Vol.2010-MPS-77 No.18
2010/3/4

Particle Swarm Optimization を用いた組合せ最適化問題の解法

桂　敬晃[†1]　重弘裕二[†1]　増田達也[†1]

Particle Swarm Optimization（PSO）では解が実数値ベクトルで表現されるため，通常，PSO の対象は連続値最適化問題である．本論文では PSO を，代表的な組合せ最適化問題である巡回セールスマン問題に適用する．そのために，巡回セールスマン問題の解に実数値ベクトルを対応付ける．そして，より良い解に対応する実数値ベクトルを PSO で探索することにより，最適な解を探索する．また，提案手法の有効性を確認するため，実際に巡回セールスマン問題に PSO を適用し，実験を行う．

A Method to Solve Combinatorial Optimization Problem by Means of Particle Swarm Optimization

Takaaki Katsura,[†1] Yuji Shigehiro[†1] and Tatsuya Masuda[†1]

In almost all cases, the Particle Swarm Optimization (PSO) is applied to continuous-variable optimization problems, because the solution in PSO is represented by a real-valued vector. In this paper, we apply the PSO to traveling salesman problem (TSP) that is typical combinatorial optimization problems. For this purpose, the real-valued vector is associated with a solution of TSP. Then, the optimal solution of TSP can be searched by searching the optimal solution of continuous-variable optimization problem with PSO. The proposed method is applied to TSP, and the experimented result is shown.

†1 大阪工業大学
Osaka Institute of Technology

1. はじめに

メタヒューリスティックスの 1 つである Particle Swarm Optimization（以下 PSO）は，社会的振る舞いを参考にして考え出された最適化手法[1)]であり，そのアルゴリズムの単純さ，勾配情報を用いないで実装できるがゆえの適用範囲の広さ，ある程度の大域的探索性能の高さから，近年注目を集めている[2)]．この手法では，鳥や魚に見立てた Particle と呼ばれる探索点が群れを構成し，解空間内を飛び回ることにより解を探索する．この手法は，連続型の非線形最適化問題を効率良く解くことができるとされている[3)]．

本論文では，PSO を用いた巡回セールスマン問題の解法について考察する．従来，巡回セールスマン問題の解は組合せ的な構造で表現されていたが，通常， PSO の解は実数値ベクトルなので，このままでは PSO を巡回セールスマン問題に適用することができない．そのため，巡回セールスマン問題の解に実数値ベクトルを対応付ける．そして，より良い解に対応する実数値ベクトルを PSO で探索することにより，最適な解を探索する．また，提案手法の有効性を確認するため，実際に巡回セールスマン問題に PSO を適用し，実験を行う．

2. Particle Swarm Optimization

Particle Swarm Optimization（PSO）は，鳥の群れの動きを可視化するために用いられる社会行動シミュレータを元に開発された多点探索型の最適化手法である[2)]．この手法では，鳥や魚に見立てた Particle と呼ばれる探索点が群れを構成し，解空間内を飛び回ることにより解を探索する．個々の Particle は位置，速度，それまでに自身が見つけた最良の位置情報を保有し，群れ全体の最良の位置情報を共有している．PSO の探索モデルは，これらの情報を用いて，目的関数値が小さい有望領域に探索を集中させせつつ，その領域内を多様に探索することができる[2)]．なお，目的関数に関する微分情報などを必要としないため，様々な問題への適用が容易であり，かつ基本的な算術演算を使用する簡単なアルゴリズムであるにも関わらず，連続型の非線型最適化問題を高速に解くことができるという特徴を持っている[3)]．

PSO では，各 Particle が位置，速度，それまでの探索で発見した最良の位置情報，群れ全体での最良の位置情報を基に探索を行い，位置を更新していく．k 回目の更新を行った後の i 番目の Particle の位置を x_i^k，速度を v_i^k とすると，次に更新を行った後の位置 x_i^{k+1}，速度 v_i^{k+1} は式 (1)，(2) により表される．

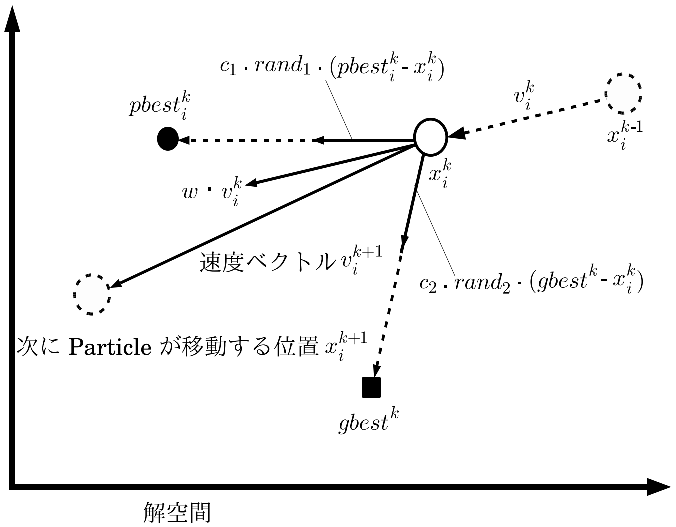

図 1 位置と速度の更新

$$v_i^{k+1} = w \cdot v_i^k + c_1 \cdot rand_1 \cdot (pbest_i^k - x_i^k) + c_2 \cdot rand_2 \cdot (gbest^k - x_i^k) \tag{1}$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \tag{2}$$

ここで w，c_1，c_2 は各項に対する非負の重み係数，$rand_1$，$rand_2$ は 0 から 1 までの乱数，$pbest_i^k$ は各 Particle 自身の最良の位置，$gbest^k$ は群れ全体の最良の位置である．図 1 のように，次に Particle が移動する位置 x_i^{k+1} は，これまで進んできた方向へ向かうベクトル $w \cdot v_i^k$，$pbest_i^k$ へ向かうベクトル $c_1 \cdot rand_1 \cdot (pbest_i^k - x_i^k)$，$gbest^k$ へ向かうベクトル $c_2 \cdot rand_2 \cdot (gbest^k - x_i^k)$ の 3 つを合成して決定される．PSO の基本的なアルゴリズムを以下に示す．

step 1 Particle の数と更新回数を設定する．

step 2 各 Particle の位置 x_i^0 と速度 v_i^0 を乱数で初期化する．また，w，c_1，c_2 を設定する．

step 3 現在の位置における評価値を算出し，$pbest_i^k$ と $gbest^k$ を更新する．

step 4 式 (1) で速度を更新し，式 (2) で位置を更新する．

step 5 設定した更新回数まで探索を繰り返したら，$gbest^k$ を出力して探索を終了する．そうでなければ **step 3** に戻る．

3. 提 案 手 法

本章では，PSO を，巡回セールスマン問題に適用する方法について考察する．従来，巡回セールスマン問題の解は組合せ的な構造で表現されているが，通常，PSO の解は実数値ベクトルなので，このままでは PSO を巡回セールスマン問題に適用することができない．そのため，巡回セールスマン問題の解に実数値ベクトルを対応付けることにより，PSO で解の探索を可能にする．本研究では，まず，PSO で枝の優先順位を決定すると考える．そして，優先順位の高い枝から順番に，次々と，巡回路が生じないように枝を選ぶ操作を繰り返すことで巡回路を生成する．そのため，枝の 1 つ 1 つに実数値ベクトルの各要素を対応付ける．そして，実数値ベクトルの各要素の小さい順に対応する枝を並べ，その系列が枝の優先順位を決定すると考えることにより，解に実数値ベクトルを対応させる．以下，詳細に説明する．

節点の数を n，節点を

$C_i \ \ (1 \leq i \leq n)$

とする．そして，節点 C_j, C_k を両端点とする枝を

$L_{j,k} \ \ (1 \leq j \leq n-1, j < k \leq n)$

とし，巡回路を，要素を $L_{j,k}$ とする系列で表現するものとする．このとき，枝の総数は $m = n(n-1)/2$ となるため，PSO の解の実数値ベクトルの要素の数は m とする．また，実数値ベクトルの各要素を x_l とし，実数値ベクトルを

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_m)$

とする．このとき，式 (3) に基づいて系列を構成する要素 $L_{j,k}$ と実数値ベクトルの要素 x_l を対応させる．

$$l = \frac{(2n-j)(j-1)}{2} + (k-j) \tag{3}$$

式 (3) に基づいて x_l と $L_{j,k}$ を対応させることで，x_l と $L_{j,k}$ を 1 対 1 で対応させることができる．ここで，x_l を値が小さい順に並び替え，$L_{j,k}$ も対応する x_l と同じ順番になるように並べる．そして，並べた $L_{j,k}$ の系列が実数値ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対応すると考える．

以下，具体的な例を挙げて説明する．例えば節点数 $n=4$ のとき，式 (3) に基づいて x_l と $L_{j,k}$ の対応を求めると，$x_1 \leftrightarrow L_{1,2}$，$x_2 \leftrightarrow L_{1,3}$，$x_3 \leftrightarrow L_{1,4}$，$x_4 \leftrightarrow L_{2,3}$，$x_5 \leftrightarrow L_{2,4}$，

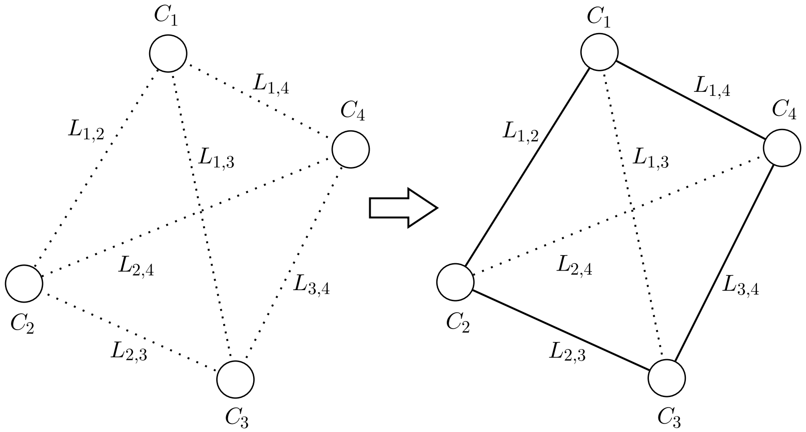

図 2 例における巡回路

$x_6 \leftrightarrow L_{3,4}$ となる．そして実数値ベクトルが，

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5.5, 1.8, 1.2, 2.0, 3.2, 0.3)$$

のとき，小さい順に並べた系列は

x_6 (0.3)，x_3 (1.2)，x_2 (1.8)，x_4 (2.0)，x_5 (3.2)，x_1 (5.5)

となり，枝の系列，すなわち優先順位は

$L_{3,4}$，$L_{1,4}$，$L_{1,3}$，$L_{2,3}$，$L_{2,4}$，$L_{1,2}$

となる．例えば，図 2 のように節点 C_1, C_2, C_3, C_4 が位置している場合，まず最も優先順位が高い $L_{3,4}$ と次に優先順位が高い $L_{1,4}$ を選ぶ．次に優先順位が高い枝は $L_{1,3}$ だが，この枝を選ぶと部分巡回路ができてしまうため，その次に優先順位が高い $L_{2,3}$ が選ばれる．そして，選んだ枝の数が $n-1$ となったので，最後に $L_{1,2}$ が選ばれる．結果，巡回路は図中の実線のようになる．なお，図中の破線は枝である．

本論文では，PSO が多点探索であることを生かし，少ない探索回数でより良い解を求めることを目的とする．そのため，欲張り法[4] で生成した解を，1 つの Particle の初期解とする．具体的には，枝の長さを対応する要素の初期値とする．こうすることで，長さが短い枝ほど優先順位が高くなる．例えば，節点数 3，節点を C_i，節点 C_j, C_k を両端点とする枝を $L_{j,k}$ とし，枝の長さが $L_{1,2} : 19, L_{1,3} : 6, L_{2,3} : 15$ である場合，初期解の一つは

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (19, 6, 15)$$

となる．欲張り法を用いた初期解生成を導入することで，複数個の Particle が欲張り法で生成した解の周辺を探索するため，少ない探索回数でより良い解を発見しやすいという利点がある．

4. 計算機実験

提案手法を巡回セールスマン問題に適用して，計算機実験を行った．本論文では，48 都市の問題である att48 と 137 都市の問題である gr137[5] に対して実験を行った．評価値を巡回路の総距離，評価回数を 20,000 回とした．また，Particle の初期速度を $-25.0 \leq v_i \leq 25.0$，速度（の絶対値）の上限を 50.0，Particle 数を 20 とした．Particle の位置ベクトル（解の実数値ベクトル）の各要素の初期値は，1 つの Particle は 3 章で説明した方法で設定し，その他の Particle は $0.0 \leq x_i \leq 100.0$ とした．PSO では，前述のように，式 (1)，(2) に従って Particle を移動する．文献 2) では，式 (1) のパラメータの慣性項 w は 0.7 ～ 0.8 程度に，結合係数 c_1，c_2 は 1.5 ～ 1.7 程度に設定することが推奨されている．

通常，PSO の対象は連続値最適化問題であるが，そのような問題と巡回セールスマン問題では，Particle の探索する空間が大きく異なるため，前述の推奨値が提案手法においても有効であるとは限らない．そのため，提案手法でどのようなパラメータが有効か調べる．具体的には，$c = c_1 = c_2$ とし，$w = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ と $c = 0.1, 0.2, \ldots, 2.0$ のそれぞれの組合せで実験を行った．

48 都市の問題に対して実験を行った結果を図 3，4 に示す．図中の w，c は式 (1) のパラメータ，評価値は PSO を 10 回実行し，それぞれの探索で得た解の評価値の平均であり，図 3 では評価値の平均を 3 次元グラフで，図 4 では評価値の平均を色の濃淡で表している．なお，評価値を色の濃淡で表した図は，色が濃い程良い解であることを表している．また，欲張り法で得られた評価値（初期解の評価値）は 40,160.4 である．

図 3，4 より，w，c が特定の値であると，良い解を探索していることがわかる．このことから，w，c には良い解を探索することができる組合せが複数存在すると考えられる．また，提案手法は多くのパラメータの組合せにおいて改善解を探索していたことがわかる．特に，w と c の値を両方共大きくした場合に良い評価値となる解を探索していた．また，最も良い評価値は，パラメータが $w = 0.7$，$c = 2.0$ のときに求めた解の評価値で，その値は，34,100.2 であった．提案手法が良い解を探索することができた理由として，提案手法は枝の長さを 1 つの Particle の各要素の初期値とし，枝の優先順位を決定して解を探索するため，より初期解の周辺を効率良く探索することができたと考えられる．

提案手法の有効性を示すため，局所探索法，シミュレーテッド・アニーリング法と探索結

Vol.2010-MPS-77 No.18
2010/3/4

果の比較を行った．両手法ともに 2-opt 近傍を用い，提案手法と同様に欲張り法を用いて求めた解を初期解として実験を行った．提案手法は $w = 0.7$，$c = 2.0$ と設定した．各手法を 10 回ずつ実行した結果の平均を図 5 に示す． 図 5 より，評価回数 2,000 回前後までにおいて，提案手法は局所探索法 , シミュレーテッド・アニーリング法よりも速く評価値が改善されているのがわかる．これは，複数の Particle が解を探索しているため，良い解を探索することができたためと考えられる．また，局所探索法では 6,000 回までに局所解に陥って，探索が止まってしまっているが，提案手法では局所解に陥ることなく探索が進んでいることがわかる．これは，複数の Particle が協調して行動することにより，局所解に陥っても次の解を探索することができたためと考えられる．さらに，提案手法は各手法の探索が終了した時点で，他手法よりも良い解を探索している．このように，48 都市の問題を用いた場合，提案手法は他手法と比較しても良い結果になっているといえる．また，参考までに 48 都市の問題に対して行った実験で得られた巡回路の例を図 6 に示す．

137 都市の問題に対して実験を行った結果を図 7，8 に示す．図中の w，c は式 (1) のパラメータ，評価値は PSO を 10 回実行し，それぞれの探索で得た解の評価値の平均であり，図 7 では評価値の平均を 3 次元グラフで，図 8 では評価値の平均を色の濃淡で表している．なお，評価値を色の濃淡で表した図は，色が濃い程良い解であることを表している．また，

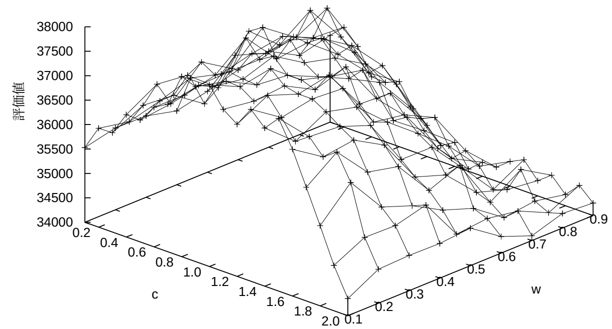

図 3　3 次元グラフで表示した 48 都市の問題に対する実験の結果

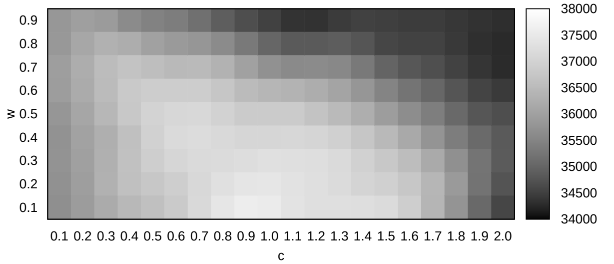

図 4　色の濃淡で表示した 48 都市の問題に対する実験の結果

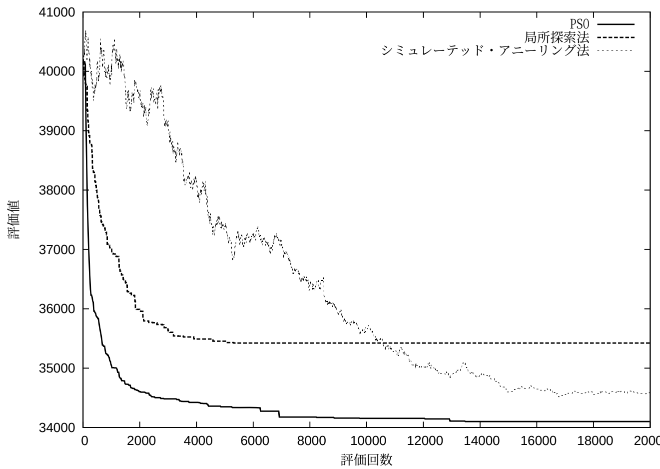

図 5　48 都市の問題に対する提案手法と他手法との比較

Vol.2010-MPS-77 No.18
2010/3/4

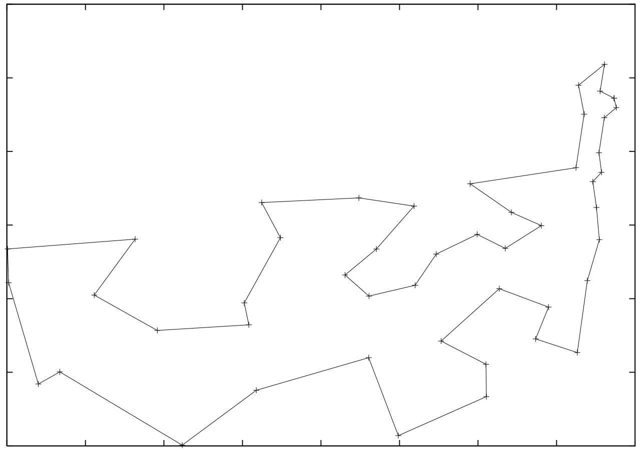

図 6 48 都市の問題に対する実験で得られた巡回路

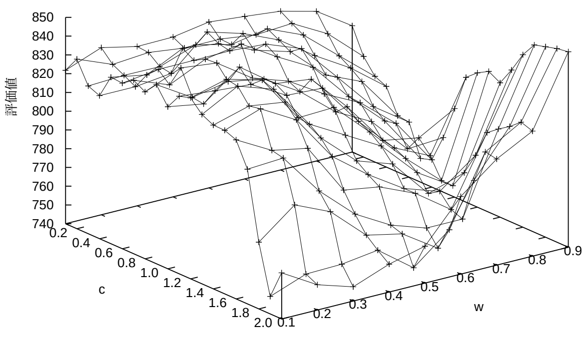

図 7 3 次元グラフで表示した 137 都市の問題に対する実験の結果

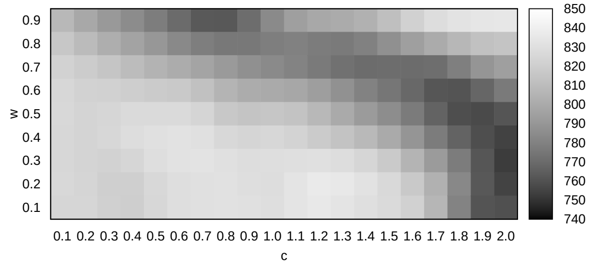

図 8 色の濃淡で表示した 137 都市の問題に対する実験の結果

欲張り法で得られた評価値は 846.5 である．

図 7，8 より，48 都市の問題とは違い，w の値と c の値の両方が大きい場合，あまり良い解を探索することができなかったことがわかる．しかし，$0.1 \leq w \leq 0.6$，$1.8 \leq c \leq 2.0$ のそれぞれの組合せでは，特に良い解を探索していた．これは，48 都市の問題と 137 都市の問題は問題の規模が違うため，有効なパラメータが異なるためであると考えられる．また，最も良い評価値は $w = 0.5$，$c = 1.9$ のときに求めた解の評価値で，その値は，745.5 であった．

局所探索法，シミュレーテッド・アニーリング法と探索結果の比較を行った．両手法ともに 2-opt 近傍を用い，提案手法と同様に欲張り法を用いて求めた解を初期解として実験を行った．提案手法はパラメータを，$w = 0.5$，$c = 1.9$ と設定した．各手法を 10 回ずつ実行した結果の平均を図 9 に示す．図 9 より，評価回数 8,000 回前後までにおいて，提案手法は局所探索法，シミュレーテッド・アニーリング法よりも速く評価値が改善されていることがわかる．また，提案手法では探索初期に評価値が大幅に改善されているが，局所解に陥ることなく探索が進んでいることがわかる．さらに，提案手法は各手法の探索が終了した時点で，他手法よりも良い解を探索している．このように，137 都市の問題に対して実験を行った場合，48 都市の問題と同様に，提案手法は他手法と比較しても良い結果になっていると

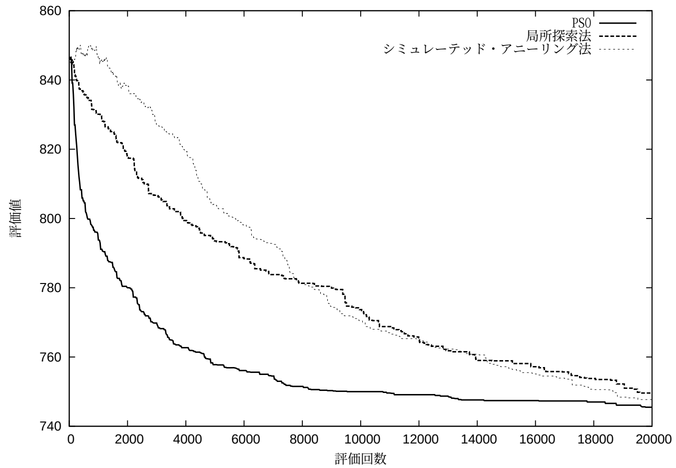

図 9　137 都市の問題に対する提案手法と他手法との比較

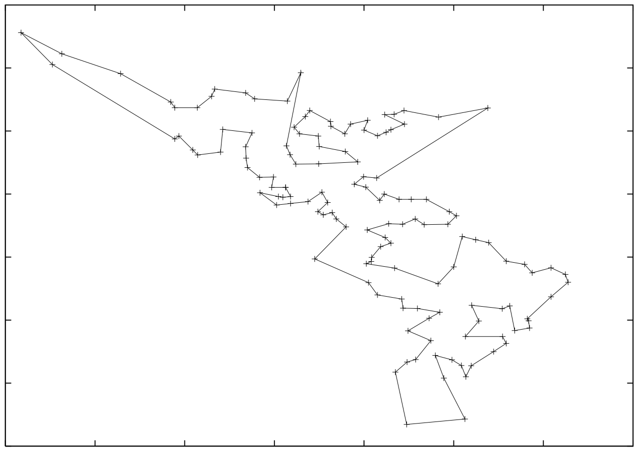

図 10　137 都市の問題に対する実験で得られた巡回路

いえる．また，参考までに 137 都市の問題に対して行った実験で得られた巡回路の例を図 10 に示す.

5. ま と め

本論文では，PSO を用いた巡回セールスマン問題の解法について考察した．また，提案手法の有効性を確認するために，実際に PSO を巡回セールスマン問題に適用し，重み係数 w，結合係数 c_1, c_2 を変化させて実験を行った．また，他手法と比較を行った。実験の結果，提案手法は，48 都市の問題と 137 都市の問題に対して，局所探索法とシミュレーテッド・アニーリング法が探索した解よりも良い解を，少ない探索回数で探索することができた．また，交差の無い巡回路を求めることができた.

参 考 文 献

1) 伊庭斉志：進化論的計算手法，オーム社 (2005).
2) 平岡創士，岡本卓，相吉英太郎：繰り返し型探索指針による Particle Swarm Optimization の改良，電気学会論文誌 C，Vol.128，No.7，pp.1143-1153 (2008).
3) 井出東，安田恵一郎：適応型 Particle Swarm Optimization に関する基礎的検討，電気学会論文誌 C，Vol.124，No.2，pp.550-557 (2004).
4) 柳浦睦憲，茨木俊秀：組合せ最適化 -メタ戦略を中心として-，朝倉書店 (2001).
5) TSPLIB：http://elib.zib.de/pub/Packages/mp-testdata/tsp/tsplib/tsplib.html