情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report

Vol.2010-AL-128 No.11
2010/1/26

オイラー回帰長問題の近似不可能性の証明

森　和樹[†1]　神保秀司[†1]

グラフのオイラー小道とは，すべての辺を丁度 1 回ずつ通る閉じた歩道のことであり，オイラー小道をもつグラフをオイラーグラフと呼ぶ．オイラーグラフに対して，オイラー小道の最短部分閉路の長さの最大値をそのオイラーグラフのオイラー回帰長と呼ぶ．オイラー回帰長を決定する問題が NP 完全であることが既に示されている．本報告では，従来の結果を発展させせオイラー回帰長を求める多項式時間近似アルゴリズムで定数近似率のものが存在しないことが示される．さらに，入力例のオイラーグラフ G の最大次数を特定の定数以下に制限した場合でも，任意の正整数 k について，$\rho(|E(G)|) = O(|E(G)|^{1-(1/k)})$ が成り立つならば近似率 $\rho(|E(G)|)$ の多項式時間アルゴリズムが存在しないことが示される．

Proofs of impossibility of approximation algorithms for calculating Eulerian recurrent lengths

Mori, Kazuki[†1] and Shuji, Jimbo[†1]

An Eulerian circuit in a graph is a closed walk in the graph which visits each edge of the graph exactly once. A graph is called an Eulerian graph, if there is an Eulerian circuit in the graph. The Eulerian recurrent length of an Eulerian graph is the maximum length of a shortest subcycle in an Eulerian circuit of the Eulerian graph. It has been shown that it is NP-complete to determine the Eulerian recurrent length of an Eulerian graph. In this report, by developing the known result, it is shown that there is no polynomial-time approximation algorithm of constant factor for the Eulerian recurrent length of an Eulerian graph. Furthermore, it is shown that even in the case where the maximum degree of the Eulerian graphs input is at most a particular constant, for any $k > 0$, if $\rho(|E(G)|) = O(|E(G)|^{1-(1/k)})$ holds then there is no polynomial-time factor $\rho(|E(G)|)$ approximation algorithm for the same problem.

1. まえがき

グラフのオイラー小道とは，すべての辺を丁度 1 回ずつ通る閉じた歩道のことであり，オイラー小道をもつグラフをオイラーグラフと呼ぶ．オイラーグラフに対して，オイラー小道の最短部分閉路の長さの最大値をそのオイラーグラフのオイラー回帰長と呼ぶ．オイラー回帰長は，記号列の周期性の研究に由来し，グラフ理論上の概念として提案された．文献 1) では，完全二部グラフの正確なオイラー回帰長を表す閉じた数式が導かれ，完全グラフのオイラー回帰長が定数の差を除いて決定された．さらに，文献 2) では，オイラー回帰長を決定する問題が NP 完全であることが示されている．

文献 2) では，小道分解（trail decomposition）および道分解（path decomposition）と呼ぶ概念を使ってオイラー回帰長決定問題の NP 完全性を証明するための 3CNF（各基本和が丁度 3 つのリテラルからなる和積標準形）からオイラーグラフを構成する帰着アルゴリズムを設計している．本報告では，オイラー回帰長を求める定数近似率多項式時間近似アルゴリズムが存在しないことが上の帰着アルゴリズム使って直ちに導かれることを示し，さらに，入力例のオイラーグラフ G の最大次数を特定の定数以下に制限した場合でも，任意の正整数 k について，$\rho(|E(G)|) = O(|E(G)|^{1-(1/k)})$ が成り立つならばオイラー回帰長を計算する近似率 $\rho(|E(G)|)$ の多項式時間アルゴリズムが存在しないことが示される．

以下，2 節で主要な概念と表記法について説明され，3 節および 4 節で多項式時間決定性アルゴリズムによるオイラー回帰長問題の近似不可能性についての主要な結果が述べられる．5 節で本研究についての補足事項が述べられる．

2. 諸定義

グラフ理論に関連した用語あるいは定義は，主に文献 4) に従っている．グラフ G は点集合と呼ばれる有限集合 V と辺集合と呼ばれる有限集合 E の順序対 (V, E) であり，V の要素を G の点，E の要素を G の辺と呼ぶ．G の各辺 e には，G の点からなる非順序対 $\{v, w\}$ が対応付けられていて，e は v と w を結ぶ辺であるという．辺集合とそれに結び付けられた対応付けに基づいて，G の点の非順序対の多重集合を重複度をその非順序対に対応する辺の本数とすることにより定義できる．この多重集合のことも G の辺集合，あるい

†1 岡山大学大学院自然科学研究科
Okayama University Graduate School of Natural Science and Technology

Vol.2010-AL-128 No.11
2010/1/26

は，辺族と呼ぶことがある．本報告におけるグラフは，一般に無向グラフとも呼ばれる．

歩道とは，点と辺が交互に並んだ列であり，点で始まり点で終わり，かつ，各辺がその両側の点を結んでいるもののことである．始まりの点を**始点**，終わりの点を**終点**と呼ぶ．始点と終点が一致する歩道は，**閉じ**ているという．閉じた歩道は，どの点も始点かつ終点になることができる．点と辺が $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ と並んでいる歩道は，

$$P = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_k} v_k$$

のように表す．点 v_{i-1} と点 v_i の間に並ぶ辺が周知であるときは，右矢印の上の e_i の記述を省略してよい．歩道 P の**長さ**は，歩道の中の辺の出現回数 k である．

上の歩道 P が

条件: $1 \leqq i < j \leqq k$ を満たすどのような 2 整数 i および j についても $e_i \neq e_j$ が成り立つ．

を満たすとき，P は，**小道**であるという．さらに，P が

条件: $1 \leqq i < j \leqq k$ を満たすどのような 2 整数 i および j についても $v_i \neq v_j$ が成り立ち，かつ，$1 \leqq i < k$ を満たすどのような整数 i についても $v_0 \neq v_i$ が成り立つ．

を満たすとき，P は，**道**であるという．さらに，長さが 1 以上である閉じた道を**閉路**と呼ぶ．**オイラー小道**とは，すべての辺を通る閉じた小道のことであり，**オイラーグラフ**とは，オイラー小道をもつグラフのことである．

歩道 P の部分列

$$C = v_i \xrightarrow{e_{i+1}} v_{i+1} \xrightarrow{e_{i+2}} \cdots \xrightarrow{e_j} v_j$$

が閉路であるとき，C を歩道 P の**部分閉路**と呼ぶ．P が閉じた歩道であり，かつ，v を始点かつ終点とする P の表現の部分列 C が閉路であるとき，C は，P のどのような表現の下でも P の部分閉路であることに注意されたい．

オイラー回帰長問題は，次の入力例，解，および，目的関数をもつ最大化問題である．

入力例: オイラーグラフ G.

入力例のサイズ: G の辺の本数 $|E(G)|$.

解: G のオイラー小道 C.

目的関数: オイラー小道 C の最短閉路長.

種類: 最大化問題.

オイラーグラフ G についてのオイラー回帰長問題の最適解を G の**オイラー回帰長**と呼ぶ．さらに，**オイラー回帰長決定問題**は，次の決定問題である．

入力例: オイラーグラフ G および 正整数 k.

入力例のサイズ: G の辺の本数 $|E(G)|$.

肯定解であるための条件: G のオイラー回帰長 l は，$l \geqq k$ を満たす.

次に定義する**小道分解**および**道分解**の概念は，文献 2) において，オイラー回帰長決定問題の NP 完全性の証明のための 3CNF からオイラーグラフを構成する帰着アルゴリズムを説明するために導入された．

定義 1 グラフには奇数次数の点が偶数個存在する．2 個以上の奇数次数の点 $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ をもつグラフ G は，$\{v_{a(1)}, v_{b(1)}, v_{a(2)}, v_{b(2)}, \ldots, v_{a(k)}, v_{b(k)}\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k}\}$ を満たす G の奇数次数の点の順序対の集合 $\{(v_{a(1)}, v_{b(1)}), (v_{a(2)}, v_{b(2)}), \ldots, (v_{a(k)}, v_{b(k)})\}$ を作り，G の辺集合を $v_{a(i)}$ を始点，$v_{b(i)}$ を終点とする閉じていない k 本の小道 P_i ($i \in 1, 2, \ldots, k$) に分割することができる．このような小道の集合 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ を G の**小道分解**と呼ぶ．もし，$P_1, P_2, \ldots, P_k$ がすべて道になっていれば，$\mathcal{P}$ を G の**道分解**と呼ぶ．

近似アルゴリズムに関連した用語あるいは定義は，主に文献 3) に従っている．$\mathcal{A}$ は，最大化問題 Π の入力例 I が与えられたとき近似解 s を返す多項式時間近似アルゴリズムとし，I の最適解を $\mathrm{OPT}(I)$ で表す．I に対する解 s の値を $f_\Pi(I, s)$ で表し，δ を正整数全体からなる集合を定義域とし正の有理数を値に取る関数とする．さらに，$|I|$ で入力例 I のサイズを表す．このとき

$$f_\Pi(I, s) \geqq \delta(|I|)\mathrm{OPT}(I)$$

が成り立つならば，$\mathcal{A}$ を Π に対する近似率δ の近似アルゴリズムと呼ぶ．

3. オイラー回帰長問題を解く定数近似率の近似アルゴリズムの時間計算量

文献 2) では，オイラー回帰長決定問題において入力例の中の正整数 k を 153 に固定した場合の決定問題の NP 完全性を証明するために問題 3SAT の任意の入力例，すなわち 3CNF C をオイラーグラフ $G(C)$ に変換する多項式時間アルゴリズムを設計し，$G(C)$ が肯定解をもつことと C が充足可能である（肯定解をもつ）ことが同値であることを証明している．この証明の要点は，次の命題である．

命題 1 任意の 3CNF C に対して，次の性質をもつグラフ $G_0(C)$ を構成する多項式時間アルゴリズムが存在する．

$G_0(C)$ は，偶数個の端点と偶数次数の点からなり，かつ，C の充足可能性と $G_0(C)$ の道分解可能性が同値である．さらに，正の定数 $\gamma \leqq 152$ が存在して，C が充足可能ならば，$G_0(C)$ の小道分解は，常に長さ γ 以下の部分閉路をもつ．

Vol.2010-AL-128 No.11
2010/1/26

$G_0(C)$ は，充足可能性判定要素（satisfaction-testing component）と呼ばれるグラフの各端点に変数設定要素（variable-setting component）と呼ばれるグラフの端点を 1 対 1 に対応させ，対応する 2 点の対すべてについて，対に属する 2 点を同一視することによって得られる．このとき，変数設定要素の端点で充足可能性判定要素の端点と対を作らなかったものが $G_0(C)$ の端点であり，それらの個数を N で表す．

$G(C)$ は，$G_0(C)$ と同数の N 個の端点をもつ後始末要素（garbage-collecting component）と呼ばれる部分グラフ Γ_C を構成し，次に $G_0(C)$ の端点 v と Γ_C の端点 w からなる対 $\{v, w\}$ を $G_0(C)$ と Γ_C のすべての端点が現れるように N 個作り，次に各対に属する 2 点を同一視することにより得られる．後始末要素 Γ_C は，次数 N の点 z，N 個の端点 $y_1, y_2, \ldots, y_N$，および，$75N$ 個の次数 2 の点からなり，かつ，Γ_C から z を除去して得られるグラフ $\Gamma_C - z$ は，76 個の点からなる道グラフ P_{76} を N 個複製したものの和

$$\overbrace{P_{76} \cup P_{76} \cup \cdots \cup P_{76}}^{N}$$

である．

任意の整数 $\mu \geqq 153$ に対して，Γ_C の部分グラフの道グラフに属する点の個数 76 を $\lceil(\mu - 1)/2\rceil \geqq 76$ に変更することにより得られるグラフを $G_\mu(C)$ で表したとき，$G(C)$ と同様に $G_\mu(C)$ は，多項式時間で構成することが可能である．このように構成された $G_\mu(C)$ は，C が充足不可能ならば，$G(C)$ と同様に，どのオイラー小道も 153 未満の長さの部分閉路をもつことは明らかである．一方，C が充足可能ならば，$G_\mu(C)$ のオイラー小道 E を部分グラフ $G_0(C)$ により誘導される E の小道分解が道分解になるように構成すれば，E の部分閉路の長さは，μ 以上である．従って，任意に大きい正定数 $\mu \geqq 153$ に対して 3CNF C からオイラーグラフ $G_\mu(C)$ を多項式時間で構成し，C が充足不可能ならば $G_\mu(C)$ のオイラー回帰長は 153 未満であり，かつ，C が充足可能ならば $G_\mu(C)$ のオイラー回帰長は μ 以上であるようにできる．すなわち，任意の定数 $c > 0$ に対して，変換前の NP 完全問題の入力例が肯定解をもつ場合ともたない場合の変換後のオイラーグラフのオイラー回帰長の比率が常に c より大きくなるようにできる．従って，次の定理が導かれる．

定理 1　$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ を仮定すれば，任意の $c \geqq 1$ に対して，オイラー回帰長問題に対する近似率 c の多項式時間近似アルゴリズムは存在しない．

4. 定数次数のオイラーグラフに対するオイラー回帰長問題の近似不可能性

この節では，前節で示された，$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ を仮定したときのオイラー回帰長問題の多項式時間近似不可能性についての結果を次のように改良する．まず，入力例となるオイラーグラフを最大次数が特定の定数以下のものに制限した場合のオイラー回帰長問題の多項式時間近似不可能性について考察する．入力例をより小さいオイラーグラフのクラスに制限しても制限しないときと同様に多項式時間近似不可能性についての結果が得られることが望ましい．次に，オイラー回帰長問題を解く多項式時間近似アルゴリズムの近似率の下界を入力サイズ s に対する関数 $\rho(s)$ として精密に評価する．ただし，オイラー回帰長問題の入力例であるオイラーグラフ G のサイズを G 辺数 $|E(G)|$ で定義する．

前節で述べたように，文献 2) に従って構成されたオイラーグラフ $G(C)$ は，C からグラフ $G_0(C)$ と後始末要素 Γ_C を作り，それらの端点に対して同一視の操作を施して得られる．この構成方法において，後始末要素 Γ_C を次に定義する幅 $N/2$，長さ l の網グラフ $N(N/2, l)$ に置き換えて得られるグラフを $G^N(C, l)$ で表す．ただし，l の値は，$l \geqq N - 1$ が成り立つように選ぶ．

定義 2　非負整数 m および整数 $n \geqq 3$ に対して，**網グラフ** $N(n, m)$ を次のように再帰的に定義する．$N(n, m)$ は，$2n$ 個の端点をもつ単純グラフであり，端点には $x_1, x_2, \ldots, x_n$ および $y_1, y_2, \ldots, y_n$ という名前が付いている．
$N(n, 0)$ は，n 個の 1 辺からなる道グラフの和 $(\{x_1, y_1\}, \{x_1y_1\}) \cup (\{x_2, y_2\}, \{x_2y_2\}) \cup \cdots \cup (\{x_n, y_n\}, \{x_ny_n\})$ である．
偶数 k に対して $N(n, k)$ が定義されているとき，$N(n, k+1)$ は，各 $i = 1, 2, \ldots, \lceil(n-1)/2\rceil$ について，

　2 つの 1 辺からなる道グラフ $(\{a, b\}, \{ab\})$ および $(\{c, d\}, \{cd\})$ を新たに作り，4 点 y_{2n-1}, y_{2n}, a, c を 1 点に同一視し，さらに，点 b に y_{2n-1} の名前を付け，点 d に y_{2n} の名前を付ける

という操作を施して得られるグラフである．
奇数 k に対して $N(n, k)$ が定義されているとき，$N(n, k+1)$ は，各 $i = 1, 2, \ldots, \lfloor(n-1)/2\rfloor$ について，

　2 つの 1 辺からなる道グラフ $(\{a, b\}, \{ab\})$ および $(\{c, d\}, \{cd\})$ を新たに作り，4 点 y_{2n}, y_{2n+1}, a, c を 1 点に同一視し，さらに，点 b に y_{2n} の名前を付け，点 d に y_{2n+1} の名前を付ける

という操作を施して得られるグラフである．

例として網グラフ $N(5, 4)$ を図 1 に図示する．

オイラーグラフ $G^N(C, l)$ は，グラフ $G_0(C)$ と $N(N/2, l)$ から次のように構成す

Vol.2010-AL-128 No.11
2010/1/26

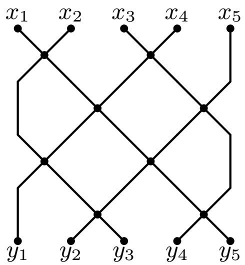

図 1　網グラフ $N(5,4)$
Fig. 1　Net graph $N(5,4)$

る．$G_0(C)$ の N 個の端点を同数の点からなる 2 つの集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{N/2}\}$ と $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{N/2}\}$ に任意に分割する．次に各 $i \in \{1, 2, \ldots, N/2\}$ に対して点 a_i と x_i を同一視し，さらに，点 b_i と y_i を同一視することにより得られるグラフを $G^N(C,l)$ で表す．$G_0(C)$ の点の最大次数が 12 であることと $N(N/2,l)$ の最大次数が 4 であることから次の補題が導かれる．

補題 2　任意の 3CNF C および任意の非負整数 l に対して，$G^N(C,l)$ の点の最大次数は，12 である．

グラフ $N(C,l)$ は，次数 4 の点を比較器と見なすことにより比較ネットワークと見なすことができる．さらに，$l \geqq N-1$ が成り立つならば，その比較ネットワークは，ソーティング・ネットワークになっている．このことから次の補題が導かれる．

補題 3　不等式 $l \geqq N-1$ が成り立つならば，$G^N(C,l)$ は，任意の置換 $\sigma : \{1, 2, \ldots, N/2\} \to \{1, 2, \ldots, N/2\}$ に対して $\{(x_1, y_{\sigma(1)}), (x_2, y_{\sigma(2)}), \ldots, (x_{N/2}, y_{\sigma(N/2)})\}$ を始終点対集合とする道分解をもつ．

補題 3 より次の定理が成り立つ．証明は，省略する．

定理 4　任意の 3CNF C および任意の整数 $l \geqq N-1$ に対して，C が充足不可能ならば $G^N(C,l)$ のオイラー回帰長は 153 未満であり，かつ，C が充足可能ならば $G^N(C,l)$ のオイラー回帰長は $\lfloor l/2 \rfloor + 3$ 以上である．ただし，N は，$G_0(C)$ の端点の個数を表す．

補題 2 より，$G^N(C,l)$ のサイズ $|E\left(G^N(C,l)\right)|$ は，点の個数 $|V\left(G^N(C,l)\right)|$ と同オーダであり，従って，lN と同オーダである．さらに，N が 3CNF C におけるリテラルの出現回数と同オーダであることと正整数 k に対して $l = N^k$ とおいたときの定理 4 より次の定理が成り立つ．

定理 5　任意の正整数 k に対して，最大次数が 12 以下のオイラーグラフのクラスに対するオイラー回帰長問題を解く多項式時間近似アルゴリズムで，近似率 $\rho(|E(G)|)$ が

$$\rho(|E(G)|) = O\left(|E(G)|^{1-(1/k)}\right)$$

を満たすものは，存在しない．

5. あとがき

グラフ $G^N(C,l)$ は，2 点の同一視という操作を繰り返し適用して構成されているため，次数 2 の点を多数含んでいる．これらの各点について，その点が接続している 2 本の辺のうちの 1 本を縮約すると端点を除く各点の次数が 4 以上であるグラフが得られ，この新たに得られたグラフを使って本報告と同様の議論をすることができる．従って，定理 5 におけるオイラーグラフのクラスを各点の次数が 4 以上 12 以下のオイラーグラフのクラスに置き換えることができる．

グラフ $G_0(C)$ が多重辺をもつため，グラフ $G^N(C,l)$ は，単純グラフではない．定理 5 におけるオイラーグラフのクラスを各点の次数が定数以下の単純グラフであるオイラーグラフのクラスに置き換えるためには，$G_0(C)$ に相当するグラフを単純グラフで構成する必要がある．

3CNF C が充足不可能な場合に $G_0(C)$ に含まれる部分閉路の長さの最大値は，$G_0(C)$ に相当するグラフの改良により 152 よりもかなり小さい値になると予想する．

参考文献

1) 神保秀司，乾　勇治，橋口攻三郎：オイラー小道上の同一点間の間隔について，数理解析研究所講究録， Vol.1106, pp.25–36 (1999).
2) Jimbo, S., Oshie, Y. and Hashiguchi, K.: The NP-completeness of EULERIAN RECURRENT LENGTH, 数理解析研究所講究録， Vol.1437, pp.107–115 (2005).
3) Vazirani, V.V.: 近似アルゴリズム，シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002).（浅野 孝夫 翻訳: Approximation Algorithms, Springer (2001).）.
4) Wilson, R.J.: グラフ理論入門 – 原書第 4 版，近代科学社 (2001).（西関 隆夫 翻訳: Introduction to Graph Theory (4th ed.), Addison Wesley (1996).）.