Vol.2010-AL-131 No.2
2010/9/22

k 木における完全独立全域木について

松　下　正　義[†1]　　荒　木　　徹[†1]

T_1, T_2 を連結グラフ G の二つの全域木とする．G の任意の 2 頂点 u, v に対して，T_1 上の u-v パスと T_2 上の u-v パスが，両端点以外に共通の頂点を持たないとき，T_1 と T_2 は互いに完全独立であるという．本論文では，以下の結果を証明した．(1) 与えられたグラフに 2 個の完全独立全域木が存在するかどうかを判定する問題は，入力をコーダルグラフに限定しても NP 完全である．(2) $k \geq 3$ に対し，任意の k 木で少なくとも $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ 個の互いに完全独立な全域木を構成可能である．(3) グラフ G で構成可能な完全独立全域木の最大数を $CIST(G)$ と表す．$\lfloor (k+1)/2 \rfloor \leq p \leq k-1$ を満たす任意の整数 p に対して $CIST(G) = p$ となる k 木が存在する．

On the completely independent spanning trees in k-trees

Masayoshi Matsushita [†1] and Toru Araki[†1]

Two spanning trees T_1 and T_2 of a connected graph G are completely independent if, for any two vertices u and v in G, two u-v paths on T_1 and T_2 have no common vertex except for u and v. The summary of the results reported in this paper are as follows: (1) The problem of deciding whether there exist two completely independent spanning trees in a given graph is NP-complete, even if the input graphs are limited to chordal graphs. (2) For $k \geq 3$, a k-tree has at least $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ completely independent spanning trees. (3) Let $CIST(G)$ be the maximum number of completely independent spanning trees in G. For any positive integer p such that $\lfloor (k+1)/2 \rfloor \leq p \leq k-1$, there exists a k-tree such that $CIST(G) = p$.

†1 群馬大学大学院工学研究科 情報工学専攻
Department of Computer Science, Gunma University

1. はじめに

連結グラフ G に対し，2 頂点 u, v 間の 2 本のパス P_1, P_2 が，u, v 以外に共通の頂点を持たないとき，その 2 本のパスを**内素である**という．$T_1, T_2, \ldots, T_k$ を連結グラフ G の全域木とする．任意の 2 頂点 u, v に対して，$T_1, T_2, \ldots, T_k$ におけるそれぞれの u-v パスが互いに内素であるとき，全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_k$ は完全独立であるという．[5)]

完全独立全域木の概念は Hasunuma[4)] で導入され，与えられた全域木の集合が完全独立であるための必要十分条件が示された．一般に与えられたグラフに 2 個の完全独立全域木が構成できるかどうかを判定する問題は NP 完全である[5)]．ラインダイグラフの底グラフ[4)] や 4 連結極大平面グラフ[5)] において，完全独立全域木を構成するアルゴリズムが与えられている．

関連する研究として，独立全域木についての研究が数多く行われている[1),3),5),6)]．グラフ G と頂点 r に対して，r を根とする G の全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_k$ は，r から任意の頂点 v へのそれぞれの全域木に沿った k 個のパスが互いに内素であるとき，独立全域木であるという．今回考える完全独立全域木は，根 r を固定しない点が大きく異なる．

本論文では，大きく分けて二つの結果を述べる．まず，与えられたグラフに 2 個の完全独立全域木が構成できるかどうかを判定する問題は，入力をコーダルグラフに限定しても NP 完全であることを示す．その後，対象とするグラフをコーダルグラフの部分クラスである k 木に限定し，構成可能な完全独立全域木の数のシャープな上界と下界を示す．

2. 準　　備

本論文で扱うグラフはすべて単純グラフである．連結グラフ G の**全域木**とは，すべての頂点を含む部分木である．T を G の全域木とする．頂点 v の木 T における次数を $\deg_T(v)$ と表す．完全独立全域木の特徴付けは以下の様に与えられる．

定理 2.1 (Hasunuma[4)])　連結グラフ G の全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_k$ が完全独立であるための必要十分条件は，次の二つの条件を満足することである：(1) $T_1, T_2, \ldots, T_k$ は互いに共通する辺を持たない．(2) 任意の G へ頂点 v に対して，$\deg_{T_i}(v) \geq 2$ となる全域木 T_i は高々一つしか存在しない．

定理 2.1 の条件から，k 個の完全独立全域木があるとき，どの 1 個の頂点を削除しても高々1 個の木 T_i のみが非連結になり，その他の頂点は端点が削除されるのみになっていることが分かる．

コーダルグラフとは，誘導部分グラフとして長さが 4 以上のサイクルを含まないグラフである．続いて k **木**（k-tree）を定義する．

定義 2.2 $k \geq 1$ に対し，k 木とは以下の様に再帰的に定義されるグラフである．(1) $k+1$ 頂点の完全グラフ K_{k+1} は k 木である，(2) G を k 木とし，G の大きさ k のクリークを $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ とする．このとき，G の新しい頂点 v と k 本の辺 $vv_1, vv_2, \ldots, vv_k$ を追加して得られるグラフは k 木である．

$k = 1$ のとき，これは木の定義と一致する．k 木はコーダルグラフの特別な場合である．

3. NP 完全性

この節では，与えられたグラフに 2 個の完全独立全域木が存在するかどうかを判定する問題が，入力をコーダルグラフに限定しても NP 完全であることを証明する．

定理 3.1 (2)) 以下の NAE 3-SAT（Not-All-Equal 3-SAT）問題は NP 完全である．

インスタンス 変数の集合 X と，それぞれがちょうど 3 個のリテラルからなる X 上のクローズの族 C

問題 C の各クローズが少なくとも 1 個の true リテラルと，少なくとも 1 個の false リテラルを持つような，X の変数への真偽割り当てが存在するか？

定理 3.2 与えられたコーダルグラフ G が，2 個の完全独立全域木を持つかどうかを決定する問題は NP 完全である．

（証明）NAE-3SAT 問題から帰着する．

NAE-3SAT のインスタンスに対して，変数の集合を $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，クローズの集合を $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$，$|C_j| = 3$，とする．このインスタンスからグラフ G を以下の様に構成する．

$$V(G) = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\overline{x}_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_j \mid 1 \leq i \leq m\}.$$

G の頂点の隣接関係は，以下の通りである．

(1) 頂点集合 $U = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\overline{x}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ はサイズ $2n$ のクリークとなる．

(2) $1 \leq i \leq n$ に対して $x_i y_i, \overline{x}_i y_i \in E(G)$.

(3) 各クローズ C_j に対して，$c_j v \in E(G)$，ここで $v \in C_j$.

このグラフ G はコーダルグラフである．今，G が 2 個の完全独立全域木を持つための必要十分条件が，与えられた NAE-3SAT のインスタンスを充足することであることを示す．

まず C の各クローズ C_j が，少なくとも一つの truth リテラルと少なくとも一つの false リテラルを持つような変数への真理値の割り当て t が存在したとする．その割り当て t に対して，G の二つの全域木 T_R と T_B を以下の様に構成する．

まず集合 U の各頂点を，$t(x_i)$ が true なら頂点 x_i を赤，$\overline{x}_i$ を青で彩色する．また，$t(x_i)$ が false なら頂点 x_i を青，$\overline{x}_i$ を赤で彩色する．したがって U が誘導するサイズ $2n$ のクリークには，赤と青の頂点が n 個ずつ存在する．このクリークにおいて，二つの全域木 T'_R と T'_B を，もし x が青の頂点なら $\deg_{T'_R} x = 1$，x が赤の頂点なら $\deg_{T'_B} x = 1$ となるように構成できる．

この T'_R, T'_B を G の全域木 T_R, T_B へ拡張する．

(1) 変数への真理値の割り当てが NAE-3SAT を充足しているので，各 c_j は少なくとも 1 個の赤の頂点 u と隣接し，かつ少なくとも 1 個の青の頂点 v と隣接する．このとき，辺 uc_j を T'_R へ，辺 vc_j を T'_B へ追加する．

(2) 頂点 y_i は，x_i と $\overline{x}_i$ の 2 頂点と隣接し，x_i と $\overline{x}_i$ のうち一方は赤，一方は青である．辺 yx_i と $y\overline{x}_i$ のうち，赤の頂点と接続する辺を T'_R へ，青の頂点と接続する辺を T'_B へ追加する．

(3) 構成された二つの全域木を T_R, T_B とする．

全域木 T_R, T_B が G において完全独立であることは，容易に確かめることができる．

逆に，G に完全独立全域木 T_R, T_B が存在したと仮定する．木 T_R において，次数が 2 以上の頂点を赤，T_B において，次数が 2 以上の頂点を青で彩色する．各 y_i は次数 2 であるので，隣接する頂点 $x_i, \overline{x}_i$ は一方が赤，一方が青で彩色されていなければならない．また，頂点 c_j は，少なくとも 1 個の赤の頂点と，少なくとも 1 個の青の頂点と隣接していなければならない．今，変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ への真理値の割り当て t を，x_i が赤なら $t(x_i) = \text{true}$, x_i が青なら $t(x_i) = \text{false}$ とする． C の各クローズ C_j は，少なくとも 1 個の true リテラルと，少なくとも 1 個の false リテラルを持つので，この t は NAE-3SAT を充足する．■

グラフの頂点集合が，クリークを誘導するものと孤立点を誘導するものの二つの部分集合に分割できるとき，そのグラフを**スプリットグラフ**（split graph）という．上記の証明において構成したグラフ G は，頂点数 $2n$ のクリークを誘導する頂点の集合 U と，それ以外の孤立点の集合に分割できるので，スプリットグラフである．よって，定理 3.2 の証明から以下の系がいえる．

系 3.3 2 個の完全独立全域木が構成できるかどうかを判定する問題は，入力をスプリットグラフに限定しても NP 完全である．

4. k 木における完全独立全域木

この節では，対象とするグラフをコーダルグラフの特殊な場合である k 木に限定し，構成可能な完全独立全域木の最大数について考察する．グラフ G の構成可能な完全独立全域木の最大数を $CIST(G)$ と表す．

補題 4.1 $n \geq 2$ に対して $CIST(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

(証明) K_n の頂点を $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ とする．全域木 T_i，$0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$，の辺集合を以下のように定義する．

$$E(T_i) = \{v_{2i}v_{2i+1}\} \cup \{v_{2i}v_{2j+1}, v_{2i+1}v_{2j} \mid j < i\} \cup \{v_{2i}v_{2j}, v_{2i+1}v_{2j+1} | j > i\}.$$

これら $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の木が定理 2.1 の条件を満足することは容易に証明できる． ■

グラフ G が p 個の完全独立全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_p$ を持つとき，G の各頂点にラベル付けする．頂点 v が $\deg_{T_i}(v) \geq 2$ なら v のラベルを i とする．v がすべての全域木で次数 1 ならば，v に 1 から p の中から任意のラベルを選ぶ．定理 2.1 より，頂点 v のラベルが i であることは，$j \neq i$ なら木 T_j において v の次数は必ず 1 であることを意味する．

定理 4.2 $k \geq 1$ に対し，G が k 木なら $CIST(G) \geq \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ である．

(証明) $p = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ とする．簡単のために，k は奇数と仮定する．k が偶数の場合も同様にして証明できる．

G の頂点数についての帰納法で証明する．さらに帰納法の仮定として以下を仮定する : G には p 個の完全独立全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_p$ が存在し，かつ，G の頂点へのラベル付けが、どのサイズ k のクリークでも 1 から p の各ラベルを持つ頂点が存在し、かつ同じラベルを持つ頂点が高々2 個しか存在しない．

補題 4.1 より，$CIST(K_{k+1}) = p$ が成り立つ．K_{k+1} には 1 から p の各ラベルの頂点がちょうど 2 個ずつある．さらに、$p = (k+1)/2$ なので，どのサイズ k のクリークでも，$p-1$ 種類のラベルで同じラベルの頂点が 2 個ずつあり，あるラベルで 1 個のみ頂点がある．

G を $n+1$ 頂点の k 木とする．G の次数 k の頂点 v を一つ選び，G から v を取り除いたグラフを G' とする．G' は k 木であり，v と隣接していたサイズ k のクリークの頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_k$ とする．

帰納法の仮定により，G' は p 個の完全独立全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_p$ を持つ．さらにどのラベル $x \in \{1, 2, \ldots, p\}$ に対しても，$v_1, v_2, \ldots, v_k$ にはラベル x を持つ頂点が高々2 個存在する．ここで，ある 1 個のラベル r で，ラベルが r の頂点が $v_1, v_2, \ldots, v_k$ の中に一つしか存在しない．各 G' の全域木 T_i に頂点 v を追加して G の全域木を構成する．各 $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ に対して，$v_1, v_2, \ldots, v_k$ にはラベル i の頂点が存在する．それを v_j とすると，T_i へ辺 vv_j を追加した木を G の新しい全域木 T_i とする．こうして構成した新しい全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_p$ が G の完全独立全域木であることは容易に証明できる．v はすべての全域木で次数 1 である．そこで v のラベルを r とする．

G の大きさ k のクリークは，G' と比較して v を含んだものだけが増えている．$\{v, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ から誘導されるサイズ $k+1$ のクリークには，1 から p のすべてのラベルが含まれており，かつ同じラベルの頂点がちょうど 2 個ずつある．よって G においても帰納法の仮定は満たされる．

以上より，どんな k 木も少なくとも $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ 個の完全独立全域木を持つ． ■

n 頂点の k 木の辺の数は $kn - k(k+1)/2$ であり，全域木の辺の数は $n-1$ である．したがって $CIST(G)$ の上界は

$$\left\lfloor \frac{kn - k(k+1)/2}{n-1} \right\rfloor = k - 1$$

である．定理 4.2 より，以下のことが成り立つ．

系 4.3 $k \geq 2$ に対して，G が k 木ならば $\lfloor (k+1)/2 \rfloor \leq CIST(G) \leq k-1$.

次に示すように，この上界と下界はシャープである．すなわち，任意の k に対して $CIST(G) = (k+1)/2$ である k 木，また $CIST(G) = k-1$ を満たす k 木が存在する．以下では，より強い結果を示す．

ここで $k \geq 3$ と $\lfloor (k+1)/2 \rfloor \leq p \leq k-1$ である p に対して，$2p + (p-2)(p-1)/2$ 個の頂点を持つ k 木 $G_k(p)$ を以下の様に構成する．

(1) 頂点 $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ を持つ完全グラフ K_{k+1} を作る．

(2) $k+2 \leq i \leq 2p$ に対し，v_i はクリーク $\{v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_{i-k}\}$ と隣接する．

(3) $U_j = \{u_{j,j}, u_{j,j+1}, \ldots, u_{j,p-2}\}$, $j = 1, 2, \ldots, p-2$, とし，U_j の各頂点はクリーク $\{v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{j+k-1}\}$ と隣接する．

$k = 6, p = 5$ の場合を図 1 に示す．

定理 4.4 p を $\lfloor (k+1)/2 \rfloor \leq p \leq k-1$ を満たす整数とする．このとき $CIST(G) = p$ となる k 木 G が存在する．

(証明) $CIST(G_k(p)) = p$ であることを示す．

まず $G_k(p)$ に p 個の完全独立全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_p$ を構成できることを示す．$1 \leq i \leq p$ の各 T_i 内で頂点 v_i は各 $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+p}$ の各頂点と隣接し，頂点 v_{i+p} は v_{i-1}, v_i と $v_{i+p+1}, v_{i+p+2}, \ldots, v_{2p}$ と隣接する．各 T_i と U_j において，頂点 v_i と $U_1, U_2, \ldots, U_{i-1}$

Vol.2010-AL-131 No.2
2010/9/22

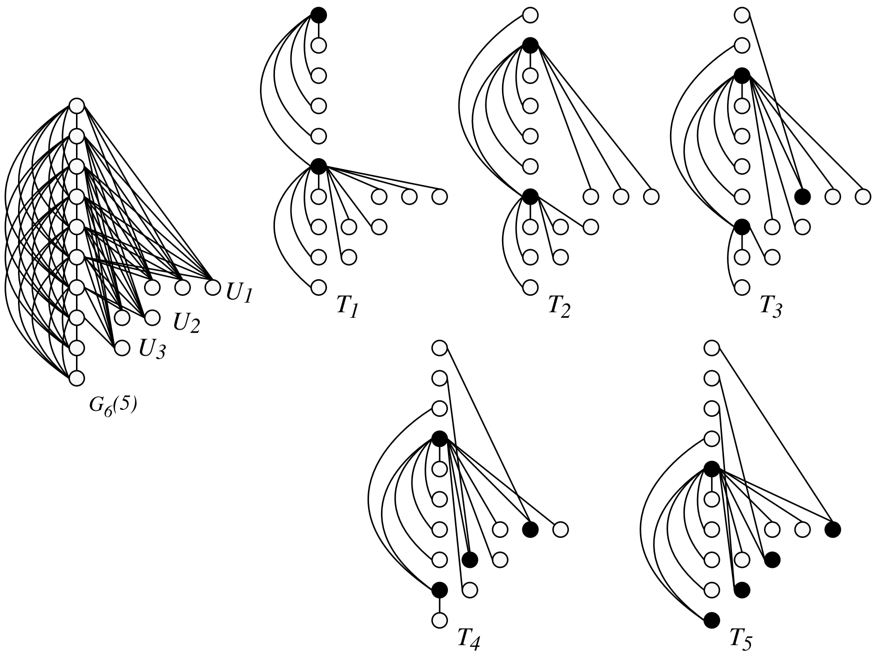

図 1　グラフ $G_6(5)$ と，5 個の完全独立全域木．黒の頂点はそれぞれの全域木で次数が 2 以上の頂点．

内の頂点が隣接し，頂点 v_{i+p} と $U_i, U_{i+1}, \ldots, U_{p-2}$ 内の頂点が隣接する．また T_i では，$v_1, v_2, \ldots, v_{i-2}$ の各頂点がそれぞれ $u_{1,i-2}, u_{2,i-2}, \ldots, u_{i-2,i-2}$ と隣接する．例として，$k = 6, p = 5$ の場合の全域木 T_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ を図 1 に示す．

以上の方法で作られた全域木 $T_1, T_2, \ldots, T_p$ が完全独立全域木であることを示す．上記の構成法から，二つの全域木が共通の辺を持たないことは容易に確かめられる．

どの頂点 v も $\deg_{T_i}(v) \geq 2$ となるグラフを 1 つしか持たないことを確かめる．各全域木 T_i において，次数が 2 以上となる頂点は v_i, v_{i+p} と，$u_{1,i-2}, u_{2,i-2}, \ldots, u_{i-2,i-2}$ である．i の範囲が $1 \leq i \leq p$ であることを考えれば，これらの頂点が重複しないことがわかる．

次に $CIST(G_k(p)) \leq p$ を示す．$G_k(p)$ に $p+1$ 個の完全独立全域木が存在したと仮定し，各頂点に 1 から $p+1$ でラベル付けする．このとき，一般性を失わずに $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2p}\}$ の $2p$ 個の頂点の中に，ラベル 1 の頂点とラベル 2 の頂点がそれぞれ 1 個ずつしかないと仮定してよい．その頂点を v, w とする．すなわち，V の中で v 以外の頂点は，木 T_1 において次数が 1 であり，w 以外の頂点は T_2 において次数が 1 である．V 以外の頂点の集合を U とすると，U 中の 2 頂点は隣接していないので，U の各頂点は T_1 において全て v と隣接している．同様に U の各頂点は T_2 において全て w と隣接している．

全域木 T_1 において w は端点であるが，w と U の頂点を結ぶ辺は全て T_2 の辺であるので，辺 vw が T_1 の辺でなければならない．同様に，全域木 T_2 において v は端点であるが，v と U の頂点を結ぶ辺は全て T_1 の辺であるので，辺 vw が T_2 の辺でなければならない．これは T_1 と T_2 が同じ辺を含まないことに矛盾する．

以上より，$CIST(G_k(p)) = p$ であることが示された．■

5. まとめ

完全独立全域木により，グラフ中に素なパスを容易に構成することができる．しかし，与えられたグラフに複数の完全独立全域木を構成する問題は一般に計算困難である．本論文では，対象のグラフをコーダルグラフに限定しても，この問題が NP 困難であることを示した．また，対象のグラフを k 木に限定して，構成可能な完全独立全域木の数について議論し，シャープな上界と下界を示すことができた．与えられた k 木に構成可能な木の最大数が多項式時間で計算可能であるかは，現在のところ未解決である．

謝辞　この研究は，科研費（基盤研究（C）21500003）の助成を受けたものである．

参考文献

1) Cheriyan, J. and Maheshwari, S.: Finding nonseparating induced cycles and independent spanning trees in 3-connected graphs, *Journal of Algorithms*, Vol.9, pp. 507–537 (1988).
2) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: *Computers and Intractability – A guide to the NP-completeness*, Freeman, San Francisco, CA (1979).
3) Hasunuma, T. and Nagamochi, H.: Independent spanning trees with small depths in iterated line digraphs, *Discrete Applied Mathematics*, Vol.110, No.2-3, pp.189–211 (2001).
4) Hasunuma, T.: Completely independent spanning trees in the underlying graph of a line digraph, *Discrete Mathematics*, Vol.234, pp.149–157 (2001).
5) Hasunuma, T.: Completely independent spanning trees in maximal planar graphs, *Proc. WG 2002*, LNCS, Vol.2573, pp.235–245 (2002).
6) Iwasaki, Y., Kajiwara, Y., Obokata, K. and Igarashi, Y.: Independent spanning trees of chordal rings, *Information Processing Letters*, Vol.69, pp.73–79 (1999).