



ランダムパルスを用いた積分方程式の解法*

渡 辺 裕**

Abstract

Various methods of solving an integral equation by the principle of the Monte Carlo method have been proposed. Most of them, however, need complicated procedures of calculations with many restrictions, such as all the functions involved in the integral equation must be non-negative.

This paper presents a new method of solving the integral equation by the Monte Carlo method with its accuracy evaluation. A point series is generated by the random number source whose probability density function coincides with the kernel of the given integral equation, and an average of the inhomogeneous term of the equation is calculated by the generated random point series to obtain the solution.

This method can be easily modified to become free from the signs of the kernel and inhomogeneous terms, and can be applied to the Volterra type.

By using the above theory, a new type of integral equation analyzer is constructed.

1. ま え が き

第2種フレドホルム型 (以下 F_2 と略す), 第2種ボルテラ型積分方程式 (以下 V_2 と略す),

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \quad -\infty < a, b < +\infty, \quad (1.1)$$

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt, \quad -\infty < a, x < +\infty \quad (1.2)$$

の解は形式的には, 逐次代入法により求められる。しかし具体的な数値計算には, 多重積分の処理が厄介である。この困難を解決する一方法として, F_2 にモンテカルロ法を適用する試みがあり¹⁾, 原子炉内の中性子の輸送現象の解析などに利用されている²⁾。これは $K(x_i, x_{i+1})$ を粒子が点 x_i から x_{i+1} へ移動する推移確率密度関数, $g(x)$ を外部から入射する粒子の, 点 x における存在確率密度関数として実際に粒子をランダムに歩行させて得られる点の分布に方程式の解

$\varphi(x)$ が一致することを利用するものである。しかしこれには $g(x), K(x, t)$ を確率密度関数に対応させるため負の値は許されない。また各点で粒子を平均 λ 個に分裂させるため, λ が 1 より大きい場合は試行回数が λ^n の形で増大し, 実際の試行が困難になる欠点がある。この欠点を取り除くため, R. E. Cutkosky はノイマン級数で展開された積分方程式の解を, モンテカルロ法で計算することを提案した³⁾。まず, ノイマン級数の任意の項をランダムに選択し, 次にその項の多重積分をモンテカルロ法の加重サンプリング法を用いて計算するのである。しかしこれには, g と K の多数回の乗算および, サンプリングに用いた密度関数による割算が必要となり, 専用ハードウェアを構成する場合の難点となる。

これに対し本文では, ①サンプリングに用いる密度関数に直接積分方程式の核関数を用いて, 積, 商の演算を取り除いた。②正負にまたがる核関数に対しても, その絶対値をサンプリングに用いる密度関数として利用し, 解を得る方法を見出した。③また従来のように, ノイマン級数の特定項を選択するのではなく, 級数の一般項とその一つ前の項の関係を利用して操作を著しく簡単にした。④本方式は, デジタル計算機を

* A Solution of Integral Equations Using Random Pulses by Yuu WATANABE (Department of Applied Physics, Waseda University).

** 早稲田大学理工学部応用物理学科

利用して高速に積分方程式の解が得られるばかりではなく、専用ハードウェアの構成が容易となる。またほとんどそのままで V_2 に利用することができる、などの利点がある。ここでは上述のアルゴリズムと、専用器の試作結果を報告する。

2. 数学的準備

積分方程式 (1.1), (1.2) において、核関数 $K(x, t)$ が、正方領域 $S(a \leq x \leq b, a \leq t \leq b)$ あるいは三角領域 $T(a \leq t \leq x \leq b)$ において有界、連続、 $g(x)$ が区間 $I(a \leq x \leq b)$ で有界、連続なとき、単一連続解 $\varphi(x)$ は F_2, V_2 に対し、ノイマン級数 (2.1), (2.2) で与えられる⁴⁾。

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b K^{(1)}(x, t) g(t) dt \\ &+ \lambda^2 \int_a^b K^{(2)}(x, t) g(t) dt + \dots, \\ K^{(1)}(x, t) &= K(x, t) \\ K^{(n)}(x, t) &= \int_a^b K^{(n-1)}(x, \xi) K(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g(x) + \lambda \int_a^x K^{(1)}(x, t) g(t) dt \\ &+ \lambda^2 \int_a^x K^{(2)}(x, t) g(t) dt + \dots, \\ K^{(1)}(x, t) &= K(x, t) \\ K^{(n)}(x, t) &= \int_t^x K^{(n-1)}(x, \xi) K(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

V_2 では、 λ の値に無制限に、 x のどのような値に対してもこの級数は一様収束するが、 F_2 に対しては、 $|\lambda| < M^{-1}(b-a)^{-1}$ (2.3) の時 x の値にかかわらず一様収束する。ここで M は $|K|$ の上限を表わす。

ここで提案する解法は、ノイマン級数がベルヌーイ試行の期待値と一致することを利用するので、本文では級数の収束条件は満足されるものとする。また本論文の方式は多次元に容易に拡張され、多重積分方程式

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = g(x_1, x_2, \dots) + \lambda \int_D \dots \int_D K(x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots) \varphi(t_1, t_2, \dots) dt_1, dt_2, \dots \quad (2.4)$$

の解が (2.1) の積分を多次元積分でおきかえたノイマン級数で表わされ、それがすべての (x_1, x_2, \dots) に対して一様収束する場合 ($|\lambda| < M^{-1}V^{-1}$, $V = \int_D \dots \int_D dt_1, dt_2, \dots$)、本論文の方法の適用が保証される。第1種

* この試行と積分方程式の解の間の関係は (3.6) 式以下で述べられる。

ポルテラ型積分方程式

$$g(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.5)$$

は両辺を x で微分すれば、次の V_2

$$g'(x) = \lambda K(x, x) \varphi(x) + \lambda \int_a^x \frac{\partial K}{\partial x} \varphi(t) dt \quad (2.6)$$

に変換されるので、本論文の方式を用いて解くことができる。しかし積分領域が無限に広がっている特異積分方程式、例えば

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^\infty K(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.7)$$

は、一般にはノイマン級数の収束条件を満足しないので、本論文の方式は適用できない。

3. 第2種フレドホルム型積分方程式の解法

3.1 $K(x, t) \geq 0$ の場合

$K(x, t)$ を

$$\max \int_a^b |K(x, t)| dt \leq \mu, \quad (3.1)$$

および区間 I 内のすべての ξ に対して

$$\int_a^b |K(\xi, t)| dt < \mu \quad (3.2)$$

なる実数 μ を用いて正規化する。

$$K'_x(t) \triangleq \mu^{-1} K(x, t). \quad (3.3)$$

いま、方程式 (1.1) の解を求めるため次の試行を行う。区間 $I[a, b]$ 内の任意の1点 x_0 を定め、これを初期値として次の点 x_1 を乱数により決定する。次にこの x_1 を座標の基点とし、乱数により次の点 x_2 を求める。この操作をランダムフライト (以下単にフライトと略す) と呼ぶこととし以下同様なフライトにより発生する乱数列 $\{x_1, x_2, \dots\}$ を考える*。

ところが (3.2) より

$$\int_a^b K'_x(t) dt < 1 \quad (3.4)$$

となるので、発生される乱数が常に区間 I 内にあるとは限らない。 I 内に入らない場合、乱数列の発生はそこで終らせる。いま $(n+1)$ 番目の乱数がはじめて区間 I の外に出たとし、得られた乱数列、 $\{x_i\} \triangleq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ で関数 $\Gamma_n(\{x_i\}; x_0)$ を与えられた方程式中のパラメータ λ および非斉次項 $g(x)$ を用い、次のように定義する。

$$\Gamma_n(\{x_i\}; x_0) = g(x_0) + \lambda \mu g(x_1) + \dots + (\lambda \mu)^n g(x_n). \quad (3.5)$$

x_0 および n を固定したときの Γ_n の期待値 $E\{\Gamma_n | n\}$ は

$$E\{\Gamma_n | n\} = \begin{cases} g(x_0) & (n=0) \\ \int_a^b \dots \int_a^b dx_1 \dots dx_n \prod_{j=0}^{n-1} K'_{x_j}(x_{j+1}) \sum_{k=0}^n (\lambda\mu)^k g(x_k). \end{cases} \quad (3.6)$$

故に上述の試行で得られる関数 Γ_n の期待値 $E\{\Gamma_n\}$ は

$$E\{\Gamma_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} E\{\Gamma_n | n\} \left(1 - \int_a^b K'_{x_n}(x_{n+1}) dx_{n+1}\right) = g(x_0) \left(1 - \int_a^b K'_{x_0}(x_1) dx_1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \dots \int_a^b dx_1 \dots dx_n \prod_{j=0}^{n-1} K'_{x_j}(x_{j+1}) \cdot \left\{ \sum_{k=0}^n (\lambda\mu)^k g(x_k) \right\} \left(1 - \int_a^b K'_{x_n}(x_{n+1}) dx_{n+1}\right) = g(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\mu)^n \int_a^b \dots \int_a^b dx_1 \dots dx_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1} K'_{x_j}(x_{j+1}) g(x_n). \quad (3.7)$$

これはノイマン級数(2.1)と一致する。従って Γ_n の期待値は、(1.1)の解 $\varphi(x_0)$ を与え、出発点 x_0 から始まる上述の試行を多数回繰返して得られる Γ_n の平均値から、(1.1)の解が得られる。

3.2 $K(x, t)$ が正負の値を取る場合

$K(x, t)$ が領域 S において常に負または0の場合、次式を考え、

$$\varphi(x) = g(x) + (-\lambda) \int_a^b (-K(x, t)) \varphi(t) dt, \quad (3.8)$$

3.1と同様にして解が得られる。しかし $K(x, t)$ が S で正負にまたがる場合には、(3.3)の $K'_x(t)$ をそのまま推移確率密度関数と考えることができない。この時推移確率密度関数 $K'_x(t)$ を

$$K'_x(t) \triangleq \mu^{-1} |K(x, t)|, \quad (3.9)$$

とし、フライトを行い、得られた乱数列 $\{x_i\}$ により $\Gamma_n^* (\{x_i\}; x_0)$ を次のように定義する。

$$\Gamma_n^* (\{x_i\}; x_0) = g(x_0) + \lambda \mu \varepsilon(x_0, x_1) g(x_1) + \dots + x_{j+1} + (\lambda\mu)^n \varepsilon(x_0, x_1, \dots, x_n) g(x_n). \quad (3.10)$$

ここで関数 ε は各項の符号を決める因子で

$$\varepsilon(x_0, x_1, \dots, x_n) = \text{sgn}(K(x_0, x_1)) \dots \times \text{sgn}(K(x_{n-1}, x_n)) \quad (3.11)$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

この時 $\Gamma_n^* (\{x_i\}; x_0)$ の期待値 $E\{\Gamma_n^*\}$ は(3.7)と同様に、

$$E\{\Gamma_n^*\} = g(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\mu)^n \int_a^b \dots \int_a^b dx_1 \dots dx_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1} K'_{x_j}(x_{j+1}) \varepsilon(x_0, \dots, x_n) g(x_n). \quad (3.13)$$

(3.13)は与えられた方程式がノイマン級数の収束条件(2.3)を満たす時一様収束する。したがって領域 S を関数 ε を用いて2つの部分領域に分けて考える。

$$E\{\Gamma_n^*\} = g(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\mu)^n \left\{ \int_{D_n^{(+)}} \dots \int_{D_n^{(+)}} dx_1 \dots dx_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1} K'_{x_j}(x_{j+1}) g(x_n) - \int_{D_n^{(-)}} \dots \int_{D_n^{(-)}} dx_1 \dots dx_n \prod_{j=0}^{n-1} K'_{x_j}(x_{j+1}) g(x_n) \right\}. \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} x_0, \dots, x_n \in D_n^{(+)} \quad \varepsilon(x_0, \dots, x_n) &= 1 \\ x_0, \dots, x_n \in D_n^{(-)} \quad \varepsilon(x_0, \dots, x_n) &= -1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

(3.9)を用いて

$$E\{\Gamma_n^*\} = g(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b \dots \int_a^b dx_1 \dots dx_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1} K(x_j, x_{j+1}) g(x_n) \quad (3.16)$$

となりノイマン級数と一致する。 $\varepsilon g(x)$ はフライトを行う粒子が $K(x, t)$ の負の区間に入ることに $g(x)$ の符号を交換すればよいから正負にまたがる核の場合にも同様のベルヌーイ試行で解が得られる。

4. 第2種ボルテラ型積分方程式の解法

3.と同様に、次式で定義される実数 μ

$$\max \int_a^x |K(x, t)| dt \leq \mu, \quad (4.1)$$

$$\int_a^x |K(x, t)| dt < \mu \quad (4.2)$$

を用い(3.9)と同様に、 $K'_x(t)$ を推移確率密度関数とし、フライトを行う。しかし今度は乱数 x_j が決まった時次の乱数は、 $a \leq x_{j+1} \leq x_j$ を満たすものとし、満たさない時そこでその乱数列は終わらせる。得られた乱数列 $\{x_i\}$ で次の関数 $\Lambda_n(\{x_i\}; x_0)$ を定義する。

$$\Lambda_n(\{x_i\}; x_0) = g(x_0) + \lambda \mu \varepsilon(x_0, x_1) + g(x_1) \dots + (\lambda\mu)^n \varepsilon(x_0, x_1, \dots, x_n) g(x_n). \quad (4.3)$$

ここで ε は(3.11)で定義される各項の符号を決める因子である。 $\Lambda_n(\{x_i\}; x_0)$ の期待値は(3.16)と同様にすべての x に対し一様収束し

$$E\{A_n\} = g(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^{x_{n-1}} dx_n \cdots \int_a^{x_0} dx_1 \cdot \prod_{j=0}^{n-1} K(x_j, x_{j+1}) g(x_n) \quad (4.4)$$

となり右辺はノイマン級数 (2.2) と一致する。したがって F_2 と同様に $A_n(\{x_i\}; x_0)$ の平均値から解 $\varphi(x)$ を求められる。

5. 試作積分方程式解析器の構成

前述のベルヌーイ試行を用いて、次の条件

$$1) K(x, t) = K(x-t) \geq 0 \quad (5.1)$$

$$2) \lambda \mu \leq 1 \quad (5.2)$$

を満たす1次元の F_2, V_2 を解く解析器を試作した。 F_2 では区間 $I[a, b]$ 内の16個の座標点における解が8ビットデジタル値で、 V_2 では同様の解が積分の下限 a から任意の x までの16座標点で得られる。

Fig. 1 は試作装置のブロック図で、ブロック間の信号を $\alpha \sim \rho$ で表わす。M系列発生器の2進一様乱数 α を確率分配器により、 $K(x-t)dx$ の確率分布を持つ32本の排他的ランダムパルスに変換し、エンコーダで符号化する (**Table 1**)、次のランダムフライト部 (F) で4ビット2進数に符号化した点の位置 (**Table 2**) と乱数 γ の和を2進加算器を用いて計算しフライトを行う。1回のフライト後、点が区間 $[a, b]$ 内では試行を続行、区間外では停止する (**Table 3**)。1回のフライト後点が区間 $[a, b]$ 外では、加算器出力の第2ビットが0となり、区間内では第2ビットが1、3~6ビットが **Table 2** の点の座標となる。第2ビットより、点が区間内にあるか否かを判定し、外にある場合、ヒストグラムカウンタ (H) に信号 ω を送り点の座標を $x_0(\chi)$ として試行を再開する。区間内

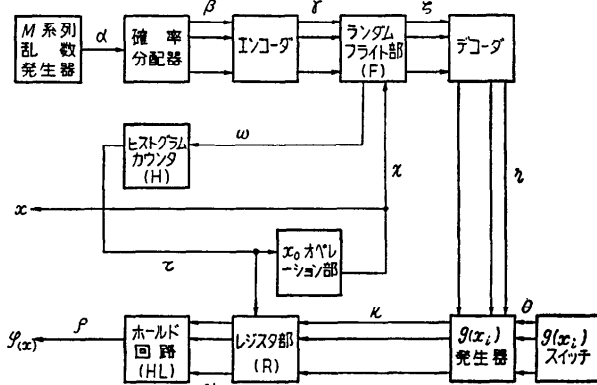


Fig. 1 Block diagram of integral equation analyzer.

Table 1 Relation between random number and binary code, where $d=(b-a)/15$.

乱数	符号化	乱数	符号化
-16d	0 0 0 0 0	0	1 0 0 0 0
-15d	0 0 0 0 1	1d	1 0 0 0 1
-14d	0 0 0 1 0	2d	1 0 0 1 0
-13d	0 0 0 1 1	3d	1 0 0 1 1
-12d	0 0 1 0 0	4d	1 0 1 0 0
-11d	0 0 1 0 1	5d	1 0 1 0 1
-10d	0 0 1 1 0	6d	1 0 1 1 0
-9d	0 0 1 1 1	7d	1 0 1 1 1
-8d	0 1 0 0 0	8d	1 1 0 0 0
-7d	0 1 0 0 1	9d	1 1 0 0 1
-6d	0 1 0 1 0	10d	1 1 0 1 0
-5d	0 1 0 1 1	11d	1 1 0 1 1
-4d	0 1 1 0 0	12d	1 1 1 0 0
-3d	0 1 1 0 1	13d	1 1 1 0 1
-2d	0 1 1 1 0	14d	1 1 1 1 0
-1d	0 1 1 1 1	15d	1 1 1 1 1

Table 2 Relation between coordinate and binary code, where $d=(b-a)/15$.

点の座標	符号化された座標			
a	0	0	0	0
a+d	0	0	0	1
a+2d	0	0	1	0
a+3d	0	0	1	1
a+4d	0	1	0	0
a+5d	0	1	0	1
a+6d	0	1	1	0
a+7d	0	1	1	1
a+8d	1	0	0	0
a+9d	1	0	0	1
a+10d	1	0	1	0
a+11d	1	0	1	1
a+12d	1	1	0	0
a+13d	1	1	0	1
a+14d	1	1	1	0
b	1	1	1	1

の場合は、3~6ビットを点の座標とし試行を続ける。点の座標はデコーダでデコードし、出力 γ を $g(x_i)$ 発生器に送り、点の座標に対応した、6ビットのスイッチで指定される、 $g(x_i)$ の値 κ を容量20ビットのレジスタ部 (R) へ送る。ここで次々に送られてくる κ を加算し、その総和を記憶する。HはFで点が区間

Table 3 Relation between coordinate and output of adder.

点の座標 x	加算器出力					
	1	2	3	4	5	6
$x < a$	0	0	x	x	x	x
$x = a$	0	1	0	0	0	0
$a < x < b$	0	1	x	x	x	x
$x = b$	0	1	1	1	1	1
$x > b$	1	0	x	x	x	x

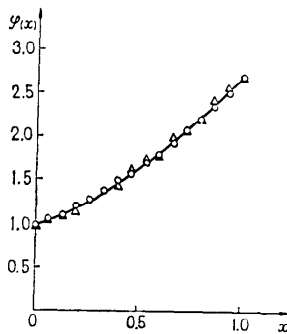
[a, b] 外へ出た回数を数え 2¹² 回となった時, 信号 τ を出し, レジスタ部の内容 (2¹² 回の $\Gamma_n(\{x_i\}; x_0)$ の総和) の上 8 ビットを HL にホールドし, R の内容をクリアする. したがって HL の内容 ρ が出発点 x_0 における解となる.

V_2 でも確率分配器の出力を $K(t-x) \equiv 0(t-x > 0)$ とし, 点を左方向のみに移動させれば同様に解が得られる.

本装置は約 130 個の TTLIC と 16 枚のプリント板から成り, クロック 500 kHz で, IBM 7040 を用いた場合の約 30,000 倍の速さで行うことができる.

6. 簡単な解析例

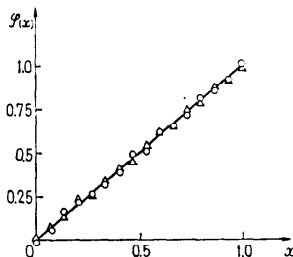
Fig. 2, Fig. 3 は試作器の計算結果の 1 列で, Δ は比較のためデジタル計算機 4,000 回の試行結果を



$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt.$$

- ; Theoretical solution $\varphi(x) = e^x$.
- ; Solution by integral equation analyzer.
- △; Solution by computer simulation.

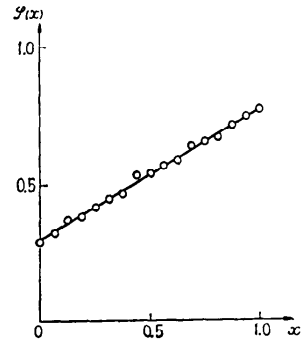
Fig. 2 Solution result.



$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3} + \int_0^1 |t-x| \varphi(t) dt.$$

- ; Theoretical solution $\varphi(x) = x$.
- ; Solution by integral equation analyzer.
- △; Solution by computer simulation.

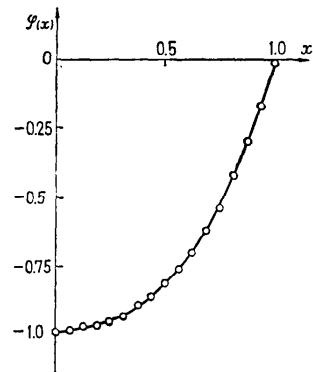
Fig. 3 Solution result.



$$\varphi(x) = x + \int_0^1 (t-x)\varphi(t) dt.$$

- ; Theoretical solution $\varphi(x) = \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}$.
- ; Solution by computer simulation.

Fig. 4 Solution result.



$$\varphi(x) = (-x^3 + 3x^2 - 2x - 1)e^x + 3x + \frac{1}{2} \int_0^x 2xt\varphi(t) dt.$$

- ; Theoretical solution $\varphi(x) = (x-1)e^x$.
- ; Solution by computer simulation.

Fig. 5 Solution result.

示した. またデジタル計算機で, 本方式のアルゴリズムの正しいことを確かめた. 1 例として Fig. 4 は, F_2 で正負にまたがる核の場合. Fig. 5 は V_2 でコンボリューション形でない核で $\lambda \neq 1$ の場合である.

7. 信頼度

本方式は, 多数回の試行の平均値が積分方程式の解に近づくことを利用したので, サンプル数と得られた結果の精度の関係が問題となる. ここでは中心極限定理を用いた解の信頼度および試作器の解の丸め誤差について考察する.

(3.10) および (4.3) の $\Gamma_n^*(\{x_i\}; x_0), A_n(\{x_i\}; x_0)$

の n 個の総和を Σ_n とすると Σ_n は n が大きい時正規分布に近づく

$$\text{Prob}\left(A < \frac{\Sigma_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \sigma} < B\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-x^2/2} dx \quad (7.1)$$

ここで m, σ^2 は Γ_n^* および A_n の平均および分散で、 F_2 および V_2 に対しそれぞれ $m_F, \sigma_F^2; m_V, \sigma_V^2$ と書けば、

$$m_F = E\{\Gamma_n^*\} = \varphi(x_0), \quad (7.2)$$

$$\sigma_F^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b \dots \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^j (\lambda \mu)^k \varepsilon(x_0, \dots, x_k) g(x_k) \right\}^2 \prod_{i=1}^j K'_{x_{i-1}}(x_i) \left\{ 1 - \int_a^b K'_{x_j}(x_{j+1}) \right\} dx_1 \dots dx_j - m^2$$

$$\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{N^2}{(1-\lambda\mu)^2} \left\{ \frac{1-\alpha^{j+1}}{1-\alpha} - 2\lambda\mu \frac{1-(\lambda\mu\alpha)^{j+1}}{1-\lambda\mu\alpha} + \lambda^2 \mu^2 \frac{1-(\lambda^2 \mu^2 \alpha)^{j+1}}{1-\lambda^2 \mu^2 \alpha} \right\} - m^2, \quad (7.3)$$

$$m_V = E\{A_n\} = \varphi(x_0), \quad (7.4)$$

$$\sigma_V^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^{x_0} \int_a^{x_0} \left\{ \sum_{k=0}^j (\lambda \mu)^k \varepsilon(x_0, \dots, x_k) g(x_k) \right\}^2 \prod_{i=1}^j K'_{x_{i-1}}(x_i) \left\{ 1 - \int_a^{x_i} K'_{x_j}(x_{j+1}) \right\} dx_1 \dots dx_j - m^2,$$

$$\leq \frac{N^2}{(1-\lambda\mu)^2} \left\{ e^{M'(x_0-a)} + \lambda^2 \mu^2 e^{M'(x_0-a)\lambda^2 \mu^2} - 2\lambda\mu e^{M'(x_0-a)\lambda\mu} \right\} - m^2. \quad (7.5)$$

(7.3), (7.5) から F_2, V_2 に対する分散の上限が与えられる。ここで N, M', α はそれぞれ $|g(x)|, |K'_x(t)|, \int_a^b K'_x(t) dt$ の上限を示し、(7.3) はノイマン級数の収束条件より $\mu < M(b-a)$ の時収束する。したがって核が正の値のみを取る場合も、正負の値を取る場合も、分散は方程式によって定まる同一の値を取り、得られる解のばらつきも同一の範囲に収まることわかる。特別な場合として $g(x) = C, K(x, t) = \mu/(b-a)$ の F_2 について m および σ から試行回数(甲)と信頼度(乙)の関係を求める。

$$\mu \leq 1, |\lambda\mu| \leq 1, |\lambda^2\mu| \leq 1 \quad (7.6)$$

の条件の下に、

$$m_F = C \frac{1}{1-\lambda\mu}, \quad (7.7)$$

$$\sigma_F = C^2 \left[\frac{1-\mu}{(1-\lambda)^2} \left\{ \frac{1}{1-\mu} - \frac{2\lambda}{1-\lambda\mu} + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2\mu} \right\} - \frac{1}{(1-\lambda\mu)^2} \right]. \quad (7.8)$$

ここで $C=1$ として μ, λ の種々の値について試行の

Table 4 Relation between trial number and reliability of solution,

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_b^a \{\mu(b-a)\} \varphi(t) dt.$$

λ	0.5		0.2				
μ	0.5		0.9				
m	1.333		1.219				
σ	0.3563		0.1247				
信頼度 試行回数	68.3%	95.4%	99.7%	63.8%	95.4%	99.7%	
	100	0.0356	0.0712	0.1068	0.0124	0.0249	0.0374
	1,000	0.0112	0.0225	0.0338	0.0039	0.0078	0.0012
	2,000	0.0079	0.0159	0.0239	0.0027	0.0055	0.0083
	4,000	0.0056	0.0112	0.0169	0.0019	0.0039	0.0059
	10,000	0.0035	0.0071	0.0106	0.0012	0.0024	0.0037

信頼区間を Table 4 に示す。Table 4 より甲の増加と共に乙は上がり、4,000 回の試行で信頼区間は約 2%、実用上十分な精度が得られる。他の K, g の場合、例えば、

$$g(x) = x, K(x, t) = t - x, \quad (7.9)$$

および

$$g(x) = (-x^3 + 3x^2 - 2x + 1)e^x + 3x, K(x, t) = xt \quad (7.10)$$

では、いずれも約 4,000 回の試行で 1% の精度が得られる。

次に試作器の誤差は、上述のサンプリング誤差の他に、次の 3 つが考えられる。

(1) $g(x)$ の打ち切り誤差

g の打ち切り誤差 $\Theta(x_i)$ により、真の解 $\varphi(x)$ の代わりに $\Psi(x)$ が得られたとすると、

$$\Delta(x) = \Theta(x) + \lambda \int_a^b K(t-x) \Delta(t) dt. \quad (7.11)$$

ただし、

$$\Delta(x) = \Psi(x) - \varphi(x). \quad (7.12)$$

ここで、

$$\max |K(t-x)| = \mu', \max |\Theta(x)| = E \quad (7.13)$$

とすれば、

$$\Delta(x) \leq E \sum_{j=0}^{\infty} \mu'^j (b-a)^j \lambda^j = \frac{E}{1-\lambda\mu'(b-a)}. \quad (7.14)$$

$\lambda\mu' = 0.25, b-a = 1$ の場合、 $4E/3$ となりサンプリング誤差より大きい。

(2) $K(t-x)$ の打ち切り誤差

K の打ち切り誤差を $E(t-x)$ とすると、

$$\Delta(x) = \lambda \int_a^b E(t-x) \varphi(t) dt + \lambda \int_a^b E(t-x) \Delta(t) dt, \quad (7.15)$$

$$E(t-x) = K(t-x) + \mathcal{E}(t-x). \quad (7.16)$$

ここで

$$\max |\lambda \int_a^b \mathcal{E}(t-x) \varphi(t) dt| = L \quad (7.17)$$

$$\max |E(t-x)| = \mu^n \quad (7.18)$$

とすると、得られる解の誤差は、

$$\Delta(x) \leq \frac{L}{1 - \lambda \mu^n (b-a)} \quad (7.19)$$

となる。前と同様、 $\lambda \mu^n = 0.25$, $b-a=1$, $\varphi(x)=1.33$, $\lambda=0.5$ の時、試作装置では $L=0.67/2048$ であるから

$$\Delta(x) \leq 4.36 \times 10^{-4} \quad (7.20)$$

となりサンプリング誤差よりもはるかに小さく問題はない。

(3) 有限個の代表点をフライトするための誤差
有限個の代表点の上をフライトすることは

$\int_a^b K(t-x) dt$ を台形公式で近似することと等しい。

$$\max |g(x)| = N, \quad (7.21)$$

$$\max \left| \frac{\partial}{\partial t} K(t, x) \right| = D \quad (7.22)$$

とすると、ノイマン級数各項についての誤差は

$$\text{第1項 } \Delta_1 = 0$$

$$\text{第2項 } \Delta_2 \leq N \frac{(b-a)^2 D}{2n}$$

⋮

$$\text{第 } m \text{ 項 } \Delta_m \leq N \frac{(b-a)^2 D}{2n} \left\{ \frac{\lambda(b-a)}{n} \right\}^{m-2} \quad (7.23)$$

ここで n は代表点による区間 I の分割数である。故に解の誤差 Δ は

$$\Delta = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \leq \frac{(b-a)^2 D}{n - \lambda(b-a)}. \quad (7.24)$$

$N=1$, $(b-a)=1$, $\lambda=0.5$, $D=1$ の場合、試作器では $n=15$ となり

$$\Delta \leq 0.069 \quad (7.25)$$

で誤差の最大原因となる。

以上から、 $g(x)$ のビット数、サンプル点の数を増すことによりさらに高精度の解を得ることができるが、上述の議論はすべて誤差の上限に対してで、実際の実験結果の精度は、現在でも満足すべきものである。

8. あとがき

積分方程式の数値解法では一般には積分を積分領域内で、被積分関数の標本値の荷重和に書きかえる。本

論文の方法の特徴は他の数値解法と異なり組織的でなくランダムにサンプリングするところにある。組織的サンプリングでは標本点の個数 N_0 と被積分関数の最大空間周波数 ω_0 との関係が通信理論における標本化定理を満足する場合、サンプル値から被積分関数を再現することが可能で、積分のきざみ幅に依存する誤差で積分値を計算できる。しかし標本化定理を満たさない N_0 から正しい積分値を知る方法は一般に知られていない。したがって被積分関数の ω_0 を仮定し N_0 を決めねばならないが、積分方程式の数値解法の場合、被積分関数が方程式の解のため予め適当な N_0 を定めることができない。これに対しランダムサンプリングは組織的サンプリングと同一の N_0 を用いても標本点が領域内にランダムにちらばるため、 ω_0 と N_0 の関係からおこる誤差は生じない。多次元の方程式の場合 ω_0 から決定される N_0 は一般に次元数の増加と共に指数関数的に増大し、組織的なサンプリングによる計算は困難となる。しかしランダムサンプリングを用いれば組織的サンプリングが ω_0 との関係で大きな誤差を持つ N_0 でも次元数とは無関係なばらつきで積分の推定値を得ることができる。

本論文の方式は、ベルヌーイ試行に基づく確率変数 Γ_n, Λ_n の期待値が積分方程式の解ノイマン級数と一致することを利用したものである。試行は解をノイマン級数で表わせる積分方程式すべてに適用でき、Nygard らの方法と比べて $g(x)$, $K(t, x)$ が負の値を取る場合、およびその区間 I における積分が 1 をこえる場合にも適用できる等適用範囲が広い。また Cutkosky らの方法と比べて演算の回数が少なくすむ、ノイマン級数全体を同時に計算できる等、試行が著しく単純であるため並列処理可能な簡単な専用ハードウェアを構成することにより、複雑な演算機能を持つデジタル計算機より高速に解が得られることが確認された。

本論文の方式では、1回の試行では、1点における解の値しか得られない、したがって、内部数点のみの解を得る場合には便利である。また多次元の積分方程式にも同様の試行が適用できる。専用ハードウェアも、確率分配器の内容を点の位置により変更することにより、コンボリューション型以外の核に対しても利用できる。

終りに大照完先生、加藤鞆一先生に種々御指導戴いた。またもと大学院学生大塚雅弘氏にお世話になった。あわせて厚く御礼申し上げる。

参考文献

- 1) K. Nygard: On the Solution of Integral Equation by Monte Carlo Method, Norwegian Defence Res. Estab. Rep. No. F-R 94: 9(1952).
 - 2) M. H. Kalos: Monte Carlo Solution of Linear Transport Problem, SIAM-AMS Proceedings, Vol. 1, p. 228 (1967).
 - 3) R. E. Cutkosky: A Monte Carlo Method for Solving a Class of Integral Equation, J. of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 47, No. 2 (1951).
 - 4) 寺澤寛一: 自然科学者のための数学概論 [増訂版], p. 573, 岩波書店, 東京 (1967).
(昭和52年4月15日受付)
(昭和52年11月24日再受付)
-