9 手必要である.
- **cyclic entanglement** 発生時に, オリジナルルールでは相手プレイヤーが古典マークへ確定させるが, 反対に発生させたプレイヤー自身がマークを確定させるとする改訂ルールにおいては, 量子三目並べは完勝の基準の下でも先手必勝であり, 勝つために 9 手必要である.

以下, 解析方法, 実験結果, 高速化の工夫, 改訂ルールに関する考察について順次述べる.

## 2. 解析方法

必勝法の探索は, ゲーム木に対する深さ優先探索により行う. 手番 1 の着手は  ${}^9C_2 = 36$  通り存在するが, 盤面の対称性により, 図 4 の 8 通りの着手 (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (1, 9), (2, 5), (2, 6), (2, 8) に対して探索を行う.

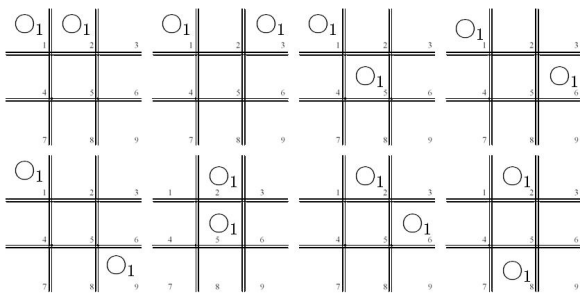


図 4 先手の手番 1 の 8 通りの着手

完勝の基準の下で先手必勝か否かを調べる探索では, ゲーム木における手番  $i$  ( $1 \leq i \leq 9$ ) の着手後の局面を表すノードにおいて, 次の再帰処理を行う.

### ● 先手のノードにおける再帰処理

- (1) 手番  $i$  の先手の着手で一筋以上で三目が完成してゲームが決着する場合, 先手完勝

か否かで場合分けする.

- (1-1) 先手完勝である場合,  $i \neq 1$  のときは, 後手の手番  $i-1$  のノードに戻り, 先手完勝であることを伝える.  $i = 1$  のときは, 手番  $i-1$  が存在しないため, プログラムは「先手完勝」を返す.

- (1-2) 先手完勝でない場合, 手番  $i$  に未探索の手があるかどうかで場合分けする.

(1-2-1) 未探索の手がある場合, 先手は現在の手を手番  $i$  の未探索の手に変更し, 手番  $i$  の先手のノードの再帰処理に再び入る. ここで, 未探索の手から着手を選ぶ際は, マス番号に関する辞書式順序 (1, 2), (1, 3),  $\dots$ , (1, 9), (2, 3), (2, 4),  $\dots$ , (8, 9) により優先順位を決める.

(1-2-2) 未探索の手がない場合,  $i \neq 1$  のときは, 後手の手番  $i-1$  のノードに戻り, そのノード以下の木では先手完勝でないことを伝える.  $i = 1$  のときは, 手番  $i-1$  は存在しないため, プログラムは「先手完勝でない」を返す.

- (2) 手番  $i$  の先手の着手で三目が一筋も並ばない場合,  $i \neq 9$  のときは, 後手の手番  $i+1$  の優先順位最上位のノードにおいて着手を行い, 以下の後手のノードにおける再帰処理を行う.  $i = 9$  のときは, (1-2) の処理を行う.

### ● 後手のノードにおける再帰処理

後手のノードにおける再帰処理は, 上記の先手の処理と同様である. すなわち, 先手の場合分け(1), (2)の基準を「先手完勝である」から「先手完勝でない」に替え, それ以外の「先手」と「後手」の役割を入れ替えれば良い.

以上の再帰処理に基づく探索により, 完勝の基準の下で先手必勝か否かを判定することができる. また, 完勝の基準を辛勝に変える, あるいは先手必勝を後手必勝と変えることで, 各々の必勝法の探索が可能である. これら四種類の探索を「先手 (後手) 完勝探索」, 「先手 (後手) 辛勝探索」と呼ぶことにする.

## 3. 計算機による実験結果

### 3.1 オリジナルルールのとき

#### 3.1.1 必勝法探索結果

2 章の解析方法に則ってゲーム木の探索プログラムを作成し, 計算機実験を行った. 計算機は

CPU AMD Phenom II X4 955 3.2GHz, メモリ 3GB を使用し, コードは C 言語で記述し, コンパイラは Borland C++ Compiler 5.5 を使用した.

先手および後手の完勝探索, 辛勝探索の結果を表 1 に示す. 表中二列目は必勝法の有無を表し, (1, 9) は先手 1 手目で (1, 9) に置くと必勝となることを示す. 三列目は各探索における探索局面数, 四列目は探索終了までの手番 2 (後手 1 手目) における着手数の平均値を示す (この値が小さいほど, 手番 2 で枝刈りが多く行われている). 探索の総実行時間は 319.23 秒であり, 先手完勝探索と先手辛勝探索に限ると, 合わせて 172.73 秒であった.

表 1 必勝法探索結果

探索の種類	必勝法	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手完勝	無し	47,025,703	2.13	66.90
先手辛勝	(1,9)	78,533,033	8.00	105.83
後手辛勝	無し	88,372,114	36.00	116.67
後手完勝	無し	24,829,603	36.00	29.83
合計	—	238,760,453	—	319.23

表 1 より, 量子三目並べは完勝の基準の下では引き分けであり, 辛勝の基準の下では先手 1 手目で対角線上の両角に着手したとき先手必勝であることが分かった.

各探索の特徴としては, 先手完勝探索では, 手番 2 の平均探索局面数が (36 ノード中) 2.13 であることから, 先手の殆どの 1 手目の着手に対し, 手番 2 の数ノードの探索で先手完勝でないことが判明している. 先手辛勝探索では, 中心 (マス 5) への早い着手が勝利のために有利であることが予想されたが, そのような直観に反し, 二つの角を取る必要があるという結果となった. 後手の必勝法の探索は, 先手辛勝が判明した時点で不要だが, 先手の 1 手目が (1, 9) 以外であるときに後手の辛勝が可能か調べるために行った. その結果, 先手のあらゆる 1 手目に対して, 後手辛勝とはならないことが明らかとなった.

先手が 1 手目 (1, 9) に着手したときの先手辛勝例を図 5 に示す. 図 5(a) は 8 手目までに  $\times_2$ ,  $\circ_3$ ,  $\times_4$ ,  $\circ_5$ ,  $\times_6$  が確定しており, 先手は手番 9 で (6, 9) に着手して, マス 6, 9 で cyclic entanglement を発生させている. 後手が  $\circ_9$  をマス 6 に確定させると, 先手のみ一行目に三目並び, 先手完勝となる. 一方で後手が  $\circ_9$  をマス 9 に確定させると, 図 5(b) のように先手は一行目に三目, 後手は二行目に三目完成させる. 三目

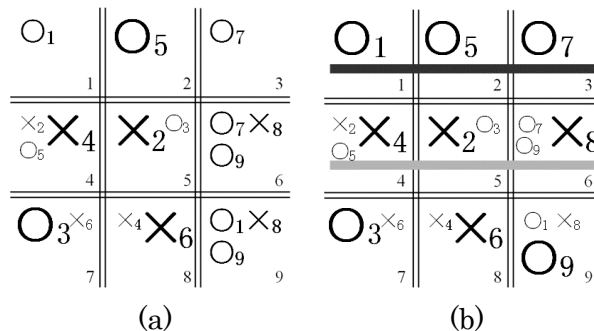


図 5 先手辛勝例: (a) 9 手目で cyclic entanglement 発生, (b) 先手一行目で辛勝

の最大手番は, 先手が 7, 後手が 8 であるため, 先手辛勝となる.

### 3.1.2 手数 の 最 小 性

先手が辛勝するために 9 手必要であることを示すには, 先手が 1 手目で (1, 9) に着手した深さ 8 (すなわち後手 4 手目まで) のゲーム木において先手辛勝探索を行い, 先手辛勝となる手筋が存在しないことが言えればよい. 探索結果を表 2 に示す. 表 2 より, 8 手では先手辛勝でなく, 先手辛勝に 9 手必要であることが分かった.

表 2 深さ 8 のゲーム木の先手辛勝探索結果

探索の種類	必勝法	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手辛勝	無し	118,754	1.00	0.10

### 3.1.3 探索の高速化

ゲーム木の探索においては, ノードの処理順が実行時間に大きく変化する. サイズ  $3 \times 3$  の量子三目並べでは, 実行時間は前節で述べたようにさほど大きくないが, 盤面のサイズを大きくすると探索空間は急激に拡大する. 例えば, 盤面のサイズが  $4 \times 4$  の場合を考えると, その盤面上での量子三目並べの局面数は  ${}_{16}C_2^9 \approx 1.8 \times 10^{33}$  となり, 上記の探索手法では対処できない. そこで, 本節では高速化の一手法として, 量子三目並べにおける効果的な探索ノードの順序付け, すなわち branch ordering について検討する.

着目したのは着手場所の種類である. それらは  $3 \times 3$  盤面では, 中央 (マス 5), 角 (マス 1, 3, 7, 9), その他 (マス 2, 4, 6, 8) の三種類に分けられる. 本実験では, 探索ノードの優先順位として, 2 章で述べたもの (オーダリング手法 1 と呼ぶ) の他, 次の二手法を検討した.

- **オーダーリング手法 2** : マスの優先順位を「角>中央>その他」とし, 探索ノードの優先順位はマスの優先順位に基づく辞書式順序で定める. (角, 角) については, 3.1.1 節の (1, 9) で先手辛勝という結果より, 対角の場合を対角でない場合より優先する.
- **オーダーリング手法 3** : マスの優先順位を「中央>角>その他」とし, この順位に基づき, オーダリング手法 2 と同様, 探索ノードの優先順位を定める.

オーダーリング手法 2, 3 を利用した先手完勝探索・辛勝探索の結果を表 3, 表 4 に示す, また, 手法 1-3 の実行時間を比較したグラフを表 5 に示す.

表 3 オーダリング手法 2 による探索結果

探索の種類	必勝法	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手完勝	無し	44,959,854	2.00	62.83
先手辛勝	(1,9)	63,454,435	9.38	82.86
合計	—	108,414,289	—	145.69

表 4 オーダリング手法 3 による探索結果

探索の種類	必勝法	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手完勝	無し	2,880,305	1.13	3.45
先手辛勝	(1,9)	5,692,464	7.00	6.67
合計	—	8,572,769	—	10.12

表 5 オーダリング手法の実行時間の比較

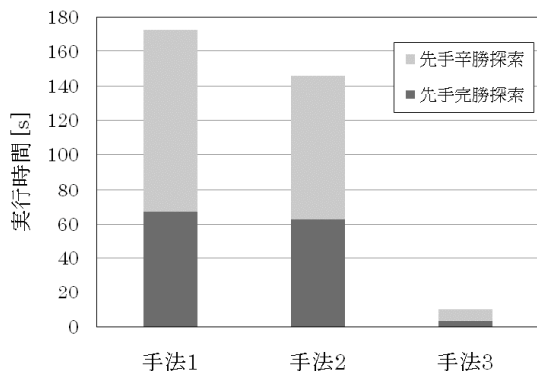


表 5 において, 手法 2 の実行速度は手法 1 の 1.2 倍程度であったが, 手法 3 の実行速度は手法 1 の 17.1 倍であった. 表 1, 3, 4 の先手完勝探索のデータを比較すると, 手番 2 の平均局面数, すなわち後手の手番 2 の手の探索数は, 手法 1, 2 では平均 2 程度であるが, 手法 3 では平均 1.13 であり, 先手の殆どの 1 手目の着手に対して, 後手の手法 3 による最初の着手, つまり (中央, 角)

= (5, 1) により先手完勝でないことが判定され, 処理が終了している. ゲーム木の各深さでこのような枝刈りが生じ, 乗数効果で時間が削減されていると考えられる. 本結果より, 中央のマスへの着手が探索の高速化に効果があることが示唆される.

### 3.2 改訂ルールするとき

#### 3.2.1 必勝法探索結果

cyclic entanglement 発生時, オリジナルルールでは, ゲームのパワーバランスのため<sup>1)</sup>, 相手プレイヤーが古典マークを確定させることとなっている. しかし, cyclic entanglement を発生させたプレイヤー自身が確定させる, とするの自然なルール設定と考えられるため, そのような改訂ルールの下で, 量子三目並べの必勝法の探索を行った. その結果を表 6 に示す (なお, 探索ノードの選択においてはオーダーリング手法 1 を使用した). 表の 4 列目の手番 2 の平均探索局面数が 37.00 (> 36.00) であるのは, 先手の全ての 1 手目において, 1 ノードで cyclic entanglement が発生し, ノードが二つに分岐しているためである.

表 6 必勝法探索結果 (改訂ルール)

探索の種類	必勝手	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手完勝	(1,3)	8,187,395	12.75	8.50
先手辛勝	(1,3)(1,6) (1,9)(2,8)	16,660,087	22.88	17.68
後手辛勝	無し	9,408,482	37.00	10.21
後手完勝	無し	6,656,866	37.00	6.91
合計	—	40,912,830	—	43.30

表 6 の先手完勝探索より, 先手 1 手目の (1, 3) への着手により先手完勝であることが分かる. また, 先手辛勝探索より, 先手 1 手目が (1, 6), (1, 9), (2, 8) の場合先手辛勝となる. 図 6 に先手完勝例を示す. 図 6(a) では, 8 手目までに  $\times_2$ ,  $\circ_3$ ,  $\times_4$ ,  $\circ_5$ ,  $\times_6$ ,  $\circ_7$  が確定した状況で先手が 9 手目で (1,6) に着手し, マス 1, 3, 6 で cyclic entanglement を発生させている. 改訂ルールにより, 先手が  $\circ_9$  をマス 6 に確定させ, 図 6(b) のように二行目に三目完成させ, 先手完勝となる.

#### 3.2.2 手数 の 最 小 性

オリジナルルール時と同様, 先手完勝に 9 手必要であることを示す. 先手 1 手目で (1, 3) に着手した深さ 8 のゲーム木で先手完勝探索を行った結果を表 7 に示す. 表 7 より 8 手では先手完勝でなく, 先手完勝に 9 手必要であることが確認できた.



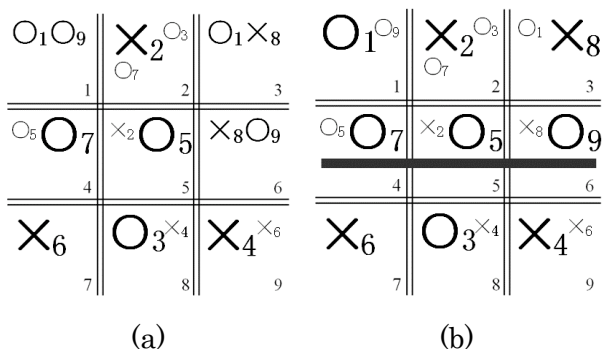


図 6 先手完勝例: (a) 9 手目で cyclic entanglement 発生, (b) 先手二行目で完勝

表 7 深さ 8 のゲーム木の先手完勝探索結果

探索の種類	必勝法	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手完勝	無し	38,472	1.00	0.03

### 3.2.3 探索の高速化

オリジナルルールのとときと同様、オーダリング手法 2, 3 を利用したときの先手完勝探索, 先手辛勝探索の実行時間を表 8, 表 9 に示す。また, 手法 1 ~ 3 の実行時間を比較したグラフを表 10 に示す。

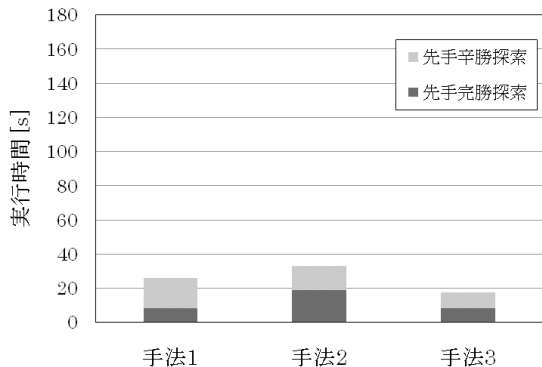
表 8 オーダリング手法 2 による探索結果

探索の種類	必勝法	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手完勝	(1,3)	17,127,200	13.88	18.88
先手辛勝	(1,3)(1,6) (1,9)(2,8)	13,803,144	25.38	14.06
合計	—	30,930,344	—	32.94

表 9 オーダリング手法 3 による探索結果

探索の種類	必勝法	探索局面数	手番 2 平均局面数	実行時間 [s]
先手完勝	(1,3)	8,160,422	12.50	8.38
先手辛勝	(1,3)(1,6) (1,9)(2,8)	8,957,300	21.63	9.05
合計	—	17,117,722	—	17.43

表 10 オーダリング手法の実行時間の比較



実行時間を比較すると, 中央のマス優先順位が高い手法 3 が最速で, 速度は手法 1, 2 に比べそれぞれ 1.5 倍, 1.9 倍であった。オリジナルルールするときほど高速化の効果がないが, その要因と考えられるのは, 先手完勝探索, 先手辛勝探索共, 先手必勝となる判定されるため, ゲーム木の後手の手番の多くのノードで探索を行う必要があることである。表 6, 表 8, 表 9 において, 後手の手番 2 の平均探索局面数がいずれの手法でも多いことがそのことを表している。

## 4. まとめ

量子三目並べの必勝法の解析を行い, 本ゲームがオリジナルルールの下では先手辛勝であり, 辛勝のために 9 手必要であること, および, cyclic entanglement 発生時の古典マークへの確定を発生させたプレイヤーが行うとした改訂ルールの下では先手完勝であり, 完勝のために 9 手必要であることを示した。必勝法は明らかとなったが, コンピュータを使用しない人の探索の域は越えており, 依然ボードゲームとして楽しめるだろう。また, 当初の製作の目的である量子力学の概念のメタファーとしての教育利用も可能だろう。

今後の課題としては, 4×4 以上の盤面における量子三目並べ, さらに, 一般化三並べの量子版である一般化量子三並べの必勝法の解明が挙げられる。

## 参考文献

- 1) A. Goff, D. Lehmann, and J. Siegel: Quantum tic-tac-toe, spooky-coins & magic-envelopes, as metaphors for relativistic quantum physics, AIAA paper 2002-3763, 38<sup>th</sup> Joint Propulsion Conference (2002).
- 2) F. Harary: Achieving the skinny animal, Eureka, Vol. 42, pp. 8 – 14(1982).
- 3) F. Harary and H. Harborth: Achievement and avoidance games with triangular animals, J. Recreat. Math., Vol. 18, pp. 110 – 115(1985–1986).
- 4) J.-P. Bode and H. Harborth: Hexagonal polyomino achievement, Discr. Math., Vol. 212, Iss. 1 – 2, pp. 5 – 18(2000).
- 5) J. Romein and H. Bal: Solving the game of Awari using parallel retrograde analysis, IEEE Computer, Vol. 36, No. 10, pp. 26 – 33 (2003).

- 6) J. Schaeffer, N. Burch, Y. Björnsson, A. Kishimoto, M. Müller, R. Lake, P. Lu, and S. Sutphen: Checkers Is Solved, *Science*, Vol. 317, No. 5844, pp. 1518 – 1522(2007).
- 7) 田中哲朗 : ボードゲーム「シンペイ」の完全解析, 情報処理学会論文誌, Vol. 48, No. 11, pp. 3470 – 3476(2007).
- 8) 田中哲朗: 「どうぶつしょうぎ」の完全解析, 情報処理学会研究報告, Vol. 2009-GI, No. 3, pp. 1 – 8(2009).
- 9) 八鍬友貴, 本田耕一 篠原歩: 一般化三並べの変種: 負け型のペアは勝てるのか?, 第14回ゲームプログラミングワークショップ 2009 (GPW-09), pp. 35 – 42(2009).
- 10) Quantum Tic-Tac-Toe, <http://www.paradigmpuzzles.com/QT3Play.htm>
- 11) R. Burgess, Quntum Tic-Tac-Toe Lite, <http://itunes.apple.com/us/app/quantum-tic-tac-toe-lite/id329898669?mt=8>