

## 配当成長率に関する投資家の推測を 考慮したオプション評価モデル

田中 健太郎<sup>†1</sup> 宮崎 浩一<sup>†1</sup> 錦 康二<sup>†1</sup>

配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルに基づくオプション評価の先行研究では、オプション価格が満たすべき偏微分方程式を導出する手法を採用している。この手法は数学的に洗練されているが、配当成長率に関する投資家の推測に関するモデルのパラメータがどのような形でオプション価格に影響をおよぼすのかが直感的理解が得にくい。また、複雑なペイオフを持つオプションの評価に柔軟に対応することが困難である。本研究では、シミュレーションに基づくオプション評価モデルを提案し、数値実験に基づいてモデルのパラメータがどのようなメカニズムによってボラティリティスマイルやスキューを生成するかについて検討する。

### An Option Valuation Model Based on an Asset Pricing Model Incorporating Investors' Beliefs

KENTARO TANAKA,<sup>†1</sup> KOICHI MIYAZAKI<sup>†1</sup>  
and KOJI NISHIKI<sup>†1</sup>

Preceding researches for an option valuation model based on an asset pricing model incorporating investors' beliefs on a drift of dividend process adopt an approach to derive the partial differential equation that the option price should satisfy. Though the approach is mathematically elegant, it is quite difficult for us to intuitively capture how parameters related to the beliefs affect to the option pricing and also to evaluate complex options. In this research, we propose the option valuation model based on a simulation approach and discuss the mechanism that the parameters generate volatility smile based on numerical experiments.

<sup>†1</sup> 電気通信大学システム工学科

Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications

### 1. はじめに

オプションとは、満期日において原資産（株式等）を取り決めた価格（権利行使価格）で買う（コール・オプション）または売る（プット・オプション）ことができる権利である。著名なオプション評価モデルとして、Black-Scholes モデル<sup>1)</sup>（以下 BS モデル）がある。BS モデルでは株価収益率がウィナー過程（拡散項（ボラティリティ）は定数）に従うことを仮定している。しかし、現実のオプション市場価格を BS モデル価格に一致するようにボラティリティを逆算すると（逆算された値をインプライド・ボラティリティ（IV）と呼ぶ）、権利行使価格が現在の株価から乖離したオプションほど IV が大きくなる（この現象はスマイルと呼ばれる）ため、BS モデルでは現実のオプション市場価格をとらえることができない。

このためオプションに関する研究は、オプション市場価格と整合的なオプション評価モデルの構築を目標に BS モデルから発展をとげてきた。株価自体が従う確率過程をより柔軟なものへと発展させる方向性として、ボラティリティを時間と原資産の関数として与えるデータミニステック・ボラティリティモデル（Dupire (1994)<sup>2)</sup>, Rubinstein (1994)<sup>3)</sup>, Dermanら (1994)<sup>4)</sup> 等）、ボラティリティの確率的な変動をモデル化した確率ボラティリティモデル（Heston (1993)<sup>5)</sup>, Britten-Jones ら (2000)<sup>6)</sup> 等）、株価が従う確率過程にジャンプを組み込んだジャンプ拡散モデル（Merton (1976)<sup>7)</sup>, Naik ら (1990)<sup>8)</sup> 等）がある。実務においては、このような株価自体が従う確率過程を柔軟に発展させたモデルが利用されている。

その一方で、最適な消費と投資を行う代表的個人を考え、代表的個人が生涯における消費の期待効用を最大化するといった設定の下で均衡状態における証券価格を導くといったミクロ経済学に基礎をおく資産評価モデルにおいても、株価プロセスを柔軟に表現できるようにモデルが発展してきた（Wang (1993)<sup>9)</sup>, Zapatero (1998)<sup>10)</sup>, Veronesi (2000)<sup>11)</sup> 等）。本研究では、配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルである Veronesi (2000) に焦点を当てる。古典的な資産評価モデルでは配当が従う確率過程のドリフトは一定であると仮定している。これに対して、投資家にとってドリフトがとりうる状態は既知であるが、各時刻においてどの状態をとっているかについては知りえず、ノイズが含まれたシグナルを観測することが可能との設定の下での資産評価モデルが、配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルである。

この配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルに基づいてオプション評価モデルを提案したものに、David ら (2002)<sup>12)</sup>, Li (2007)<sup>13)</sup> 等がある。これらのモデルは、いずれもオプション価格が満たすべき偏微分方程式を導き、それをフーリエ変換によ

て解くアプローチを採用している。これらの手法は数学的に洗練されているが、その反面、配当成長率に関する投資家の推測に関するモデルのパラメータがどのような形でオプション価格に影響をおよぼすのか直感的理解が得にくい。また、複雑なペイオフを持つオプションの評価に柔軟に対応することが困難である。

そこで本研究では、シミュレーションに基づくオプション評価モデルを提案する。また、提案手法を利用した数値実験に基づいて、配当成長率に関する投資家の推測に関するモデルのパラメータがどのようなメカニズムによってスマイルのようなIVの形状に影響を与えるかについて詳細に検討する。このようなメカニズムが把握できたなら、将来的にデータの蓄積・整備を待って、配当成長率に関する投資家の推測とスマイルやスキューといったIVの形状に関する精度の高い対応関係を計量することができる。そのときには、オプション市場において見られるスマイルやスキューといったIVの形状から、配当成長率に関する投資家の推測、いい換えると、市場参加者の企業収益（配当はここから支払われる）に対する先行きの見通しを把握することができる。つまり、本研究には、オプション市場から得られる情報を金融政策や財政政策を出動するタイミングを決定する際に役立つ情報へと橋渡しするための枠組みを提案したうえで、単純な数値実験を通してその仕組みを確かめた点に社会的貢献性がある。

本論文の構成は以下のとおり。次章では、投資家の推測を考慮した資産評価モデルについて述べる。3章では、本研究のシミュレーションに基づくオプション評価モデルについて述べ、4章では、実験結果とその考察を与える。最終章では、まとめと結語を付す。

## 2. 配当成長に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデル

ここでは、配当成長に関する投資家の推測を考慮した資産価格評価モデルの概略を紹介する。詳しくは、Veronesi (2000)<sup>1)</sup>を参照されたい。

### 2.1 モデルの枠組み

最適な消費と投資を行う代表的個人を考え、代表的個人が式(1)のように生涯における消費の期待効用を最大化するものとする。

$$E \left[ \int_t^\infty u(c, s) ds \right] \quad (1)$$

ここで、 $u(c, t)$ は投資家の効用関数、 $c$ は消費、 $t$ は時点を表す。また、取引は自己資金充足であること等の実行可能条件を満たすものとする。この経済における均衡は、予算と実行可能条件の下で式(1)の期待効用を最大化するような最適制御問題の解として与えられ、

均衡において代表的個人は、企業の発行する全配当  $D(t)$  を瞬時に消費財  $c$  に換えて消費する。均衡における証券の価格はオイラー方程式(2)で与えられる。

$$P(t) = \frac{E \left( \int_t^\infty u_c(D(s), s) D(s) ds | F(t) \right)}{u_c(D(t), t)} \quad (2)$$

ここで  $F(t)$  は、時点  $t$  における投資家の持つ情報のセット、 $u_c(D(t), t)$  は効用関数  $u(c, t)$  を  $c$  に関して微分し、 $c = D(t)$  とおいたものである。式(2)は、現在の証券価格が、現在時刻  $t$  以降の将来の時刻  $s$  において支払われる配当  $D(s)$  を限界代替率  $u_c(D(s), s)/u_c(D(t), t)$  によって現在まで割り引いたものの総和に関する期待値として与えられることを表している。

投資家の効用関数として、式(3)の定数相対リスク回避型効用関数を導入する。

$$u(c, t) = e^{-\phi t} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (3)$$

ここで、 $\gamma$  は投資家のリスク回避度、 $\phi$  は割引率を表し、投資家の効用は消費に関して、連続で微分可能であり、厳密に増加を満たすものとする。効用関数として、式(3)の定数相対リスク回避型のもの採用すれば、式(2)の証券価格  $P(t)$  を式(4)のように具体的に与えることができる。

$$\frac{P(t)}{D(t)} = E \left[ \int_t^\infty \exp(-\phi(s-t)) \left( \frac{D(s)}{D(t)} \right)^{1-\gamma} ds | F(t) \right] \quad (4)$$

式(4)において、配当  $D$  は、式(5)のような確率過程に従うものと仮定する。

$$dD = \theta(t)Ddt + \sigma_D DdW_D \quad (5)$$

ここで、 $\theta(t)$  は真の配当成長率、 $\sigma_D$  は配当のボラティリティ、 $W_D$  は標準ブラウン運動を表す。配当成長率  $\theta(t)$  は、通常、投資家には既知であるとしてモデル化されている。Veronesi (2000)<sup>1)</sup>では、投資家にとって既知なのは、配当成長率  $\theta(t)$  がとりうる状態  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  のみであり、各時点  $t$  において配当成長率  $\theta(t)$  がとる状態については未知としている。この設定の下で、投資家は、式(6)で与えられるような配当成長率  $\theta(t)$  にノイズが加わったシグナル  $e$  を観測する。

$$de = \theta(t) dt + \sigma_e dW_e \quad (6)$$

ここで、 $\sigma_e$  は拡散係数、 $W_e$  は  $W_D$  とは独立 ( $dW_D dW_e = 0$ ) な標準ブラウン運動である。拡散係数  $\sigma_e$  はシグナルの精度を反映しており、小さければ成長率  $\theta(t)$  に関する正確なシグナルを受け取ることになる。

## 2.2 投資家の推測のプロセス

本研究において投資家の推測  $\pi_i(t)$  とは、式 (7) で表現されるような、時点  $t$  における株式の配当成長率が  $\theta(t) = \theta_i$  である確率を表す。ここで  $i$  は投資家が想定する配当成長率を識別するものであり、 $n$  通りの配当成長率  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  を想定している。 $\theta(t)$  は時点  $t$  において  $\Theta$  のいずれかの状態をとるので、 $\sum_{i=1}^n \pi_i(t) = 1$  である。投資家によって配当成長率に対する予想が大きく異なる場合には、配当成長率がとりうる値  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  自体が様々に設定されており、かつ、これらの状態に対する確率分布  $\pi_i(t)$  のばらつきが大きいときである。逆に、多くの投資家が同じ考えを持っている場合には、投資家が推測する配当成長率の状態は 1 つに収斂する。このモデルの興味深い点は、投資家の推測  $\pi_i(t)$  自体が配当成長率  $\theta_i$  をとる確率だが、この確率  $\pi_i(t)$  が式 (8) の確率過程に従って時間とともに変化し、初期時点を除けば時刻に応じた確率分布として与えられる点である。この確率過程は、Veronesi (2000) が Liptser ら (1977)<sup>14)</sup> を参照して導出している。

$$\pi_i(t) = \text{prob}(\theta(t) = \theta_i | F(t)) \quad (7)$$

$$d\pi_i(t) = \left[ p(f_i - \pi_i(t)) + \left( \frac{1}{\sigma_D^2} + \frac{1}{\sigma_e^2} \right) \pi_i(t) (\theta_i - m_\theta(t)) (\theta(t) - m_\theta(t)) \right] dt + \pi_i(t) (\theta_i - m_\theta(t)) \left( \frac{1}{\sigma_D} dW_D + \frac{1}{\sigma_e} dW_e \right) \quad (8)$$

ここで、 $p$  は回帰スピード、 $f_i$  は投資家の推測  $\pi_i$  の定常状態における分布の期待値、 $m_\theta$  は式 (9) で表される投資家の期待配当成長率を表す。

$$m_\theta(t) = E(\theta(t) | F(t)) = \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \theta_i \quad (9)$$

次に、式 (10) で与えられるブラウン運動を用いて式 (5) の配当の確率過程を式 (11) のように表現し直す。

$$\begin{aligned} d\tilde{W}_D &= \frac{1}{\sigma_D} \left( \frac{dD}{D} - m_\theta(t) dt \right) \\ &= \frac{(\theta(t) - m_\theta(t))}{\sigma_D} dt + dW_D \end{aligned} \quad (10)$$

$$dD = m_\theta(t) D dt + \sigma_D D d\tilde{W}_D \quad (11)$$

式 (10) と同様にシグナル  $e$  のブラウン運動も  $d\tilde{W}_e = \frac{1}{\sigma_e} (de - m_\theta(t) dt)$  を用いて、投資家の推測の過程式 (8) を式 (12) のように表現し直すことができる。

$$d\pi_i(t) = p(f_i - \pi_i(t)) dt + \pi_i(t) (\theta_i - m_\theta(t)) \left( \frac{1}{\sigma_D} d\tilde{W}_D + \frac{1}{\sigma_e} d\tilde{W}_e \right) \quad (12)$$

ここで、 $d\tilde{W}_D$  と  $d\tilde{W}_e$  には一見するとドリフト項があるが、式 (9) よりその期待値は 0 であり、 $dW_D$  や  $dW_e$  と同様に標準ブラウン運動に従うものと見なすことができる。

## 2.3 投資家の推測を考慮した資産評価モデル

Veronesi (2000) では、投資家の推測を考慮した株価  $P(t)$  を式 (13) のように配当  $D(t)$  と株価配当率  $\sum_{i=1}^n \pi_i(t) C_i$  との積の形で表現している。

$$P(t) = D(t) \left( \sum_{i=1}^n \pi_i(t) C_i \right) \quad (13)$$

ここで  $C_i$  は、式 (4) の配当成長率が  $\theta(t) = \theta_i$  である場合の期待値を表し、式 (14) で表される。式 (14) を計算すると式 (15) が得られる。

$$C_i = E \left[ \int_t^\infty \exp(-\phi(s-t)) \left( \frac{D(s)}{D(t)} \right)^{1-\gamma} ds | \theta(t) = \theta_i \right] \quad (14)$$

$$C_i = \frac{1}{(\phi + p + (\gamma - 1)\theta_i + 0.5\gamma(\gamma - 1)\sigma_D^2)(1 - pH)} \quad (15)$$

ここで、 $H$  は式 (16) で表される定数である。

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{f_j}{(\phi + p + (\gamma - 1)\theta_j + 0.5\gamma(\gamma - 1)\sigma_D^2)} \quad (16)$$

式 (15)、式 (16) から、 $C_i$  は、割引率  $\phi$ 、回帰スピード  $p$ 、配当成長率  $\theta_i$ 、リスク回避度  $\gamma$ 、配当の標準偏差  $\sigma_D$ 、投資家の推測  $\pi_i$  の定常状態における分布の期待値  $f_i$  の関数であることが分かる。

株価収益率が従う確率過程は、式 (13) に伊藤公式を適用し式 (17) となる。

$$\begin{aligned} dP(t) &= \left( \sum_{i=1}^n \pi_i(t) C_i \right) dD(t) + \left( \sum_{i=1}^n d\pi_i(t) C_i \right) D(t) + \sum_{i=1}^n C_i (d\pi_i(t) dD(t)) \\ &= P \mu_p dt + P \sigma_D d\tilde{W}_D + D \sum_{i=1}^n C_i \pi_i (\theta_i - m_\theta) \left( \frac{1}{\sigma_D} d\tilde{W}_D + \frac{1}{\sigma_e} d\tilde{W}_e \right) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、株価収益率のドリフト  $\mu_p$  とボラティリティ  $\sigma_p$  は、それぞれ式 (18)、式 (19) で表現される。

$$\mu_p = \left( m_\theta + \frac{D}{P} \sum_{i=1}^n C_i (f_i - \pi_i) + \frac{D}{P} \sum_{i=1}^n C_i \pi_i (\theta_i - m_\theta) \right) \quad (18)$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_D^2 + V_\theta \left[ 2 + V_\theta \left( \frac{1}{\sigma_D^2} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \right) \right]} \quad (19)$$

式 (19) の  $V_\theta$  は、式 (20) で与えられる。

$$V_\theta = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_i C_i (\theta_i - m_\theta)}{\sum_{j=1}^n \pi_j C_j} \quad (20)$$

### 3. 本研究のオプション評価モデル

#### 3.1 オプション評価モデル

本章では、Veronesi (2000)<sup>11)</sup> にある投資家の推測を考慮した株価モデルを用いたオプション評価モデルを提案する。

まず、式 (4) の両辺に  $D(t)$  を乗じて式 (21) を得る。

$$P(t) = E \left[ \int_t^\infty \exp(-\phi(s-t)) \left( \frac{D(s)}{D(t)} \right)^{-\gamma} D(s) ds | F(t) \right] \quad (21)$$

式 (21) は、各時点  $s$  に発生するペイオフ  $D(s)$  を現時点  $t$  まで  $\exp(-\phi(s-t)) \left( \frac{D(s)}{D(t)} \right)^{-\gamma}$  によって割り引くことにより、証券価格  $P(t)$  が得られることを表している。満期  $T$  においてのみペイオフ  $b(D(T))$  が発生するような派生証券  $P(t)^b$  の時刻  $t$  における価格は、満期  $T$  以外の時刻  $s$  ( $\neq T$ ) では支払いがなく  $D(s) = 0$  となるため積分記号を用いずに式 (22) のように与えられる。

$$P(t)^b = E \left[ \exp(-\phi(T-t)) \left( \frac{D(T)}{D(t)} \right)^{-\gamma} b(D(T)) | F(t) \right] \quad (22)$$

本研究において分析対象となるヨーロッパ・オプションは満期  $T$  においてのみペイオフが発生する派生証券であり、特にコール・オプション価格  $P(t)^{call}$  は、価格式 (22) に式 (23) のペイオフを代入すれば、式 (24) のように導出できる。また、プット・オプションの評価式も同様に得られる。

$$b(D(T)) = \text{Max} [P(T) - K, 0] = \text{Max} \left[ D(T) \sum_{i=1}^n \pi_i(T) C_i - K, 0 \right] \quad (23)$$

$$P(t)^{call} = E \left[ e^{-\phi(T-t)} \left( \frac{D(T)}{D(t)} \right)^{-\gamma} \text{Max} \left[ D(T) \sum_{i=1}^n \pi_i(T) C_i - K, 0 \right] | F(t) \right] \quad (24)$$

モデルのパラメータがオプション価格に与える影響を直感的に把握するためには、式 (24) にある  $\frac{D(T)}{D(t)}$  や満期の投資家の推測  $\pi_i(T)$  を生成する必要がある。 $\frac{D(T)}{D(t)}$  は式 (25) のように表現されるため、本研究では、式 (25) にある  $\int_t^T m_\theta(s) ds$  と  $\pi_i(T)$  を以下に述べるモンテカルロ・シミュレーションにより求めてオプション価格を導出する方法を提案する。

$$\frac{D(T)}{D(t)} = \exp \left( \int_t^T m_\theta(s) ds - \frac{1}{2} \sigma_D^2 (T-t) + \sigma_D (\tilde{W}_D(T) - \tilde{W}_D(t)) \right) \quad (25)$$

・  $\pi_i(T)$  のシミュレーション法

- (1) 満期までの期間を  $m$  等分し (本研究では  $m = 40$ )、その時間間隔  $\Delta t$  ( $\Delta t = \frac{T-t}{m}$ ) における式 (10) で表現される配当の拡散項に対応するブラウン運動  $d\tilde{W}_D$  とシグナルの拡散項に対応するブラウン運動  $d\tilde{W}_\epsilon$  を発生させる。
- (2) 式 (12) で表される時点  $t$  における微小時間  $\Delta t$  の投資家の推測  $\pi_i(t)$  の変化量  $d\pi_i(t)$  を求める。
- (3) 手順 (2) で求めた  $d\pi_i(t)$  を用いて、次の時点における投資家の推測を  $\pi_i(t + \Delta t) = \pi_i(t) + d\pi_i(t)$  として計算する。
- (4) 手順 (1), (2), (3) を初期時点  $t$  から満期  $T$  まで繰り返し、投資家の推測  $\pi_i$  のパスを求めたうえで、満期  $T$  での投資家の推測  $\pi_i(T)$  を求める。

(注 1) シミュレーションを用いたオプション評価に関する著名な先行研究 (Longstaff ら (2001)<sup>15)</sup>) において、1 年のオプション価値を求める際に満期までの期間を 50 分割したシミュレーションを行っている。本研究の数値実験では残存期間を 0.3 年に設定しているため、40 分割程度で十分な精度が得られるものと考えられる。

・  $\int_t^T m_\theta(s) ds$  の導出法

- (1) 時点  $s$  における投資家の推測  $\pi_i(s)$  を用いて投資家の期待配当成長率  $m_\theta(s)$  を計算する。
- (2) 手順 (1) を初期時点  $t$  から満期  $T$  まで繰り返し、時点  $t$  から  $T$  までの期待配当成長率  $m_\theta(s)$  を導出する。
- (3) 手順 (2) で導出した  $m_\theta(s)$  のパスから  $\int_t^T m_\theta(s) ds$  の値を求める。

このようにシミュレーションを用いて投資家の推測 ( $\pi_1, \dots, \pi_n$ ) についてのパスを発生させることにより、そのパスに応じたペイオフが 1 つ導出される。本研究ではこのシミュ

レーションを2万回繰り返すことにより、式(24)のオプション価格を計算する。

得られたオプション価格をBSモデル価格に一致させてIVを求める際に無リスク金利が必要となるため、以下に無リスク金利の導出法を示す。

割引債は、満期 $T$ において金額1が支払われる証券であるので、割引債の価格 $P(t)^{disc}$ は式(22)に $b(D(T)) = 1$ を代入した式(26)となる。

$$P(t)^{disc} = E \left[ \exp(-\phi(T-t)) \left( \frac{D(T)}{D(t)} \right)^{-\gamma} |F(t) \right] \quad (26)$$

式(26)の期待値計算を行えば、無リスク金利 $r(t)$ は式(27)となる。

$$r(t) = \phi + \gamma m_\theta(t) - \frac{1}{2} \gamma(\gamma+1) \sigma_D^2 \quad (27)$$

### 3.2 Black-Scholes モデル (BS モデル) の本研究モデルにおける位置付け

ここでは、本研究で提案するオプション評価モデルがBSモデルを含む形で構築されていることを確認する。BSモデルでは、リスク中立測度の下で株価収益率が式(28)の確率過程に従う。

$$dP = (r-d)Pdt + \sigma P dW^Q \quad (28)$$

ここで、 $d$ は配当を株価で割った配当率、 $W^Q$ はリスク中立測度の下でのブラウン運動を表す。BSモデルでは、投資家の効用はリスク中立と仮定されており、真の株価収益率とは関係なく、無リスク金利と配当率から株価収益率のドリフトが決まっている。また、このドリフトとボラティリティはそれぞれ時間に依存せず定数であることが仮定されている。

本研究モデルは、投資家の効用がリスク中立であり、かつ、投資家が推測する配当成長率の状態が1つに収斂されているときにBSモデルとなる。

この状態は、リスク回避係数 $\gamma$ が0であり、投資家の推測の初期値 $\pi_i(0)$ が $\pi_1(0) = 1$ ,  $\pi_2(0) = 0, \dots, \pi_n(0) = 0$ のように1つに収斂しており、これが投資家の定常状態における推測 $f_i$ も $f_1 = 1, f_2 = 0, \dots, f_n = 0$ に一致している場合である。

実際、このとき投資家の推測の過程(式(12))のドリフト項 $p(f_i - \pi_i(t))dt$ は、状態 $i(=1, 2, \dots, n)$ において $f_i = \pi_i(t)$ となり0である。また、式(12)の拡散項 $\pi_i(t)(\theta_i - m_\theta) \left( \frac{1}{\sigma_D} d\tilde{W}_D + \frac{1}{\sigma_e} d\tilde{W}_e \right)$ は、状態 $i=1$ のときに $\pi_1 = 1, \theta_1 = m_\theta$ となるため0である。同様に状態 $i(=2, \dots, n)$ のときには $\pi_i = 0$ であるため拡散項は0になる。どの状態においても式(12)のドリフト項と拡散項は0になり、投資家の推測の変化量はつねに0となる。このため投資家の推測は時間に依存せず、つねに $\pi_1(t) = 1, \pi_2(t) = 0, \dots, \pi_n(t) = 0$

となり、回帰速度 $p$ には依存しない。

投資家の推測が時間によって変わらず一定の場合には、つねに $\theta_1 = m_\theta$ となるため配当の確率過程式(11)が式(29)のように表される。

$$dD = \theta_1 D dt + \sigma_D D d\tilde{W}_D \quad (29)$$

またこのとき、 $m_\theta = \theta_1, f_i = \pi_i(t), \pi_i(t) = 0 (i=2, \dots, n)$ であるため式(18)にある株価収益率のドリフト $\mu_P$ は、 $\mu_P = \theta_1$ となる。式(19)にある株価収益率のボラティリティ $\sigma_P$ は、 $m_\theta = \theta_1, \pi_i(t) = 0 (i=2, \dots, n)$ であるので、 $V_\theta$ が0となるため、 $\sigma_P = \sigma_D$ となる。このため、投資家の推測する配当成長率が1つに収斂している場合に、株価収益率は式(30)で表現される。

$$dP(t) = \theta_1 P dt + \sigma_D P d\tilde{W}_D \quad (30)$$

ここで、式(30)はエンピリカル測度の下での確率過程を表したものである。投資家の効用をリスク中立的と仮定し、式(30)にリスク中立変換を施した株価収益率(式(31))を用いる。

$$dP(t) = \theta_1^Q P dt + \sigma_D P d\tilde{W}_D^Q \quad (31)$$

式(31)のドリフト $\theta_1^Q$ は、リスク中立測度の下での超過収益率 $R$ の期待値が0となることから、式(32)を満たさなければならない。

$$E[dR] = E \left[ \frac{dP_t + D dt}{P_t} - r dt \right] = (\theta_1^Q + d - r) = 0 \quad (32)$$

つまり、ドリフト $\theta_1^Q$ は $\theta_1^Q = r - d$ である。このとき投資家が観測している配当成長率のシグナル $e$ とは無関係にオプションが評価されることになる。

よって、本研究モデルの枠組みでは、投資家がリスク中立的であり、投資家が推測している配当成長率の状態が1つに収斂されている場合にBSモデルを含んでいることが確認される。

### 3.3 投資家の推測とインプライド・ボラティリティの形状

投資家が想定するオプション満期までの株価収益率の分布が正規分布よりも裾野の厚い分布(図1を参照)であるとき、現実のオプション市場価格は、正規分布を仮定したBSモデルの価格から乖離する。

この裾野の厚い分布を用いて満期におけるペイオフ(コール(またはプット)オプションならば、満期における株価が権利行使価格以上(以下)となる金額)の期待値を現時点まで割引いて投資家が想定する現実のオプション価格を求め、得られたオプション価格がBSモデル(株価収益率に正規分布を仮定)のオプション価格と一致するように正規分布の標準

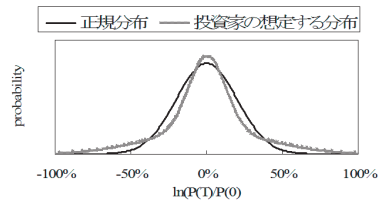


図 1 オプション満期までの株価収益率分布  
Fig. 1 Distribution of equity return up to option maturity.

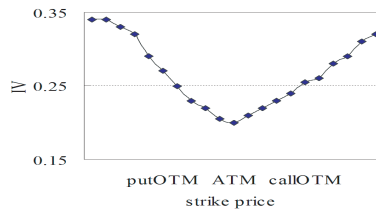


図 2 インプライド・ボラティリティの模式図  
Fig. 2 Illustration of IV.

偏差を求めたものが IV である。権利行使価格が現在の株価から乖離した水準に設定されるほど、株価収益率分布の裾野にあたる確率は、裾野の厚い分布と正規分布とでは相対的に大きく異なる。裾野が厚い分布であれば、オプション価格は正規分布の場合よりも大きく評価されるため、両者を一致させるには正規分布の標準偏差を大きくとる必要がある。よって、現実の株価収益率分布の裾野が厚い場合には、図 2 のように、オプションの権利行使価格が現在の株価から乖離するに従って IV は大きくなる。このような現象は、ボラティリティのスマイルと呼ばれる。ここで、図 2 の putOTM, ATM, callOTM は、それぞれアウト・オブ・ザ・マネーのプットオプション、アット・ザ・マネーオプション、アウト・オブ・ザ・マネーのコールオプションを表す。分布の片側だけの裾野が厚い場合には、図 2 の片側においてのみ IV が大きくなり、スキューと呼ばれる。

本研究では、IV におけるスマイルやスキューが配当成長率に関する投資家の推測によって生じることについて考察していく。投資家が配当成長率をどのように推測している際に IV にスマイルやスキューの現象が見られるのか分析するため、投資家の推測に影響を与えるパラメータに焦点を当てた数値実験に基づいて検討する。検討に際しては、オプション満期までの株価リターンやその構成要素となる配当や株価配当率の変化率に関する分布を用

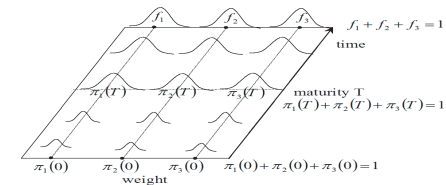


図 3 投資家の推測  $\pi_i(t)$  のダイナミクス  
Fig. 3 Dynamics of investors' beliefs.

いて詳細に考察する。

満期における株価は、 $P(T) = D(T) \sum \pi_i(T) C_i$  (式 (13)) によって与えられるので、満期までの株価リターンは、 $\ln \frac{P(T)}{P(0)} = \ln \frac{D(T)}{D(0)} + \ln \sum \frac{\pi_i(T) C_i}{\pi_i(0) C_i}$  となる。オプション価格に影響を与えるのは、満期での株価の分布であり、言い換えると株価リターン  $\ln \frac{P(T)}{P(0)}$  の分布である。数値実験においては、まず、この分布が IV のスキューと整合的であるか確認する。

次に、株価リターンの構成要素となる配当の対数変化率  $\ln \frac{D(T)}{D(0)}$  や株価配当率の対数変化率  $\ln \sum \frac{\pi_i(T) C_i}{\pi_i(0) C_i}$  の分布がどのようなパラメータ感応度を持つかを調べて、パラメータセットが IV のスマイルやスキューに与える影響を考察する。ここで、再度確認しておきたいことは、株価配当率の対数変化率にある  $\pi_i(T)$  は、オプション満期において株価配当率が  $C_i$  となる確率であるが、この確率は図 3 の模式図にあるように確率分布として与えられることである。

#### 4. 数値実験

##### 4.1 数値実験の目的と分析設定

数値実験の目的は、配当成長率に関する投資家の推測を考慮したオプション評価モデルのパラメータ設定と IV のスキューやスマイルとの関係について、オプション満期までの株価リターンやその構成要素となる配当や株価配当率の対数変化率に関する分布を用いて詳細に調べることである。数値実験では、現在の配当  $D(0)$ : 年間 150 円、割引係数  $\phi$ : 1.50%, 残存期間  $T$ : 0.3 年、リスク回避係数  $\gamma$ : 0 としたうえで、配当の成長率  $\theta_i$ , 投資家の推測の初期値  $\pi_i(0)$ , 投資家の推測  $\pi_i$  の定常状態における分布  $f_i$ , 回帰スピード  $p$ , 配当のボラティリティ  $\sigma_D$ , シグナルのボラティリティ  $\sigma_e$  のような配当成長率に関する投資家の推測に影響を与えるパラメータが IV のスキューやスマイルと呼ばれる現象に与える影響につい

て考察する．ここで，配当は日経 225 採用銘柄の平均配当利回りが年率 1.5%程度であること，日経 225 平均が 2009 年後半において 10,000 円程度であることから年率 150 円と設定した．割引係数は簡便のため，配当利回りと同水準に設定した．オプションの残存期間に関しては，満期が 0.5 年を超えるとオプションの取引量は少なく，逆に 0.1 年以下となると価格に丸めの誤差の影響も含まれる可能性があるため，ここでは 0.3 年とした．リスク回避係数  $\gamma$  を 0 に設定しているのは，通常のオプション評価モデルがリスク中立評価法を採用しているために，この点に関しては揃えたうえで数値実験を行うためである．表 1 には，数値実験に用いるパラメータセット（以下，セットと略す）を IV にスキューが現れるセットとスマイルが現れるセットに分けたうえで，主にどのパラメータに着目した数値実験であるかが分かる形で示した．表 1 のセットは，現時点における株価  $P(0)$  が 10,000 円となるように構成されている．IV を導出する際には，権利行使価格が現時点の株価より高い場合にはコール・オプションの価格（式 (24)）を低い場合にはプット・オプションの価格を用いて計算した．

4.2 数値実験の結果と考察

4.2.1 ボラティリティ・スキュー（投資家の推測  $\pi_i$  の観点から）

配当成長に関する投資家の推測が 1 つに収斂される場合に IV が一定の値をとることは 3.2 節で確認した．IV にスキューが見られる際には，配当成長に関する投資家の推測がプラス成長やマイナス成長に偏っている場合が考えられる．そこで配当成長に関する現時点における投資家の推測  $\pi_i(0)$  として表 1-a に， $-8\%$  に大きなウエイトがかけられているセット 1 と  $+8\%$  に大きなウエイトがかけられているセット 2 を設定した．表 1-a から，セット 1 の定常状態における投資家の推測  $f_i$  は，セット 2 対比で相対的に  $+8\%$  へのウエイトが大きくなっている．表 1-a のセットでは，どちらのセットにおいても定常状態における配当成長率に関する投資家の推測  $f_i$  は配当成長率がプラス ( $+8\%$ ) よりもマイナス ( $-8\%$ ) の方に偏っているが，これは 4.1 節で設定した割引率や配当利回りのようなパラメータにも依存して決まるものであり，これらのパラメータの設定いかんによっては，定常状態における投資家の推測  $f_i$  がプラスに偏る場合もある．

ボラティリティ・スキューに関する実験結果を図 4 に示した．図 4 からセット 1 は現在の株価よりも権利行使価格が高いコール・オプションの IV が高くなっており，セット 2 では現在の株価よりも権利行使価格が低いプット・オプションの IV が高くなっていることが分かる．オプション価格はオプション満期の株価に基づいて評価されるため，コール（プット）・オプションでは株価が高く（低く）なる確率が大きいほどオプション価格は高くなる．

表 1 パラメータセット  
Table 1 Parameter sets.

	セット	状態 i	$f_i$	$\theta_i$	$\pi_i(0)$	$p$	$\sigma_D$	$\sigma_e$	
a skew( $\pi_i$ )	1	1	61.33%	-8.00%	90.00%	0.3	10%	10%	
		2	38.67%	8.00%	10.00%				
	2	1	65.33%	-8.00%	10.00%	0.3	10%	10%	
		2	34.67%	8.00%	90.00%				
	b smile( $\theta_i$ )	1	1	6.44%	-12.00%	12.50%	0.3	10%	10%
			2	90.00%	0.00%	75.00%			
3			3.56%	10.00%	12.50%				
2		1	6.71%	-18.00%	7.50%	0.3	10%	10%	
		2	90.00%	0.00%	85.00%				
		3	3.29%	13.00%	7.50%				
3		1	7.15%	-24.00%	5.00%	0.3	10%	10%	
		2	90.00%	0.00%	90.00%				
		3	2.85%	16.00%	5.00%				
c smile( $p$ )		1	1	2.73%	-24.00%	5.00%	0.3	10%	10%
			2	96.27%	0.00%	90.00%			
			3	1.00%	16.00%	5.00%			
	2	1	1.36%	-24.00%	5.00%	0.6	10%	10%	
		2	97.58%	0.00%	90.00%				
		3	1.06%	16.00%	5.00%				
	3	1	1.02%	-24.00%	5.00%	0.9	10%	10%	
		2	97.98%	0.00%	90.00%				
		3	1.00%	16.00%	5.00%				
	4	1	0.97%	-24.00%	5.00%	1.2	10%	10%	
		2	97.98%	0.00%	90.00%				
		3	1.06%	16.00%	5.00%				
d smile( $\sigma_e$ )	1	1	2.73%	-24.00%	5.00%	0.3	10%		
		2	96.27%	0.00%	90.00%				
		3	1.00%	16.00%	5.00%				
e smile( $\sigma_D$ )	1	1	2.73%	-24.00%	5.00%	0.3		10%	
		2	96.27%	0.00%	90.00%				
		3	1.00%	16.00%	5.00%				

ここでは，配当成長に関する現時点における投資家の推測  $\pi_i(0)$  の観点から，オプション満期までの株価リターンやその構成要素となる配当や株価配当率の変化率に関する分布を用いて詳細に考察する．

図 5，図 6，図 7 には，それぞれ，表 1 の各セットの下でのシミュレーションにより得られ

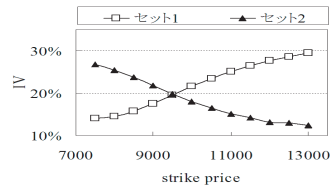


図 4 表 1-a のセットの下での IV  
Fig. 4 IV under the set of Table 1-a.

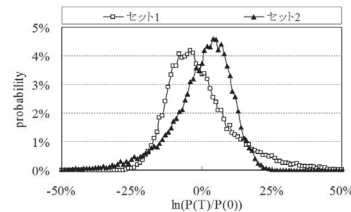


図 5 表 1-a のセットの下での株価リターンの分布  
Fig. 5 Equity return distribution under the set of Table 1-a.

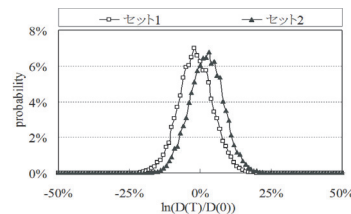


図 6 表 1-a のセットの下での配当の対数変化率の分布  
Fig. 6 Distribution of dividend growth rate under the set of Table 1-a.

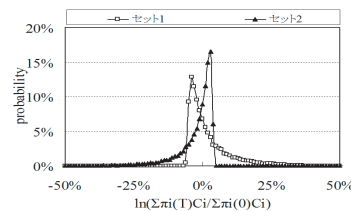


図 7 表 1-a のセットの下での株価配当率の対数変化率の分布  
Fig. 7 Distribution of price-dividend-ratio growth rate under the set of Table 1-a.

表 2 表 1-a のセットの下でのモーメント等  
Table 2 Each moment value under the set of Table 1-a.

		1	2
$\ln\left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)$	$E[x]$	-0.74%	-0.56%
	$E[(x-\mu)^2]$	1.45%	1.19%
	$E[(x-\mu)^3]$	0.6524%	-0.5271%
	$E[(x-\mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0312%	0.0268%
$\ln\left(\frac{D(T)}{D(0)}\right)$	$E[x]$	-2.01%	1.65%
	$E[(x-\mu)^2]$	0.36%	0.36%
	$E[(x-\mu)^3]$	0.0032%	-0.0049%
	$E[(x-\mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0000%	0.0000%
$\ln\left(\frac{\sum \pi_i(T)C_i}{\sum \pi_i(0)C_i}\right)$	$E[x]$	1.28%	-2.21%
	$E[(x-\mu)^2]$	0.54%	0.38%
	$E[(x-\mu)^3]$	0.0736%	-0.0508%
	$E[(x-\mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0113%	0.0086%

た株価リターン  $\ln \frac{P(T)}{P(0)}$ ，配当の対数変化率  $\ln \frac{D(T)}{D(0)}$ ，株価配当率の対数変化率  $\ln \frac{\sum \pi_i(T)C_i}{\sum \pi_i(0)C_i}$  に関する分布を示した．また，表 2 には，これら 3 つの分布に関する 1 次から 3 次までのモーメントと 4 次モーメントを  $(E[(x-\mu)^4] - 3\sigma^4)$  のように修正したもの（以下 4 次モーメントと呼ぶ）を掲載した．

株価リターンの分布を見ると（図 5），セット 1 に関しては株価リターン分布の右側の裾野が厚く，逆に，セット 2 に関しては株価リターン分布の左側の裾野が厚いことが分かる．表 2 から，セット 1 の 3 次モーメントはプラスの大きな値であるのに対して，セット 2 ではマイナスの大きな値となることが確認される．

次に，配当の対数変化率の分布（図 6，表 2）について確認する．配当の対数変化率の分布で興味深いのは，わずかではあるがセット 1 の期待値はマイナス（-2.01%），セット 2 の期待値はプラス（1.65%）となっている点である．これは，満期での配当  $D(T)$  を導くウィナー過程（式 (11)）のドリフトとなる投資家の推測の期待値  $m_\theta$  が，初期時点における配当成長率  $\theta_i$  に関する投資家の推測  $\pi_i(0)$  の影響を残しているためと考えられる．実際，初期時点における投資家の推測の期待値  $m_\theta$  は，セット 1 で -0.64，セット 2 で 0.64 である．このように配当の対数変化率の分布の期待値はセット 1 とセット 2 で異なるが，どち



らのセットに関しても分布の裾野が厚くなるような現象は見られない。事実、表 2 によれば 3 次、4 次のモーメントはともに 0 に近く、どちらの分布も歪みや尖りはわずかである。このため、セット 1, 2 の下で株価リターンの分布の両側の裾野が厚くなることを満期における配当  $D(T)$  の分布から説明することは難しい。そこで、株価配当率の対数変化率の分布が満期における株価リターンの分布へ与える影響について考察する。この数値実験においては  $n = 2$ 、つまり、配当成長率  $\theta_i$  は  $-8\%$  と  $8\%$  の 2 通りである。株価配当率の対数変化率の分布を見ると (図 7, 表 2), 株価リターンの分布と同様に、セット 1 では分布の右側の裾野が厚く、セット 2 に関しては分布の左側の裾野が厚いことが分かる。表 2 から、セット 1 の 3 次モーメントはプラスの値であるのに対して、セット 2 ではマイナスの値となることが確認される。つまり、株価リターンの分布において、株価配当率の対数変化率が大きな影響を与えていることが分かる。

ここで、株価配当率の対数変化率の分布が上記のような形状となる理由を考える。セット 1, 2 の下で、配当成長率  $\theta_i$  が  $-8\%$  と  $8\%$  となる場合の  $C_i$  を式 (15), 式 (16) から求めると、セット 1 ではそれぞれ 62.42, 104.91, セット 2 ではそれぞれ 41.33, 69.48 となる。セット 1 では、初期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(0) C_i$  は、 $C_1 = 62.42$  に 90% のウエイト、 $C_2 = 104.91$  に 10% のウエイトがかかっている。これに対して、満期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(T) C_i$  では、満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) が初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) から定常状態におけるウエイト (分布として与えられ、その期待値は  $f_i$ ) へと移行する過程にあるため、 $C_1 = 62.42$  へのウエイト  $\pi_1(T)$  の期待値は 90% より低く、 $C_2 = 104.91$  へのウエイト  $\pi_2(T)$  は 10% より高くなり、かつ、ともに定数ではなく分布として与えられる。このため、満期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(T) C_i$  は初期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(0) C_i$  よりも大きく、株価配当率の対数変化率の期待値は先に見たように正の値となる。また、ウエイト  $\pi_2(T)$  が分布として与えられることから、株価配当率の対数変化率の右側の裾野が厚くなる。

セット 2 では、セット 1 とはまったく逆の状況になる。これが、株価リターン分布において片側の裾が厚くなる要因となっている。

#### 4.2.2 ポラティリティ・スマイル (配当成長率 $\theta_i$ の観点)

IV にスマイルがみられるのは、3.3 節で確認したように株価リターン分布の両側の裾野が厚くなっているときである。そこで、配当成長率  $\theta_i$  として 3 状態を想定して表 1-b の Smile( $\theta_i$ ) に示すような 3 通りのセットを分析対象とする。セット 1 は、配当成長率  $\theta_i$  が  $-12\%$ ,  $0\%$ ,  $10\%$  の状態、セット 2 は、配当成長率  $\theta_i$  が  $-18\%$ ,  $0\%$ ,  $13\%$  の状態、セッ

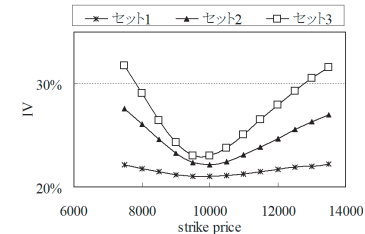


図 8 表 1-b のセットの下での IV  
Fig. 8 IV under the set of Table 1-b.

ト 3 では、配当成長率  $\theta_i$  が  $-24\%$ ,  $0\%$ ,  $16\%$  の状態をとると想定している。セット 1 からセット 3 になるに従って、配当成長率  $\theta_i$  のとりうる状態の散らばりが大きくなるように設定されている。次に、配当成長率に関する現在の投資家の推測  $\pi_i(0)$  について確認しておく。先に見た配当成長率の状態の順に、セット 1 では、12.5%, 75%, 12.5%, セット 2 では、7.5%, 85%, 7.5%, セット 3 では、5%, 90%, 5%, に設定されている。

実験結果 (図 8) から、セット 1 ではどの権利行使価格の IV もおおむね同程度であるのに対して、セット 2 では権利行使価格が現在の株価である 10000 円から乖離するに従って IV は高くなっておりスマイルが確認される。また、セット 3 になると、セット 2 よりもスマイルが顕著に現れる。

4.2.1 項と同様にして、モデルのパラメータセットとスマイルとの因果関係を検討する。表 3 には、表 1-b の各セットの下でのシミュレーションにより得られた株価リターン、配当の対数変化率、株価配当率の対数変化率に関する分布に関する 1 次から 4 次までのモーメントを示した。通常、両側の裾野が厚い確率分布は、分布の中央部分が尖った形となり 4 次モーメント (尖度) が大きい。表 3 を見ると、株価リターンに関する 4 次モーメントは、セット 1 からセット 3 になるに従って大きくなっており、株価リターン分布の両側の裾野は、セット 1 からセット 3 の順に厚くなるのが分かる。これが、先に見たセットとスマイルとの関係が生じる要因である。

株価リターン分布の両側の裾野がセット 1 からセット 3 の順に厚くなる要因について、株価リターンを配当の対数変化率と株価配当率の対数変化率に分解して詳しく分析する。表 3 から、いずれのセットにおいても、配当の対数変化率に関する分布の 3 次、4 次モーメントはともに 0 に近く、歪みや尖りはわずかである。これに対して、株価配当率の対数変化率に関する分布の 4 次モーメントは、セット 1 からセット 3 の順に大きいことが分かる。よっ

表 3 表 1-b のセットの下でのモーメント等  
Table 3 Each moment value under the set of Table 1-b.

		1	2	3
$\ln\left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)$	$E[x]$	-0.65%	-0.81%	-1.00%
	$E[(x-\mu)^2]$	1.36%	1.68%	2.06%
	$E[(x-\mu)^3]$	-0.0010%	-0.0321%	-0.0835%
	$E[(x-\mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0044%	0.0403%	0.1541%
$\ln\left(\frac{D(T)}{D(0)}\right)$	$E[x]$	-0.23%	-0.27%	-0.28%
	$E[(x-\mu)^2]$	0.36%	0.37%	0.38%
	$E[(x-\mu)^3]$	-0.0002%	-0.0006%	-0.0012%
	$E[(x-\mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0000%	0.0001%	0.0001%
$\ln\left(\frac{\sum \pi_i(T)C_i}{\sum \pi_i(0)C_i}\right)$	$E[x]$	-0.42%	-0.54%	-0.72%
	$E[(x-\mu)^2]$	0.43%	0.63%	0.91%
	$E[(x-\mu)^3]$	-0.0003%	-0.0134%	0.0373%
	$E[(x-\mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0010%	0.0124%	0.0583%

て、株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因は、主に、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚いことによると考えられる。

セット 1 からセット 3 の順に、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚くなることを確認しておく。この数値実験においては  $n = 3$ 、つまり、配当成長率  $\theta_i$  のとりうる状態は 3 通りである。各セットの下で、配当成長率が 0 ではない状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合に対する  $C_1, C_3$  を式 (15)、式 (16) から求めると、セット 1 ではそれぞれ 47.16, 95.42, セット 2 ではそれぞれ 41.37, 110.70, セット 3 ではそれぞれ 36.74, 131.54 と、セット 1 からセット 3 になるに従って配当成長率の状態が  $\theta_1$  と  $\theta_3$  の場合で  $C_1$  と  $C_3$  に大きな違いが見られる。配当成長率が  $\theta_2 = 0$  の場合の  $C_i$  は、配当成長率が状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合の  $C_1$  と  $C_3$  を平均した水準程度であり、いずれのセットにおいても同程度である。株価配当率の対数変化率を求める際に重要なのは、初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) と満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) である。満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) は、初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) から定常状態におけるウエイト (分布として与えられ、その期待値は  $f_i$ ) へと近づいていく過程にある (図 3 を参照)。いずれのセットにおいても定常状態において配当成長率が  $\theta_2 = 0$  ( $C_i$  の平均水準である  $C_2$  を与える) をとる期待値  $f_2$  は 90% であるが、初期時点におけるウエイト  $\pi_2(0)$  (定

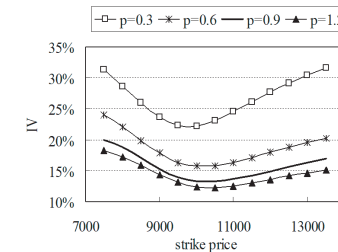


図 9 表 1-c のセットの下での IV  
Fig. 9 IV under the set of Table 1-c.

数) がセット 3 では 90% とセット 1 の 75% よりも大きいため、セット 3 の満期におけるウエイト  $\pi_2(T)$  の期待値はセット 1 よりも大きく、株価配当率の対数変化率に関する分布の平均部分の確率が高くセット 3 の方がセット 1 よりも中央部分が尖った分布となる。また、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野がセット 1 よりもセット 3 の方が厚くなるのは、先に述べたように、配当成長率が状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合の  $C_1$  と  $C_3$  がセット 3 ではセット 1 に比べて大きく乖離していること、初期時点とは異なり満期ではセット 3 において配当成長率が状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる確率  $\pi_1(T), \pi_3(T)$  がセット 1 にそれほど見劣りしないことによる。

#### 4.2.3 ボラティリティ・スマイル (回帰スピード $p$ の観点)

回帰スピード  $p$  がスマイルに与える影響を考察するため、いずれのセットにおいても配当成長率  $\theta_i$  や現在の投資家の推測  $\pi_i(0)$  を揃えて、回帰スピード  $p$  を表 1-c のように 0.3 から 1.2 まで変化させてスマイルの形状を分析する。

実験結果 (図 9) から、回帰スピード  $p$  が小さくなるに従って、スマイルが顕著に現れることが分かる。

4.2.2 項と同様にして、モデルのパラメータセットとスマイルとの因果関係を検討する。表 4 には、表 1-c の  $Smile(p)$  における各セットの下でのシミュレーションにより得られた株価リターン、配当の対数変化率、株価配当率の対数変化率に関する分布に関する 1 次から 4 次までのモーメントを示した。表 4 を見ると、株価リターンに関する 4 次モーメントは、回帰スピード  $p$  が小さくなるに従って大きくなっており、株価リターン分布の両側の裾野は、回帰スピード  $p$  が小さい順に厚くなる事が分かる。これが、先に見たパラメータセットとスマイルとの関係が生じる要因である。

回帰スピード  $p$  が小さいほど株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因について、株

表 4 表 1-c のセットの下でのモーメント等  
Table 4 Each moment value under the set of Table 1-c.

		$p = 0.3$	$p = 0.6$	$p = 0.9$	$p = 1.2$
$\ln \left( \frac{P(T)}{P(0)} \right)$	$E[x]$	-0.97%	-0.43%	-0.30%	-0.26%
	$E[(x - \mu)^2]$	2.02%	0.92%	0.65%	0.55%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.1920%	-0.2109%	-0.1050%	-0.0666%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.1481%	0.0217%	0.0070%	0.0035%
$\ln \left( \frac{D(T)}{D(0)} \right)$	$E[x]$	-0.27%	-0.28%	-0.26%	-0.26%
	$E[(x - \mu)^2]$	0.37%	0.37%	0.37%	0.37%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.0057%	-0.0065%	-0.0050%	-0.0047%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0001%	0.0001%	0.0001%	-0.0001%
$\ln \left( \frac{\sum \pi_i(T)C_i}{\sum \pi_i(0)C_i} \right)$	$E[x]$	-0.70%	-0.16%	-0.04%	0.00%
	$E[(x - \mu)^2]$	0.88%	0.20%	0.07%	0.04%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.0280%	-0.0161%	-0.0047%	-0.0019%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0564%	0.0042%	0.0007%	0.0002%

価リターンを配当の対数変化率と株価配当率の対数変化率に分解して詳しく分析する。表 4 から、いずれのセットにおいても、配当の対数変化率に関する分布の 3 次、4 次モーメントはともに 0 に近く、歪みや尖りはわずかであることが分かる。これに対して、株価配当率の対数変化率に関する分布の 4 次モーメントは、回帰スピード  $p$  が小さいほど大きいことが分かる。よって、株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因は、主に、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚いことによると考えられる。

回帰スピード  $p$  が小さいほど、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚くなることを確認しておく。この数値実験においても  $n = 3$ 、つまり、配当成長率  $\theta_i$  のとりうる状態は 3 通りである。確認しておくべきことは、いずれのセットにおいても配当成長率  $\theta_i$  のとりうる状態は同じであるが、回帰スピード  $p$  が異なるために各配当成長率  $\theta_i$  に対応する  $C_i$  がセットによって大きく異なることである。実際、配当成長率が 0 ではない状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合に対する  $C_1, C_3$  を式 (15)、式 (16) から求めると、セット 1 ではそれぞれ 36.74, 131.54, セット 2 ではそれぞれ 47.78, 87.79, セット 3 ではそれぞれ 52.80, 80.78, セット 4 ではそれぞれ 55.71, 76.83 と、セット 4 からセット 1 になるに従って配当成長率の状態が  $\theta_1$  と  $\theta_3$  の場合で  $C_1$  と  $C_3$  に大きな違いが見られるようになる。配当成長率が  $\theta_2 = 0$  の場合の  $C_i$  は、配当成長率が状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合の  $C_1$  と  $C_3$  を平均した水準程度であ

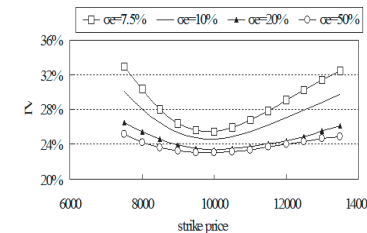


図 10 表 1-d のセットの下での IV  
Fig. 10 IV under the set of Table 1-d.

り、いずれのセットにおいても同程度である。満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) は、各セットにおける初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) と定常状態におけるウエイト (分布として与えられ、その期待値は  $f_i$ ) がおおむね同じであることから大差ないものと考えられる。株価配当率の対数変化率に関する分布の形状を考察するうえで重要なのは、先に見た  $C_1$  と  $C_3$  との乖離の程度である。セット 1 では、 $C_1, C_3$  がそれぞれ 36.74, 131.54 と大きく乖離しているため、 $C_1, C_3$  へのウエイトが他のセットとおおむね同じであるなら、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚く中央が尖った形状になる。

#### 4.2.4 ボラティリティ・スマイル (シグナルの正確さ $\sigma_e$ の観点)

シグナルの標準偏差  $\sigma_e$  がスマイルに与える影響を考察するため、 $\sigma_e$  以外のパラメータを表 1 のように設定し、 $\sigma_e$  を 7.5%, 10%, 20%, 50% の 4 通りで変化させてスマイルの形状を分析する。

実験結果 (図 10) から、シグナルが正確である (シグナルの標準偏差  $\sigma_e$  が小さい) ほど、スマイルが顕著に現れることが分かる。

4.2.3 項と同様にして、モデルのパラメータセットとスマイルとの因果関係を検討する。表 5 には、表 1-d の  $Smile(\sigma_e)$  における各セットの下でのシミュレーションにより得られた株価リターン、配当の対数変化率、株価配当率の対数変化率に関する分布に関する 1 次から 4 次までのモーメントを示した。表 5 を見ると、株価リターンに関する 4 次モーメントは、シグナルが正確であるほど大きくなっており、株価リターン分布はシグナルが正確であるほど中央部の尖りが大きく両側の裾が厚い形状となることが分かる。これが、パラメータセットとスマイルに先に見た関係が生じる要因である。

シグナルが正確であるほど株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因について、株

表 5 表 1-d のセットの下でのモーメント等  
Table 5 Each moment value under the set of Table 1-d.

		$\sigma_e = 7.5\%$	$\sigma_e = 10\%$	$\sigma_e = 20\%$	$\sigma_e = 50\%$
$\ln\left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)$	$E[x]$	-1.14%	-0.97%	-0.82%	-0.77%
	$E[(x - \mu)^2]$	2.35%	2.02%	1.67%	1.59%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.0055%	-0.0057%	-0.0084%	-0.0061%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.2571%	0.1481%	0.0627%	0.0451%
$\ln\left(\frac{D(T)}{D(0)}\right)$	$E[x]$	-0.27%	-0.27%	-0.28%	-0.27%
	$E[(x - \mu)^2]$	0.37%	0.37%	0.37%	0.37%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.0055%	-0.0057%	-0.0084%	-0.0061%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0001%	0.0001%	0.0001%	0.0001%
$\ln\left(\sum \frac{\pi_i(T)C_i}{\sum \pi_i(0)C_i}\right)$	$E[x]$	-0.87%	-0.70%	-0.55%	-0.50%
	$E[(x - \mu)^2]$	1.20%	0.88%	0.54%	0.45%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.0491%	-0.0280%	-0.0185%	-0.0080%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.1181%	0.0564%	0.0160%	0.0089%

価リターンを配当の対数変化率と株価配当率の対数変化率に分解して詳しく分析する。表 5 から、いずれのセットにおいても、配当の対数変化率に関する分布の 3 次、4 次モーメントはともに 0 に近く、歪みや尖りはわずかであることが分かる。これに対して、株価配当率の対数変化率に関する分布の 4 次モーメントは、シグナルが正確であるほど大きいことが分かる。よって、株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因は、主に、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚いことによると考えられる。シグナルが正確であるほど株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚くなることを確認しておく。この数値実験においても  $n = 3$ 、つまり、配当成長率  $\theta_i$  のとりうる状態は 3 通りである。いずれのセットにおいてもシグナルの正確さ以外のパラメータが同じであるため、各配当成長率  $\theta_i$  に対応する  $C_i$  はどのセットにおいても共通の値をとる。よって、株価配当率の対数変化率に影響を与えるのは、初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) と満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) である。ウエイト  $\pi_i(t)$  の変動を記述する確率微分方程式 (12) をみれば、拡散項にシグナルの正確さを表すパラメータ  $\sigma_e$  の逆数がかかっていることが分かる。このため、シグナルが正確であるほど、満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) の分散は大きくなる。配当成長率  $\theta_i$  のゼロ成長に対応する  $C_2$  ( $C_1$  と  $C_3$  の平均程度) のウエイトの分散も大きくなるが、マイナス成長  $\theta_1$  やプラス成長  $\theta_3$  に対応する  $C_1$  や

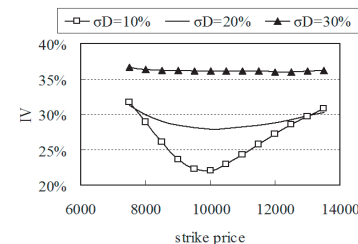


図 11 表 1-e のセットの下での IV  
Fig. 11 IV under the set of Table 1-e.

$C_3$  のウエイトに関する分散が大きくなる影響が強くなり、働いて株価配当率の対数変化率の裾野を厚くすることになる。

#### 4.2.5 ボラティリティ・スマイル (配当の標準偏差 $\sigma_D$ の観点)

配当の標準偏差  $\sigma_D$  がスマイルに与える影響を考察するため、 $\sigma_D$  以外のパラメータを表 1-e の Smile ( $\sigma_D$ ) ように設定し、 $\sigma_D$  を 10%、20%、30% の 3 通りで変化させてスマイルの形状を分析する。リスク中立 ( $\gamma = 0$ ) の下で数値実験を行っているため、 $\sigma_D$  が初期株価  $P(0)$  に影響を与えないため、他のパラメータは  $\sigma_D$  が異なる値をとっても一定である。

実験結果 (図 11) から、配当の標準偏差  $\sigma_D$  が小さいほど、スマイルが顕著に現れることが分かる。

4.2.4 項と同様にして、モデルのパラメータセットとスマイルとの因果関係を検討する。表 6 には、表 1-e の Smile ( $\sigma_D$ ) における各セットの下でのシミュレーションにより得られた株価リターン、配当の対数変化率、株価配当率の対数変化率に関する分布に関する 1 次から 4 次までのモーメントを示した。表 6 を見ると、株価リターンに関する 4 次モーメントは、配当の標準偏差  $\sigma_D$  が小さいほど大きくなっており、株価リターン分布は配当の標準偏差  $\sigma_D$  が小さいほど中央部の尖りが大きく両側の裾野が厚い形状となることが分かる。これが、先に見たパラメータセットとスマイルとの関係が生じる要因である。

配当の標準偏差  $\sigma_D$  が小さいほど株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因について、株価リターンを配当の対数変化率と株価配当率の対数変化率に分解して詳しく分析する。表 6 から、いずれのセットにおいても、配当の対数変化率に関する分布の 3 次、4 次モーメントはともに 0 に近く、歪みや尖りはわずかである。これに対して、株価配当率の対数変化率に関する分布の 4 次モーメントは、配当の標準偏差  $\sigma_D$  が小さいほど大きいことが分かる。よって、株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因は、主に、株価配当率の対数変

表 6 表 1-e のセットの下でのモーメント等  
Table 6 Each moment value under the set of Table 1-e.

		$\sigma_D = 10\%$	$\sigma_D = 20\%$	$\sigma_D = 30\%$
$\ln \left( \frac{P(T)}{P(0)} \right)$	$E[x]$	-0.97%	-1.27%	-2.01%
	$E[(x - \mu)^2]$	2.02%	2.70%	4.32%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.1920%	-0.0821%	-0.0550%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.1481%	0.0685%	0.0607%
$\ln \left( \frac{D(T)}{D(0)} \right)$	$E[x]$	-0.27%	-0.74%	-1.50%
	$E[(x - \mu)^2]$	0.37%	1.39%	3.07%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.0057%	-0.0032%	-0.0020%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0001%	0.0005%	0.0023%
$\ln \left( \frac{\sum \pi_i(T)C_i}{\sum \pi_i(0)C_i} \right)$	$E[x]$	-0.70%	-0.53%	-0.51%
	$E[(x - \mu)^2]$	0.88%	0.55%	0.49%
	$E[(x - \mu)^3]$	-0.0280%	-0.0126%	-0.0109%
	$E[(x - \mu)^4] - 3\sigma^4$	0.0564%	0.0178%	0.0132%

化率に関する分布の裾野が厚いことによると考えられる。配当の標準偏差  $\sigma_D$  が小さいほど株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚くなることを確認しておく。この数値実験においても  $n = 3$ 、つまり、配当成長率  $\theta_i$  のとりうる状態は 3 通りである。4.2.4 項と同様に、各配当成長率  $\theta_i$  に対応する  $C_i$  はどのセットにおいても共通の値をとる。よって、株価配当率の対数変化率に影響を与えるのは、初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) と満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) である。ウエイト  $\pi_i(t)$  の変動を記述する確率微分方程式 (12) をみれば、拡散項に配当の標準偏差  $\sigma_D$  の逆数がかかっていることが分かる。このため、配当の標準偏差  $\sigma_D$  が小さいほど、満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) の分散は大きくなる。配当成長率  $\theta_i$  のゼロ成長に対応する  $C_2$  ( $C_1$  と  $C_3$  の平均程度) のウエイトの分散も大きくなるが、マイナス成長  $\theta_1$  やプラス成長  $\theta_3$  に対応する  $C_1$  や  $C_3$  のウエイトに関する分散が大きくなる影響が強く働いて株価配当率の対数変化率の裾野を厚くすることになる。

## 5. まとめと今後の課題

本研究では、BS モデルとの対比を想定し投資家の効用関数をリスク中立的と仮定して、投資家の推測を考慮した株価評価モデルを素直に発展させる形でオプション評価モデルを提

案した。また、数値実験においては、モンテカルロ・シミュレーションに基づいて、投資家の推測に関するモデルのパラメータとスキューやスマイルとの関係を検討した。

まず、提案したオプション評価モデルは、配当成長に関する投資家の推測が 1 つに収斂する場合に BS モデルを含むことを確認した。次に、数値実験においては、投資家の推測を表現するパラメータが、オプション満期までの株価リターン分布の裾野の厚さに影響をおよぼすことによって IV にスキューやスマイルが生じることを確認した。さらに、投資家の推測を表現するパラメータの下で、株価リターン分布の裾野が厚くなる要因を、株価リターンの構成要素となる配当の対数変化率や株価配当率の対数変化率に関する分布に基づき分析した。

数値実験結果から、投資家の推測を表現するパラメータによって IV にスキューやスマイルが生じるのは、配当の対数変化率よりも株価配当率の対数変化率にパラメータが与える影響によるところが大きいことが分かった。また、数値実験によって、投資家の推測を表現するパラメータと IV のスキューやスマイルとの関係が直感的に想定される結果とおおむね整合的であることも分かった。

本研究の成果を実際に運用するために克服すべき今後の課題としては、主に、次の 2 点があげられる。第 1 の課題は、「1. はじめに」において述べたように、データの蓄積・整備を待って、配当成長率に関する投資家の推測とスマイルやスキューといった IV の形状に関する精度の高い対応関係を計量することである。第 2 の課題は、投資家の効用関数がリスク中立的であるとした仮定を緩めて、現実的なリスク回避的効用関数を採用した場合に考慮すべきオプション市場価格に内在するリスクプレミアムの取扱いについて検討することである。

## 参 考 文 献

- 1) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-654 (1973).
- 2) Dupire, B.: Pricing with a smile, *Risk*, July pp.18-20 (1994).
- 3) Rubinstein, M.: Implied binomial trees, *Journal of Finance*, Vol.49, pp.771-818 (1994).
- 4) Derman, E. and Kani, I.: Riding on a smile, *Risk*, February, pp.32-39 (1994).
- 5) Heston, S.L.: A Closed-form solution for options, *Review of Financial and Studies*, Vol.13, pp.585-625 (2000).
- 6) Britten-Jones, M. and Neuberger, A.: Option prices, implied price processes, and stochastic volatility, *Journal of Finance*, Vol.55, pp.839-866 (2000).
- 7) Merton, R.C.: Option pricing when under lying stock returns are discontinuous,

*Journal of Financial Economics*, Vol.3, pp.125–144 (1976).

- 8) Naik, V. and Lee, M.: General equilibrium pricing of options on the market portfolio with discontinuous returns, *Review of Financial Studies*, Vol.3, pp.493–521 (1990).
- 9) Wang, J.: A model of intertemporal asset prices under asymmetric information, *Review of Economic Studies*, Vol.60, 249–282 (1993).
- 10) Zapatero, F.: Effects of financial innovations on market volatility when beliefs are heterogeneous, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.22, pp.597–626 (1998).
- 11) Veronesi, P.: How does information quality affect stock returns, *Journal of Finance*, Vol.55, pp.807–837 (2000).
- 12) David, A. and Veronesi, P.: Option prices with uncertain fundamentals, Working paper, University of Chicago (2002).
- 13) Li, T.: Heterogeneous beliefs, option prices, and volatility smiles, Working Paper, The Chinese University of HongKong (2007).
- 14) Liptser, R. and Shirayev, A.N.: *Statistics of Random Processes, I, II*, Springer-Verlag, NewYork (1977).
- 15) F.A. Longstaff and E.S. Schwartz: Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach, *Review of Financial Studies*, Vol.14, pp.113–147 (2001).

(平成 21 年 11 月 16 日受付)

(平成 21 年 12 月 26 日再受付)

(平成 22 年 1 月 12 日採録)



田中健太郎

昭和 61 年生．平成 21 年電気通信大学システム工学科卒業．同年電気通信大学大学院システム工学専攻修士課程入学，現在に至る．



宮崎 浩一

昭和 42 年生．平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了．博士（経営学）．電気通信大学システム工学科専任講師等を経て，平成 19 年度から電気通信大学システム工学科准教授，現在に至る．日本オペレーションズ・リサーチ学会，JAFEE，日本応用数理学会，応用統計学会等各会員．



錦 康二

昭和 59 年生．平成 20 年電気通信大学システム工学科卒業．同年電気通信大学大学院システム工学専攻修士課程入学，現在に至る．