情報処理学会論文誌　Vol. 51　No. 8　1394–1401 (Aug. 2010)

τ 法による x が大きい場合の $x\{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)\}$ の数値計算

吉　田　年　雄[†1]

本論文では，$xM_\nu^2(x)=x\{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)\}$ について，変数 x が大きい場合の能率的な計算法を提案している．ここで，$J_\nu(x)$ および $Y_\nu(x)$ はベッセル関数である．関数 $xM_\nu^2(x)$ は

$$xM_\nu^2(x)=\frac{1}{\sqrt{t}}M_\nu^2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=f_\nu(t)$$

のように書くことができ，$f_\nu(t)$ は，微分方程式

$$8t^3f_\nu'''(t)+36t^2f_\nu''(t)+\{(26-8\nu^2)t+8\}f_\nu'(t)-(4\nu^2-1)f_\nu(t)=0$$

を満足する．上式に τ 法を適用すると，$f_\nu(t)$ の近似式が求められ，式の変形や工夫を行うことより，能率的な計算式が得られる．

Computation of $x\{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)\}$ for Large Argument x by Using the τ-method

Toshio Yoshida[†1]

In this paper, we propose an efficient numerical method for $xM_\nu^2(x)=x\{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)\}$ with large argument x, where $J_\nu(x)$ and $Y_\nu(x)$ are Bessel functions. The function $xM_\nu^2(x)$ is written

$$xM_\nu^2(x)=\frac{1}{\sqrt{t}}M_\nu^2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=f_\nu(t)$$

where $f_\nu(t)$ satisfies the following differential equation.

$$8t^3f_\nu'''(t)+36t^2f_\nu''(t)+\{(26-8\nu^2)t+8\}f_\nu'(t)-(4\nu^2-1)f_\nu(t)=0$$

Applying the τ-method to the above equation, the approximation to $f_\nu(t)$ is obtained.

†1 中部大学
Chubu University

1. はじめに

次式のように，第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ と第 2 種ベッセル関数 $Y_\nu(x)$ の 2 乗和を $M_\nu^2(x)$ で表す．

$$M_\nu^2(x)=J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)$$

$M_\nu^2(x)$ は，第 1 種ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(x)$ あるいは第 2 種ハンケル関数 $H_\nu^{(2)}(x)$ を用いて，$M_\nu^2(x)=|H_\nu^{(1)}(x)|^2=|H_\nu^{(2)}(x)|^2=H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x)$ と表すこともできる．

この $M_\nu^2(x)$ に x を乗じた $xM_\nu^2(x)$ の漸近展開式は，x（>0）が大きいとき，

$$xM_\nu^2(x)\sim\frac{2}{\pi}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\mu-1}{(2x)^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{(\mu-1)(\mu-3^2)}{(2x)^4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{(\mu-1)(\mu-3^2)(\mu-5^2)}{(2x)^6}+\cdots\right\}\tag{1}$$

として与えられる[1)]．ここで，$\mu=4\nu^2$ である．上式は，ν が半整数のときには有限級数となる（したがって，厳密式となる）が，それ以外のときには発散級数となり，最適な項数で打ち切ったものでも，x が十分に大きいときを除いて数値計算には利用できない．本論文では，x（>0）が大きい場合の $xM_\nu^2(x)$ の数値計算法について述べる．次式

$$M_{-\nu}^2(x)=H_{-\nu}^{(1)}(x)H_{-\nu}^{(2)}(x)=e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(x)e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(x)=H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x)=M_\nu^2(x)$$

が成り立つので，以下，$\nu\ge0$ としても一般性を失わない．

ハンケル関数は円筒形の媒体による電磁波の散乱を記述するときによく使われ[2)]，その絶対値は動径方向の振幅を表している．

$J_\nu(x)$ と $Y_\nu(x)$ はベッセルの微分方程式

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0\tag{2}$$

を満たす．上式の任意の 2 つの解の積は次の 3 階の微分方程式

$$x^3v'''(x)+3x^2v''(x)+x(1-4\nu^2+4x^2)v'(x)+4x^2v(x)=0\tag{3}$$

を満たし，$M_\nu^2(x)$，$\{H_\nu^{(1)}(x)\}^2$ および $\{H_\nu^{(2)}(x)\}^2$ は上式の独立な解である[3)]．$M_\nu^2(x)$ に対して，次式が成り立ち，その右辺はニコルソンの積分と呼ばれている[4),5)]．

$$M_\nu^2(x)=J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)=\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty K_0(2x\sinh t)\cosh 2\nu t\,dt$$

ここで，$K_0(u)$ は第 2 種変形ベッセル関数である．

式 (3) において，$w(x)=xv(x)$ とすると，$w(x)$ は次の微分方程式

$$x^3w'''(x)+x(1-4\nu^2+4x^2)w'(x)+(4\nu^2-1)w(x)=0 \tag{4}$$

を満たす．$xM_\nu^2(x)$ は上式の解である．

以下，

$$t=\frac{1}{x^2} \tag{5}$$

とし，

$$f_\nu(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}M_\nu^2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=xM_\nu^2(x) \tag{6}$$

とおいて，$f_\nu(t)$ の数値計算法を考えることにする．

式 (4) において，x の微分を t の微分で表すことにより，$f_\nu(t)$ が満たす微分方程式

$$8t^3f_\nu'''(t)+36t^2f_\nu''(t)+\{(26-8\nu^2)t+8\}f_\nu'(t)-(4\nu^2-1)f_\nu(t)=0 \tag{7}$$

が得られる．上式の不確定特異点 $t=0$ での形式的ベキ級数解を求めるために，

$$f_\nu(t)\sim\sum_{i=0}^{\infty}a_{\nu i}t^i \tag{8}$$

を代入し，t の同じベキをまとめると，

$$a_{\nu i}=\frac{2i-1}{2i}\left\{\nu^2-\left(\frac{2i-1}{2}\right)^2\right\}a_{\nu,i-1}$$

が得られる．式 (1) より，$f_\nu(0)=2/\pi$ であるので，$a_{\nu i}$ は

$$a_{\nu 0}=2/\pi,$$
$$a_{\nu i}=\frac{2}{\pi}\frac{1\cdot3\cdots(2i-1)}{2\cdot4\cdots(2i)}\left\{\nu^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{\nu^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\cdots\left\{\nu^2-\left(\frac{2i-1}{2}\right)^2\right\} \quad (i\ge1)$$

のように決められる．このようにして，漸近展開式 (1) が得られる．

2. 計　算　法

2.1 τ　法

式 (7) に τ 法[6] を適用して，t が小さいときの $f_\nu(t)$ の近似式を求めることにする．η を適当な定数として，$0\le t\le\eta$ における近似式を得るために，式 (7) の右辺に，直交区間 $0\le t/\eta\le1$ のずらし超球多項式を τ 倍したものを付加した次の微分方程式を考える．

$$8t^3f_\nu'''(t)+36t^2f_\nu''(t)+\{(26-8\nu^2)t+8\}f_\nu'(t)-(4\nu^2-1)f_\nu(t)=\tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right) \tag{9}$$

ずらし超球多項式は

$$C_m^{*(\alpha)}(t)=\sum_{i=0}^{m}C_{mi}^{*(\alpha)}t^i=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\alpha)}\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}\Gamma(2\alpha+m+i)}{i!(m-i)!\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}+i)}t^i$$

で与えられ（$\alpha>-1/2$），$\alpha=0$ のときには，$C_m^{*(0)}(t)=\lim_{\alpha\to0}C_m^{*(\alpha)}/\alpha=2T_m^*(t)/m$，すなわち，ずらしチェビシェフ多項式に相当し，$\alpha=1/2$ のときには，ずらしルジャンドル多項式 $P_m^*(t)$ となる．

文献 7) では，τ 法による x が大きい場合のクンマー関数 $U(a,b,x)$ の数値計算を述べているが，その方法と本方法とは τ 法を使うという点で類似している．関数 $M_\nu^2(x)(=J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x))$ はクンマー関数 $U(a,b,x)$ では表されないので，その能率的な計算にはその関数固有の方法，たとえば，本論文で提案する方法が必要となる．τ 法は，クンマー関数 $U(a,b,x)$ の場合には，2 階の微分方程式に対して適用した．それに対して，本論文の $xM_\nu^2(x)$ の場合には，3 階の微分方程式に適用しており，筆者の知る限り，特殊関数の計算で，3 階の微分方程式に τ 法を適用した例はこれまでにない．

式 (9) は特解として多項式解を持つ．ここでは次の定理が役立つ．

［定理］　$c_2k(k-1)+c_4k+c_6\ne0$ のとき，次の 3 階非同次微分方程式

$$(c_1t^3+c_2t^2)F'''(t)+(c_3t^2+c_4t)F''(t)+(c_5t+c_6)F'(t)+c_7F(t)=t^k \quad (k\ge0) \tag{10}$$

は，特解

$$F(t)=-\frac{\sum_{i=0}^{k}d_it^i}{(k+1)\{c_2k(k-1)+c_4k+c_6\}d_{k+1}} \tag{11}$$

を持つ．ただし，d_i は同次微分方程式

$$(c_1t^3+c_2t^2)F'''(t)+(c_3t^2+c_4t)F''(t)+(c_5t+c_6)F'(t)+c_7F(t)=0 \tag{12}$$

の形式的級数解 $\sum_{i=0}^{\infty}d_it^i$ の係数である．

この証明は，$\sum_{i=0}^{\infty}d_it^i$ を式 (12) に代入し，t の同じベキでまとめることより，

$$c_1i(i-1)(i-2)d_i+c_2(i+1)i(i-1)d_{i+1}+c_3i(i-1)d_i+c_4(i+1)id_{i+1}$$

$$+c_5 i d_i + c_6(i+1)d_{i+1} + c_7 d_i = 0 \qquad (i=0,1,\cdots)$$

が得られ，式 (11) を式 (10) の左辺に代入し，上式を考慮することにより完了する．

上の定理より，式 (9) は，m 次多項式解

$$f_{\nu m}(t) = -\tau \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{i=0}^{k} a_{\nu i} t^i}{8(k+1)a_{\nu,k+1}\eta^k} \tag{13}$$

を持つ．$f_\nu(0)=a_{\nu 0}=2/\pi$ であるので，$f_{\nu m}(0)=2/\pi$ とすると，τ は

$$\tau = -\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{8(k+1)a_{\nu,k+1}\eta^k}} \tag{14}$$

と決められる．したがって，$f_{\nu m}(t)$ は

$$f_{\nu m}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{i=0}^{k} a_{\nu i} t^i}{(k+1)a_{\nu,k+1}\eta^k} \Bigg/ \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)a_{\nu,k+1}\eta^k} \tag{15}$$

と表される．上式は漸近展開式 (8) の k 項までの和（$k=0,1,\cdots,m$）の重みつき平均となっている．式 (14) で与えられる τ の大きさは，m を増加させると小さくなる．式 (9) において，τ が小さいならば，その式を満たす $f_{\nu m}(t)$ は，$0 \le t \le \eta$ で $f_\nu(t)$ の近似式となると考えることができるであろう．

2.2 誤差解析

$f_\nu(t)$ の近似式 $f_{\nu m}(t)$ の絶対誤差 $E_{\nu m}(t)=f_{\nu m}(t)-f_\nu(t)$ は，式 (9) より，

$$8t^3 E_{\nu m}'''(t) + 36t^2 E_{\nu m}''(t) + \{(26-8\nu^2)t+8\}E_{\nu m}'(t) - (4\nu^2-1)E_{\nu m}(t) = \delta_{\nu m}(t) \tag{16}$$

を満たす．ただし，

$$\delta_{\nu m}(t) = -\,C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right) \Bigg/ \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{8(k+1)a_{\nu,k+1}\eta^k} \tag{17}$$

である．上式 (16) の一般解は，次の 3 つの関数

$$f_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} M_\nu^2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = x M_\nu^2(x)$$

$$g_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{H_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}^2 = x\{H_\nu^{(1)}(x)\}^2$$

$$h_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{H_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}^2 = x\{H_\nu^{(2)}(x)\}^2$$

が式 (7) の独立な解であることより，定数変化法を用いて，

$$E_{\nu m}(t) = Af_\nu(t) + Bg_\nu(t) + Ch_\nu(t)$$
$$+f_\nu(t)\int_0^t \frac{\triangle_1(u)}{\triangle(u)}\delta_{\nu m}(u)du + g_\nu(t)\int_0^t \frac{\triangle_2(u)}{\triangle(u)}\delta_{\nu m}(u)du + h_\nu(t)\int_0^t \frac{\triangle_3(u)}{\triangle(u)}\delta_{\nu m}(u)du$$

と表される．ただし，A，B および C は初期条件によって決定される定数であり，

$$\triangle(t) = \begin{vmatrix} f_\nu(t) & g_\nu(t) & h_\nu(t) \\ f_\nu'(t) & g_\nu'(t) & h_\nu'(t) \\ f_\nu''(t) & g_\nu''(t) & h_\nu''(t) \end{vmatrix},$$

$$\triangle_1(t) = \begin{vmatrix} g_\nu(t) & h_\nu(t) \\ g_\nu'(t) & h_\nu'(t) \end{vmatrix}, \qquad \triangle_2(t) = -\begin{vmatrix} f_\nu(t) & h_\nu(t) \\ f_\nu'(t) & h_\nu'(t) \end{vmatrix},$$

$$\triangle_3(t) = \begin{vmatrix} f_\nu(t) & g_\nu(t) \\ f_\nu'(t) & g_\nu'(t) \end{vmatrix}$$

である．

上式における $f_\nu'(t)$ と $f_\nu''(t)$ を具体的に計算すると，

$$f_\nu'(t) = \frac{df_\nu(t)}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(xH_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x)\right)\left(-\frac{x^3}{2}\right)$$
$$= -\frac{x^3}{2}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x) - \frac{x^4}{2}H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)}(x) - \frac{x^4}{2}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)'}(x)$$

$$f_\nu''(t) = \frac{d}{dx}\left\{-\frac{x^3}{2}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x) - \frac{x^4}{2}H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)}(x) - \frac{x^4}{2}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)'}(x)\right\}\frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{3x^5}{4}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x) + \frac{5x^6}{4}H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)}(x) + \frac{5x^6}{4}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)'}(x)$$
$$+ \frac{x^7}{2}H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)'}(x) + \frac{x^7}{4}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)''}(x) + \frac{x^7}{4}H_\nu^{(1)''}(x)H_\nu^{(2)}(x)$$

となる．同様に，$g_\nu'(t)$，$g_\nu''(t)$，$h_\nu'(t)$ および $h_\nu''(t)$ は

$$g_\nu^{'}(t)=-\frac{x^3}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(x)\right\}^2-x^4H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(1)'}(x)$$
$$g_\nu^{''}(t)=\frac{3x^5}{4}\left\{H_\nu^{(1)}(x)\right\}^2+\frac{5x^6}{2}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(1)'}(x)$$
$$+\frac{x^7}{2}\left\{H_\nu^{(1)'}(x)\right\}^2+\frac{x^7}{2}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(1)''}(x)$$
$$h_\nu^{'}(t)=\frac{dh_\nu(t)}{dx}\frac{dx}{dt}=-\frac{x^3}{2}\left\{H_\nu^{(2)}(x)\right\}^2-x^4H_\nu^{(2)}(x)H_\nu^{(2)'}(x)$$
$$h_\nu^{''}(t)=\frac{3x^5}{4}\left\{H_\nu^{(2)}(x)\right\}^2+\frac{5x^6}{2}H_\nu^{(2)}(x)H_\nu^{(2)'}(x)$$
$$+\frac{x^7}{2}\left\{H_\nu^{(2)'}(x)\right\}^2+\frac{x^7}{2}H_\nu^{(2)}(x)H_\nu^{(2)''}(x)$$

となる．

したがって，$\triangle_1(t)$ は

$$\triangle_1(t)=x^5H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x)\left\{H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)}(x)-H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)'}(x)\right\}$$
$$=\frac{4x^4i}{\pi}H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)}(x)$$
$$=\frac{4i}{\pi t^2}H_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)H_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\frac{4i}{\pi t\sqrt{t}}f_\nu(t)$$

と表される．上式の { } の部分には，ロンスキアン（Lommel の公式）[8] を適用している．同様に，$\triangle_2(t)$ と $\triangle_3(t)$ は

$$\triangle_2(t)=-\frac{2x^4i}{\pi}\left\{H_\nu^{(2)}(x)\right\}^2=-\frac{2i}{\pi t^2}\left\{H_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}^2=-\frac{2i}{\pi t\sqrt{t}}h_\nu(t)$$
$$\triangle_3(t)=-\frac{2x^4i}{\pi}\left\{H_\nu^{(1)}(x)\right\}^2=-\frac{2i}{\pi t^2}\left\{H_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}^2=-\frac{2i}{\pi t\sqrt{t}}g_\nu(t)$$

と表される．$\triangle(t)$ は

$$\triangle(t)=f_\nu''(t)\triangle_1(t)+g_\nu''(t)\triangle_2(t)+h_\nu''(t)\triangle_3(t)$$

より，

$$\triangle(t)=-\frac{x^{11}i}{\pi}\left\{H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)}(x)-H_\nu^{(2)'}(x)H_\nu^{(1)}(x)\right\}^2=\frac{16x^9i}{\pi^3}=\frac{16i}{\pi^3t^4\sqrt{t}}$$

となる．したがって，

$$E_{\nu m}(t)=Af_\nu(t)+Bg_\nu(t)+Ch_\nu(t)+\frac{\pi^2}{8}\left\{2f_\nu(t)\int_0^t u^3f_\nu(u)\delta_{\nu m}(u)du\right.$$
$$\left.-g_\nu(t)\int_0^t u^3h_\nu(u)\delta_{\nu m}(u)du-h_\nu(t)\int_0^t u^3g_\nu(u)\delta_{\nu m}(u)du\right\} \tag{18}$$

が得られる．

$f_\nu(t)$，$g_\nu(t)$ および $h_\nu(t)$ は有界であるので，$t\to 0$ のとき，上式の各積分はゼロとなる．また，$t\doteqdot 0$ では，

$$f_\nu(t)\doteqdot\frac{2}{\pi},\quad g_\nu(t)\doteqdot\frac{2}{\pi}e^{(2/\sqrt{t}-\nu\pi-\pi/2)i},\quad h_\nu(t)\doteqdot\frac{2}{\pi}e^{(-2/\sqrt{t}+\nu\pi+\pi/2)i} \tag{19}$$

であるので，初期条件

$$\lim_{t\to 0}E_{\nu m}(t)=0$$

が満たされるためには，

$$A=B=C=0$$

でなければならない．それで，絶対誤差は

$$E_{\nu m}(t)=\frac{\pi^2}{8}\int_0^t u^3\{2f_\nu(t)f_\nu(u)-g_\nu(t)h_\nu(u)-h_\nu(t)g_\nu(u)\}\delta_{\nu m}(u)du \tag{20}$$

と表される．上式において，被積分関数の $\delta_{\nu m}(u)$ を除いた部分は有界であり，文献 7) に述べたように，$m\to\infty$ のとき，$\delta_{\nu m}(u)$ は，$0\le u\le t$（$\le\eta$）で 0 に一様収束するので，$E_{\nu m}(t)\to 0$ となる．このことは，数値実験の結果，すなわち，いろいろな値の ν，t および η に対して，m を大きくすると，計算機の有効桁の範囲で $f_{\nu m}(t)$ は $f_\nu(t)$ に近づいていくことより確かめられる．

3. α の選定

$f_{\nu m}(t)$ の誤差 $E_{\nu m}(t)$ の表示式 (20) は $\delta_{\nu m}(u)$ を含む，したがって，誤差は α に依存する．論文 7)，9) の場合には，$t=\eta$ における誤差が $\alpha=1/2$ のときに最も小さくなる（その点では，$\alpha=1/2$ のときが，$\alpha=0$ のときと比べて 2 桁程度精度が良い）ことを述べている．しかし，本論文の関数に対しては，そのようにならないことが数値実験より分かった．これは，式 (19) より，式 (20) の $h_\nu(u)$ と $g_\nu(u)$ は振動関数（多項式で近似されにくい関数）であるためと考えられる．誤差を最小にする最適な α は存在しないので，α はどんな値に選んでもかまわないが，ここでは $\alpha=0$ とすることにする．

4. 計　算　式

$\nu=1/2,\ 3/2,\ \cdots,\ (2i-1)/2$（$i\ge 1$）のときには，$a_{\nu i}=0$ であるので，式 (15) の分子と分母において，零での除算があり，不都合が生ずる．そこで，以後，式 (15) の分子，分母に $a_{\nu,m+1}$ を乗じた次式を扱うことにする．

$$f_{\nu m}(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(0)}r_{\nu,k+1}\sum_{i=0}^{k}a_{\nu i}t^i}{(k+1)\eta^k}\Bigg/\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(0)}r_{\nu,k+1}}{(k+1)\eta^k}\tag{21}$$

ここで，$r_{\nu i}$（$0\le i\le m+1$）は

$$r_{\nu i}=\frac{a_{\nu,m+1}}{a_{\nu i}}$$

であり，具体的には，

$$r_{\nu i}=\frac{(2i+1)(2i+3)\cdots(2m+1)}{(2i+2)(2i+4)\cdots(2m+2)}\cdot\left\{\nu^2-\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2\right\}\left\{\nu^2-\left(\frac{2i+3}{2}\right)^2\right\}\cdots\left\{\nu^2-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right\}\quad(0\le i\le m)$$

$$r_{\nu,m+1}=1$$

と表される．

式 (21) は，η を適当に決めたとき，$0\le t\le\eta$（$x\ge 1/\sqrt{\eta}$）での近似式である．m を固定したとき，この区間での近似式の相対誤差は，その符号が変わるところを除いてほぼ同程度となっていることが確かめられる．ただし，この式の計算では桁落ちが生ずる．この桁落ちは，t が大きいほど，あるいは，ν が大きいほど（ν が半整数の近くを除いて）大きい．式 (21) を

$$f_{\nu m}(t)=\sum_{i=0}^{m}t^i a_{\nu i}\sum_{k=i}^{m}\frac{C_{m,k}^{*(0)}r_{\nu,k+1}}{(k+1)\eta^k}\Bigg/\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(0)}r_{\nu,k+1}}{(k+1)\eta^k}\tag{22}$$

と変形しても桁落ちの軽減にはならない．上式を用いて $f_\nu(t)$ を計算する場合（多少の桁落ちには目をつむる場合）には，分子の k についての和の値（$m+1$ 個）と分母の k についての和の値（1 個）を一時的に記憶しておくとよい．そうすれば，続けて $f_\nu(t)$ を計算するとき，ν，m および η が，それぞれ直前の値と同じ場合には，それらを用いて能率的に計算できる．

ここで，桁落ちが少なく，しかも能率的な計算法を提案することにしよう．式 (21) において，t を η とおく．その式において，η は任意の値をとることができるので，あらためて，その η を t とすれば，

$$f_{\nu m}(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(0)}r_{\nu,k+1}\sum_{i=0}^{k}a_{\nu i}t^i}{(k+1)t^k}\Bigg/\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(0)}r_{\nu,k+1}}{(k+1)t^k}$$

となる．上式の分子，分母に t^m を乗じ，t の同じベキでまとめれば，

$$\begin{aligned}f_{\nu m}(t)&=\sum_{i=0}^{m}t^i\sum_{k=0}^{i}\frac{C_{m,m-i+k}^{*(0)}a_{\nu k}r_{\nu,m+1-i+k}}{m+1-i+k}\Bigg/\sum_{i=0}^{m}t^i\frac{C_{m,m-i}^{*(0)}r_{\nu,m+1-i}}{m+1-i}\\&=\sum_{i=0}^{m}t^i\sum_{k=0}^{i}\frac{C_{m,m-k}^{*(0)}a_{\nu,i-k}r_{\nu,m+1-k}}{m+1-k}\Bigg/\sum_{i=0}^{m}t^i\frac{C_{m,m-i}^{*(0)}r_{\nu,m+1-i}}{m+1-i}\end{aligned}\tag{23}$$

が得られる．以下での式の変形において，見通しを良くするために，上式を次式のように書き換える．

$$f_{\nu m}(t)=\sum_{i=0}^{m}G_i(m,\nu)t^i\Bigg/\sum_{i=0}^{m}H_i(m,\nu)t^i\tag{24}$$

ただし，

$$G_i(m,\nu)=\sum_{k=0}^{i}\frac{C_{m,m-k}^{*(0)}a_{\nu,i-k}r_{\nu,m+1-k}}{m+1-k}$$

$$H_i(m,\nu)=\frac{C_{m,m-i}^{*(0)}r_{\nu,m+1-i}}{m+1-i}$$

である．

まず，$G_i(m,\nu)$ に注目しよう．$G_i(m,\nu)$ は次のように書くことができる．

$$G_i(m,\nu)=\sum_{k=0}^{i}\frac{C_{m,m-k}^{*(0)}h_{i-k}^{(1)}R_{i-k}^{(1)}h_k^{(2)}R_k^{(2)}}{m+1-k}\tag{25}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
&h_0^{(1)}=\frac{2}{\pi} && h_k^{(1)}=\frac{2}{\pi}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)} \quad (k\ge 1)\\
&h_0^{(2)}=1 && h_k^{(2)}=\frac{(2m+3-2k)(2m+5-2k)\cdots(2m+1)}{(2m+4-2k)(2m+6-2k)\cdots(2m+2)} \quad (k\ge 1)\\
&R_0^{(1)}=1 && R_k^{(1)}=\prod_{l=0}^{k-1}\left\{\nu^2-\left(\frac{2l+1}{2}\right)^2\right\} \quad (k\ge 1)\\
&R_0^{(2)}=1 && R_k^{(2)}=\prod_{l=0}^{k-1}\left\{\nu^2-\left(\frac{2m-2l+1}{2}\right)^2\right\} \quad (k\ge 1)
\end{aligned} \tag{26}$$

である．上式 (25) の $G_i(m,\nu)$ において，$R_{i-k}^{(1)}$ は ν^2 の $i-k$ 次式であり，$R_k^{(2)}$ は ν^2 の k 次式であるので，積 $R_{i-k}^{(1)}R_k^{(2)}$ は ν^2 の i 次式である．それで，$G_i(m,\nu)$ は

$$G_i(m,\nu)=\sum_{j=0}^{i} b_{ij}\nu^{2j} \tag{27}$$

の形として表すことができる．上式の係数 b_{ij}（m のみに依存する）は次式により計算することができる．

$$b_{ij}=\sum_{l=0}^{j}\sum_{k=j-l}^{i-l}\frac{C_{m,m-k}^{*(0)}h_{i-k}^{(1)}p_{i-k,l}h_k^{(2)}q_{k,j-l}}{m+1-k} \tag{28}$$

ただし，p_{kl} および q_{kl}（$2\le k\le m$）は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
&p_{00}=1 && p_{10}=-\left(\frac{1}{2}\right)^2 && p_{11}=1\\
&q_{00}=1 && q_{10}=-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 && q_{11}=1
\end{aligned}$$

を初期値として，次の漸化式により求めることができる．

$$\begin{aligned}
&p_{k0}=-\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 p_{k-1,0}\\
&p_{kl}=p_{k-1,l-1}-\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 p_{k-1,l} \quad (1\le l\le k-1)\\
&p_{kk}=p_{k-1,k-1}(=1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&q_{k0}=-\left(\frac{2m-2k+3}{2}\right)^2 q_{k-1,0}\\
&q_{kl}=q_{k-1,l-1}-\left(\frac{2m-2k+3}{2}\right)^2 q_{k-1,l} \quad (1\le l\le k-1)\\
&q_{kk}=q_{k-1,k-1}(=1)
\end{aligned}$$

次に，$H_i(m,\nu)$ に注目する．式 (26) を用いると，

$$\begin{aligned}
H_i(m,\nu)&=\frac{C_{m,m-i}^{*(0)}h_i^{(2)}R_i^{(2)}}{m+1-i}\\
&=c_iR_i^{(2)}
\end{aligned} \tag{29}$$

と表される．ただし，

$$c_i=\frac{C_{m,m-i}^{*(0)}h_i^{(2)}}{m+1-i} \tag{30}$$

である（c_i も m のみに依存する）．

したがって，式 (24)，(27) および (29) より，$f_\nu(t)$ の計算式

$$f_{\nu m}(t)=\sum_{i=0}^{m}t^i\sum_{j=0}^{i}b_{ij}\nu^{2j}\Bigg/\sum_{i=0}^{m}t^ic_iR_i^{(2)} \tag{31}$$

が得られる．それで，$xM_\nu^2(x)$ の計算式は

$$xM_{\nu m}^2(x)=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{x^{2i}}\sum_{j=0}^{i}b_{ij}\nu^{2j}\Bigg/\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{x^{2i}}c_iR_i^{(2)} \tag{32}$$

として与えられる．上式において，b_{ij}（$i=0,\cdots,m\,;\,j=0,\cdots,i$）は式 (28) により定義されるが，その右辺の計算では，桁落ちが生ずる．倍精度用のプログラムを作成するときには，決められた m に対して，あらかじめ式 (28) の右辺の計算を 4 倍精度で行って倍精度に丸めたものを係数 b_{ij}（$i=0,\cdots,m\,;\,j=0,\cdots,i$）の数表として用意しておくとよい．そうすれば，上式は桁落ちの少ない，能率的な計算式となる．なお，式 (30) の c_i の計算では桁落ちはないが，丸め誤差を少なくするために同様にするとよい．

5. 計算式の次数 m の決定について

倍精度で $xM_\nu^2(x)$ を求めるための計算式 (32) の次数 m の決め方について述べる．この式の相対精度 $\epsilon_{\nu m}(x)=(xM_{\nu m}^2(x)-xM_\nu^2(x))/(xM_\nu^2(x))$ について調べると，ν と m を

表 1　計算式の次数 m
Table 1　m of Approximation Eq. (32).

	$5 \le x < 8$	$8 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 50$	$x \ge 50$
$0 \le \nu \le 5$	25	20	15	10	10	6
$5 < \nu \le 10$	30	25	20	15	10	10
$10 < \nu \le 15$	39	25	25	20	15	10

固定したとき，x が大きくなると，計算式の精度 $\epsilon_{\nu m}(x)$ は高くなり，ν と x を固定したとき，m を増すと，精度 $\epsilon_{\nu m}(x)$ は高くなることが分かった．また，$xM_\nu^2(x)$ を一定の要求精度（ここでは倍精度）で求めるためには，x を固定したとき，ν が大きいほど（ν が半整数のときを除いて），m を大きくする必要があることが分かった．

倍精度（相対精度：10^{-16}）で $xM_\nu^2(x)$ を求める場合，与えられた ν と x に対して，$|\epsilon_{\nu m}(x)| < 10^{-16}$ を満たす最小の m は決まる．その m に対して，一式の係数 b_{ij}（$i = 0,\cdots,m\,;\, j=0,\cdots,i$）と c_i（$i=0,\cdots,m$）は定数として決まる．

本論文で述べる計算法は，$x \ge 5$ かつ $0 \le \nu \le 15$ の範囲に限定することにする．そのとき，$x \le 50$ では，$6 \le m \le 39$ であることが分かったが，このすべての m について，プログラム中に，係数 b_{ij} を与えると，数表が膨大になるので，その一部を与えることにする．いろいろな x，ν の値に対して，式 (32) の精度を調べた結果として，$m = 6$，10，15，20，25，30，39 の場合のみの係数 b_{ij}（$i = 0,\cdots,m\,;\, j = 0,\cdots,i$）を与えて，**表 1** のように m の値を選ぶとよいことが分かった．

また，続けて同じ値の ν に対して，$xM_\nu^2(x)$ の値を能率的に計算できるようにするために，式 (32) の $\sum_{j=0}^{i} b_{ij}\nu^{2j}$ と $c_iR_i^{(2)}$（$i = 0, 1,\cdots,m$）の $2m+2$ 個の計算値を一時的に記憶しておくとよい．なぜならば，続けて行う計算において，m と ν が，それぞれ，直前の値と同じならば，それらの値を求めるための計算が省略できるからである．

次に，$xM_\nu^2(x)$ の計算プログラム作成の参考のため，係数 b_{ij} を計算するための FORTRAN プログラムを示しておく．$f_\nu(t)$ の計算プログラム（たとえば，C 言語あるいは FORTRAN）では，以下の FORTRAN プログラムで計算された b(i,j) と c(i) の 4 倍精度数値を倍精度に丸めたものを数表にして使用すればよい．

```
      subroutine coeff(m,b,c)
      implicit real*16(a-h,o-z)
      dimension p(0:50,0:50),q(0:50,0:50),cc(0:50),c(0:50),b(0:50,0:50)
      data p(0,0),p(1,0),p(1,1)/1.0q0,-0.25q0,1.0q0/
      data q(0,0),q(1,1)/1.0q0,1.0q0/
      do 110 k=2,m
       p(k,0)=-qfloat(k+k-1)**2*0.25q0*p(k-1,0)
       p(k,k)=1.0q0
       q(k,k)=1.0q0
       do 100 l=1,k-1
        p(k,l)=-qfloat(k+k-1)**2*0.25q0*p(k-1,l)+p(k-1,l-1)
100    continue
110   continue
      q(1,0)=-qfloat(m+m+1)**2*0.25q0
      do 210 k=2,m
       q(k,0)=-qfloat(m+m-k-k+3)**2*0.25q0*q(k-1,0)
       do 200 l=1,k-1
        q(k,l)=-qfloat(m+m-k-k+3)**2*0.25q0*q(k-1,l)+q(k-1,l-1)
200    continue
210   continue
      am=m
      cc(0)=1.0q0
      do 230 k=1,m+1
       ak=k
       cc(k)=-cc(k-1)*(am+ak-1.0q0)*(am-ak+1.0q0)/(ak*(ak-0.5q0))
230   continue
      do 360 i=0,m
       do 330 j=0,i
        s=0.0q0
        do 310 l=0,j
         do 300 k=j-l,i-l
          s=p(i-k,l)*df1(i-k)*q(k,j-l)*df2(k,m)*cc(m-k)/qfloat(m+1-k)+s
300      continue
310     continue
        b(i,j)=s
330    continue
360   continue
      do 400 i=0,m
       c(i)=df2(i,m)*cc(m-i)/qfloat(m+1-i)
```

```
 400 continue
     return
     end
c
     real*16 function df1(k)
     implicit real*16(a-h,o-z)
     df1=0.5q0/qatan(1.0q0)
     if(k.eq.0) then
      return
     else
      do 100 i=1,k
       df1=df1*qfloat(i+i-1)/qfloat(i+i)
 100  continue
      return
     endif
     end
c
     real*16 function df2(k,m)
     implicit real*16(a-h,o-z)
     df2=1.0q0
     if(k.eq.0) then
      return
     else
      do 100 i=1,k
       df2=df2*dfloat(m+m+3-i-i)/qfloat(m+m+4-i-i)
 100  continue
      return
     endif
     end
```

6. おわりに

本論文では，x が大きい場合の $xM_\nu^2(x)=x\{J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)\}$ の能率的な計算法を述べた．この計算法は，続けて行う場合に，ν と m が，それぞれ，直前の値と同じならば，途中の計算を省略することができるので非常に能率的である．

また，x が小さい（$x<5$）場合の $xM_\nu^2(x)$ の計算については述べなかった．その場合には，漸化式を用いる $J_\nu(x)$ の計算法[10] と x が小さい場合の $Y_\nu(x)$ の計算法[11] を個別に用いて，それらの関数値を求める必要があり，それぞれの関数値の 2 乗和をとることになる．

参考文献

1) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p.365, Dover Publications (1972).
2) Stratton, J.A.: *Electromagnetic Theory*, p.360, McGraw-Hill Book Company (1941).
3) Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R.: *Special Functions*, pp.223–225, Cambridge University Press (1999).
4) Watson, G.N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edition, pp.441–449, Cambridge University Press (1966).
5) Wilkins, J.E.: Nicholson's Integral for $J_\nu^2(z)+Y_\nu^2(z)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol.54, pp.232–234 (1948).
6) Lanczos, C.: *Applied Analysis*, pp.464–507, Prentice-Hall (1956).
7) 吉田年雄：τ 法による x が大きい場合のクンマー関数 $U(a,b,x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.36, No.10, pp.2335–2342 (1995).
8) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信：数学公式 III，p.160, 岩波書店 (1986).
9) 吉田年雄，二宮市三：x が大きい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu,x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.25, No.2, pp.306–312 (1984).
10) 二宮市三：漸化式によるベッセル関数の計算，電子計算機のための数値計算法 II, pp.110–114, 培風館 (1965).
11) 吉田年雄，二宮市三：x が小さい場合のベッセル関数 $Y_\nu(x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.23, No.3, pp.296–303 (1982).

(平成 21 年 12 月 1 日受付)
(平成 22 年 5 月 6 日採録)

吉田　年雄（正会員）

昭和 19 年生．昭和 43 年慶應義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 48 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程単位取得満期退学．同年より名古屋大学助手．昭和 60 年より名古屋大学講師．昭和 61 年より中部大学助教授．平成 2 年より同教授．平成 17 年より中部大学情報科学研究所長．