

## 代用電荷法による平行/共線スリット領域への 数値等角写像

天 野 要<sup>†1</sup> 李 涛<sup>†1</sup>  
遠 藤 慶 一<sup>†1</sup> 岡 野 大<sup>†1</sup>

数値等角写像は科学技術計算の重要な研究課題である。この論文では非有界な多重連結領域から一般的な正準平行スリット領域と共線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験で検証する。この方法では、代用電荷法に基づいて一対の調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で近似し、表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を構成することができる。

## Numerical Conformal Mappings onto Parallel and Collinear Slit Domains by the Charge Simulation Method

KANAME AMANO,<sup>†1</sup> TAO LI,<sup>†1</sup> KEIICHI ENDO<sup>†1</sup>  
and DAI OKANO<sup>†1</sup>

Numerical conformal mappings are important in scientific computations. In this paper, we present a numerical method for the conformal mapping of unbounded multiply connected domains onto the canonical parallel slit domain, and then the collinear slit domain. We approximate a pair of harmonic functions by a linear combination of complex logarithmic functions based on the charge simulation method, and obtain a simple form of approximate mapping functions with high accuracy. Some numerical examples show the effectiveness of our method.

<sup>†1</sup> 愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻  
Department of Electrical and Electronic Engineering and Computer Science, Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

### 1. はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題であり、理工学への応用が広い。しかし、厳密な写像関数が知られている場合は限られている。それゆえ、数値等角写像は科学技術計算の重要な課題として古くから研究されている<sup>11),12),20),28),53)</sup>。

数値等角写像の方法は問題領域から標準領域への写像を求める方法と、逆に標準領域から問題領域への写像を求める方法に大別される<sup>53)</sup>。いずれの方法も未知の境界対応関数を含む積分方程式に基づくことが多い。問題領域から標準領域への場合には、一般的に線形な積分方程式を得ることができて、Symm<sup>48)-50)</sup>の積分方程式法が著名である。これは、調和関数の1重層対数ポテンシャル表現により、等角写像の問題を境界対応関数の導関数であるソース密度を未知量とした第1種Fredholm型の積分方程式に帰着させたものである。Symmはソース密度を階段関数で近似した。その後、Gaier<sup>13),14)</sup>は解の存在と一意性を証明し、Hayesら<sup>19)</sup>はソース密度の区分多項式近似で計算精度を改善し、Houghら<sup>22),23)</sup>はスプライン関数に特異関数を組み合わせて角点の特異性の問題を解消している。これらの方法の計算量は、境界上での離散化数を $N$ として、連立1次方程式の数値計算に必要な $O(N^3)$ である。また、Berrut<sup>8)</sup>、Henrici<sup>21)</sup>、Reichel<sup>44)</sup>はSymmの積分方程式法を基礎にFFTを用いた $O(N^2 \log N)$ の反復法を提案している。一方、標準領域から問題領域への場合には、積分方程式は非線形であり、Theodorsen<sup>51)</sup>の積分方程式法が著名である。これは等角写像の問題を境界対応関数を未知量とした積分方程式に帰着させたものである。数値解法としては様々な反復法が用いられている<sup>16)-18),47)</sup>。その計算量はFFTを用いて $O(N \log N)$ であるが、問題領域から標準領域への場合より大きな $N$ の値を必要とすることが多い。

このような背景の中で、天野<sup>1)-3),5)</sup>は数値等角写像にポテンシャル問題の数値解法として知られていた代用電荷法<sup>32)</sup>を適用した。これは調和関数を対数関数の1次結合で表現し、等角写像の問題を未定係数を未知量とした連立1次方程式に帰着させたものである。計算量は電荷数を $N$ として $O(N^3)$ であるが、拘束点と電荷点を適切に配置すると比較的小さな $N$ で高い精度が得られる。この方法は数値積分が不要であり、一定の条件下では表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を与える。得られた境界上の対応関係を用いて、逆に標準領域から問題領域への近似写像関数を構成することも可能である<sup>4)</sup>。同じころ、Katsuradaら<sup>25)</sup>は代用電荷法にはじめて数学的な収束証明を与え、誤差が $N$ に対して指数的に減少することを示している。代用電荷法については桂田・岡本<sup>26),41)</sup>、室田<sup>33)</sup>、Ogataら<sup>37)</sup>等も参照されたい。

多重連結領域の等角写像は単連結領域の場合と様相が異なる．まず，単位円板領域のような単一の標準領域は存在しない．等角写像できるのは領域の多重度  $n$  と  $3n - 6$  ( $n \geq 3$ ) 個のモジュラスと呼ばれる保存量が同じ領域間に限られる．そこで領域の幾何学的な形状に着目して多重度とモジュラスの値に依存しない正準領域を設定するという方法がとられる．そのような領域には，平行スリット領域，円弧スリット領域，放射スリット領域，円弧スリットをともなう円板領域，円弧スリットをともなう円環領域等がある<sup>34)</sup>．これらの正準スリット領域への等角写像は流体力学，電磁気学，電気工学等への応用上重要である．しかし，簡単で精度の高い数値計算法はあまり知られていなかった．

代用電荷法はこれらの等角写像にも比較的簡単に適用することができる．天野ら<sup>6),7)</sup> は与えられた Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から平行スリット領域，円弧スリット領域，放射スリット領域への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験で検証した．これらのすべての問題を係数行列が同じ連立 1 次方程式に帰着できるので，LU 分解は 1 度行えばよい．得られた近似写像関数は，たとえばポテンシャル流問題への応用では，障害物の周囲の一樣流，渦流，湧き出し（吸い込み）流だけでなく，重ね合わせによって，複数の渦や湧き出しをともなう一樣流に対しても簡単に適用できる．また，Okano ら<sup>42)</sup> は有界な多重連結領域から円弧スリットをともなう円板領域，円弧スリットをともなう円環領域への近似写像関数を構成し，積分方程式法<sup>44)</sup> の結果との精度比較も行っている．

この論文では，一般的な平行スリット領域と共線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験で検証する．論文の構成は次のとおりである．2 章では，スリットが実軸となす角  $\theta$  を任意に指定して，非有界な多重連結領域から平行スリット領域への等角写像  $w = f_\theta(z)$  の近似写像関数を構成する．3 章では，非有界な 2 重連結領域からスリットが同一直線上に位置する共線スリット領域への等角写像の近似写像関数を構成する．この場合の角  $\theta$  は問題領域に対して定まる未知の定数となる．いずれの場合でも，得られた近似写像関数を用いて，写像関数の任意階数の導関数や写像定理に現れる Laurent 級数を簡単に計算することができる．4 章では，結論と今後の課題を記す．

なお，一般角  $\theta$  の平行スリット領域への等角写像は  $\theta = 0$  と  $\theta = \pi/2$  の場合の近似写像関数の合成

$$f_\theta(z) = e^{i\theta} [\cos \theta f_0(z) - i \sin \theta f_{\pi/2}(z)]$$

で計算することも可能である<sup>7)</sup>．しかし，一般角  $\theta$  の平行スリット領域は円弧スリット領域，

放射スリット領域と並ぶ最も基本的な正準スリット領域であり<sup>34)</sup>， $f_\theta(z)$  の直接的な計算法と近似表現形式は数値等角写像の応用上も重要である．たとえば，文献 7) には  $\theta = 0$  方向の一樣流中に渦や湧き出しのあるポテンシャル流の複素速度ポテンシャルを  $f_0(z)$  の近似関数  $F_0(z)$  と円弧スリット領域や放射スリット領域への近似写像関数を用いて簡単に構成できることが記されている．しかし，これを上記のような表現形式で  $F_\theta(z)$  に一般化した表現はやや冗長である．また，近似写像関数  $F_\theta(z)$  は解析的で，これを用いて  $f_\theta(z)$  の導関数  $f_\theta^{(k)}(z)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を簡潔に近似表現できる．導関数  $f_\theta'(z)$  は一樣流の複素速度すなわち流速場を与えるという意味で重要である．しかし，その表現もまた冗長である．さらに， $F_\theta(z)$  の直接的な構成法は共線スリット領域の場合の近似写像関数の簡潔な構成法を与える．共線スリット領域の特徴は幾何学的な構造が簡単なことである．この特徴に注目して，3 章では共線スリット領域への数値等角写像による境界適合型の格子生成の可能性についても検討する．

以下では  $f_\theta(z)$  を単に  $f(z)$  と記す．

## 2. 平行スリット領域への数値等角写像

### 2.1 写像定理と問題

図 1 のように無限遠点を含み互いに平行な直線分状のスリット  $S_1, S_2, \dots, S_n$  をともなう複素平面の全体を平行スリット領域と呼ぶ．ここでは  $z = x + iy$  平面上の Jordan 閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の外側の無限遠点を含む非有界な  $n$  重連結領域  $D$  から  $w = u + iv$  平面上の平行スリット領域への等角写像  $w = f(z)$  を考える．次の定理が知られている<sup>34)</sup>．

定理 1 上記の平行スリット領域への等角写像は，スリット  $S_1, S_2, \dots, S_n$  が実軸となす角  $\theta$  を任意に指定し， $f(\infty) = \infty$  かつ無限遠点を中心とするローラン級数が

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (1)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる．

この等角写像の写像関数を

$$f(z) = z + ie^{i\theta} (g(z) + ih(z)) \quad (2)$$

と表現する． $g(z) = g(x, y)$  と  $h(z) = h(x, y)$  は  $D$  で調和な関数とその共役対で，無限遠点における正規化条件

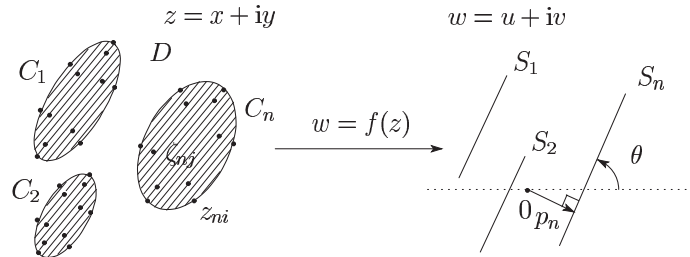


図 1 平行スリット領域への等角写像 ( $\zeta_{nj}$  は電荷点,  $z_{ni}$  は拘束点)

Fig. 1 Conformal mapping onto the parallel slit domain ( $\zeta_{nj}$  is for charge points and  $z_{ni}$  collocation points).

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad g(\infty) + ih(\infty) = 0 \tag{3}$$

と, 閉曲線  $C_m$  が実軸と角  $\theta$  をなす直線スリット  $S_m$  に移るという境界条件

$$\text{Im}(e^{-i\theta} f(z)) = p_m, \quad \text{i.e.,} \quad g(z) - p_m = -\text{Im}(e^{-i\theta} z) \tag{4}$$

$(z \in C_m, m = 1, 2, \dots, n)$

を満たさなければならない.  $p_m$  は  $w$  平面上の原点からスリット  $S_m$  を含む直線までの符号付き距離を意味する未知の定数である.

こうして問題は, 式 (3) と (4) を満たす調和関数対  $g(z)$  と  $h(z)$  を定数  $p_m$  の値とともに求めることに帰着する.

### 2.2 代用電荷法の適用

この調和関数対に代用電荷法を適用して複素対数関数の 1 次結合で

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \tag{5}$$

と近似する.  $Q_0$  は未知の複素定数,  $Q_{lj}$  は未知の実係数 (電荷量または電荷と呼ばれる) である. 特異点 (電荷点と呼ばれる)  $\zeta_{lj}$  は領域  $D$  の外部すなわち閉曲線  $C_l$  の内側に配置される. この近似関数に次の 3 条件を課す.

(i) 1 価性条件: 式 (5) は一般的には無限多価であり, これが  $D$  で 1 価であるためには

$$\int_{C_l} dH(z) = \int_{C_l} d \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{N_m} Q_{mj} \arg(z - \zeta_{mj}) = 2\pi \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \tag{6}$$

でなければならない.

(ii) 正規化条件: 1 価性条件の下, 式 (3) から

$$G(\infty) + iH(\infty) = Q_0 + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) = 0$$

を課して

$$Q_0 = 0, \tag{7}$$

したがって

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \tag{8}$$

を得る.

(iii) 拘束条件: 各閉曲線  $C_m$  上に電荷と同数の拘束点  $z_{mi}$  を配置し, ここで式 (8) に境界条件 (4) を選点的に課して拘束条件

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mi} - \zeta_{lj}| - P_m = -\text{Im}(e^{-i\theta} z_{mi}) \tag{9}$$

$(z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, n)$

を得る.  $P_m$  は  $p_m$  の近似値である.

式 (6) と (9) は  $Q_{lj}$  と  $P_m$  に関する  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  元連立 1 次方程式を構成する. これを解いて式 (8) で  $G(z) + iH(z)$  を定め,  $g(z) + ih(z)$  の近似値として式 (2) に代入すれば問題の等角写像の近似写像関数  $F(z) \simeq f(z)$  を得ることができる.

数値計算には複素対数関数の主値を用いる. すると式 (8) の  $\log(z - \zeta_{lj})$  は半直線  $\{\zeta_{lj} - t \mid t > 0\}$  上に  $2\pi i$  の不連続をともなう. 我々は領域  $D$  でこのような不連続を生

じない近似写像関数を構成したい(連続スキームと呼ぶ). ここでは, 記述を簡潔にするために, 閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  はそれぞれの内側の 1 点  $\zeta_{10}, \zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$  に対して星形であると仮定する. 前述の 1 価性条件 (6) の下, 式 (8) を

$$\begin{aligned} G(z) + iH(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} [\log(z - \zeta_{lj}) - \log(z - \zeta_{l0})] \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \end{aligned} \quad (10)$$

と変形する. 式 (10) の  $\log((z - \zeta_{lj})/(z - \zeta_{l0}))$  の不連続は線分  $(\zeta_{lj}, \zeta_{l0})$  上に現れる. こうして領域  $D$  で連続な近似写像関数を構成することができる.

スキーム 1 近似写像関数を

$$F(z) = z + ie^{i\theta}(G(z) + iH(z)), \quad (11)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (12)$$

と表現すれば, 未定係数  $Q_{lj}$  は  $P_m$  とともに  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \left| \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z_{mi} - \zeta_{l0}} \right| - P_m &= -\text{Im}(e^{-i\theta} z_{mi}) \\ (z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (14)$$

の解として定まる.

導関数 この近似写像関数を用いて, 写像関数の導関数を

$$f'(z) \simeq F'(z) = 1 + ie^{i\theta} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} \frac{Q_{lj}}{z - \zeta_{lj}}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &\simeq F^{(k)}(z) \\ &= (-1)^{(k-1)} (k-1)! ie^{i\theta} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} \frac{Q_{lj}}{(z - \zeta_{lj})^k} \quad (k = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (16)$$

で計算することができる.

Laurent 級数 この近似写像関数を用いて, Laurent 級数 (1) の係数を

$$a_k \simeq A_k = -\frac{ie^{i\theta}}{k} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \zeta_{lj}^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

で計算することができる.

導出は簡単である. 問題は

$$\begin{aligned} f(z) - z &= \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_k}{z^k} + \dots \\ &\simeq ie^{i\theta} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} = F(z) - z \end{aligned}$$

を満たす  $a_k$  を定めることであるから, 条件 (13) の下, 微分して

$$\begin{aligned} -\frac{a_1}{z^2} + \dots + (-k) \frac{a_k}{z^{k+1}} + \dots &\simeq ie^{i\theta} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \frac{1}{z - \zeta_{lj}} \\ &= ie^{i\theta} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} \frac{Q_{lj}}{z} \left( 1 + \frac{\zeta_{lj}}{z} + \dots + \frac{\zeta_{lj}^k}{z^k} + \dots \right) \end{aligned}$$

となる. 項別に比較して式 (17) を得る.

### 2.3 数値例

数値例はデュアルインテル Xeon 3.06 GHz プロセッサ上の Fortran 倍精度計算による. 連立 1 次方程式には IMSL ライブラリ, 作図には DCL ライブラリ<sup>15)</sup> を用いた.

例 1 半径の異なる円

$$\begin{aligned} C_l : |z - \zeta_{l0}| &= \rho_l, \quad \zeta_{l0} = 2 \exp \frac{2(l-1)\pi i}{3} \quad (l = 1, 2, 3), \\ \rho_1 &= 1, \rho_2 = 0.5, \rho_3 = 1.5 \end{aligned}$$

の外側の 3 重連結領域を  $D$  とする.

拘束点と電荷点を

$$\begin{aligned} z_{lj} &= \zeta_{l0} + \rho_l e^{i\omega_j}, \quad \zeta_{lj} = \zeta_{l0} + q\rho_l e^{i\omega_j}, \quad \omega_j = \frac{2(j-1)\pi}{N} \pi i \\ (j &= 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (18)$$

と配置する.  $0 < q < 1$  は電荷配置のパラメータである. 誤差の指標として

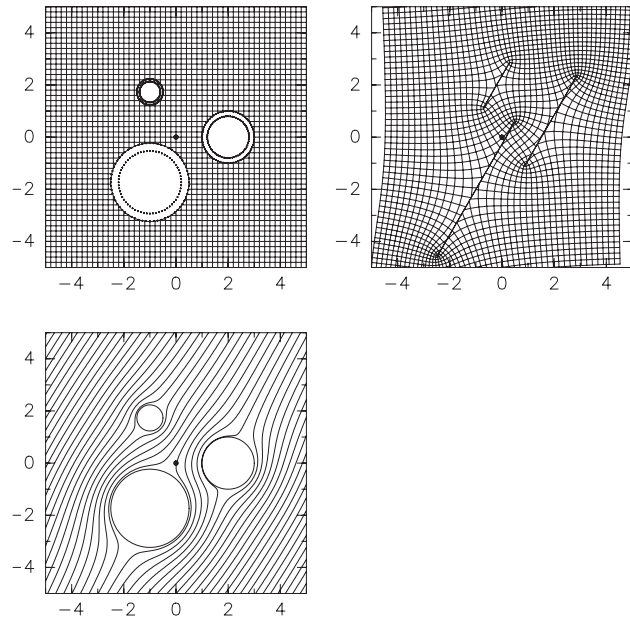


図 2 平行スリット領域への数値等角写像と障害物を過ぎる一様流 (例 1,  $\theta = \pi/3$ )

Fig. 2 Numerical conformal mapping onto the parallel slit domain and a uniform potential flow past three cylindrical obstacles (Example 1,  $\theta = \pi/3$ ).

$$\epsilon_{F_l} = \max_{1 \leq i \leq N} |\text{Im}(e^{-i\theta} F(z_{li+1/2})) - P_l| \quad (l = 1, 2, 3), \quad (19)$$

$$\epsilon_{P_l} = |P_l - P_{l(2N)}| \quad (l = 1, 2, 3) \quad (20)$$

を用いる．ここに  $z_{li+1/2} \in C_l$  は  $z_{li}$  と  $z_{li+1}$  ( $z_{lN+1} = z_{l1}$ ) の中間点であり,  $P_{l(2N)}$  は電荷数を  $N$  から  $2N$  に倍増した計算値である．

図 2 は  $\theta = \pi/3$  の平行スリット領域への数値等角写像の結果を矩形格子で表現している．境界円の内側の点は電荷点である．左下は 3 個の円柱状の障害物を過ぎる一様流の流線を  $\text{Im}(e^{-i\theta} F(z))$  の等高線で表現している<sup>24)</sup>．

表 1 に計算誤差を示す． $\kappa$  は連立 1 次方程式 (13), (14) の  $L_1$  条件数で,  $P_l$  は式 (20) 右辺に非零の数字が現れた桁までを記している．この表は代用電荷法による数値等角写像の典型的な振舞いを示している．電荷数  $N$  の関数として,  $\epsilon_{F_l}$  と  $\epsilon_{P_l}$  は指数的に減少して

表 1 数値等角写像の誤差 (例 1,  $q = 0.8$ )

Table 1 Numerical results of the conformal mapping (Example 1,  $q = 0.8$ ).

$N$		$\epsilon_{F_l}$	$\epsilon_{P_l}$	$P_l$	$\kappa$	cpu time (sec)
16	$C_1$	9.3E-03	2.2E-03	-1.310	5.7E+01	0.01
	$C_2$	4.7E-03	2.3E-03	1.182		
	$C_3$	1.4E-02	8.3E-04	-0.1345		
32	$C_1$	1.3E-04	3.1E-05	-1.30823	6.7E+02	0.01
	$C_2$	6.5E-05	3.3E-05	1.17985		
	$C_3$	1.9E-04	1.2E-05	-0.13532		
64	$C_1$	5.2E-08	1.2E-08	-1.30820139	4.7E+04	0.04
	$C_2$	2.6E-08	1.3E-08	1.17981520		
	$C_3$	7.5E-08	4.5E-09	-0.135327009		
128	$C_1$	3.7E-14	3.6E-15	-1.308201375670255	1.2E+08	0.24
	$C_2$	2.5E-13	1.2E-14	1.17981518832900		
	$C_3$	2.8E-13	1.5E-14	-0.13532701304329		

表 2 Laurent 級数の計算結果 (例 1,  $N = 64, q = 0.8$ )

Table 2 Numerical results for the Laurent expansion (Example 1,  $N = 64, q = 0.8$ ).

$k$	(Re $A_k$ , Im $A_k$ )	( $ A_k $ , arg $A_k$ )
1	(-1.90213546E+00, 2.78918001E+00)	(3.38E+00, 2.17)
2	( 2.78070040E+00, 1.30235801E+00)	(3.07E+00, 0.44)
3	(-5.6018023E+00, -4.6592614E+00)	(7.29E+00, -2.45)
4	(-1.44253291E+01, 2.31528187E+01)	(2.73E+01, 2.13)
5	( 2.29122599E+01, 1.00655486E+01)	(2.50E+01, 0.41)
6	(-4.6042007E+01, -3.60249150E+01)	(5.85E+01, -2.48)
7	(-1.13692405E+02, 1.90938360E+02)	(2.22E+02, 2.11)
8	( 1.91041877E+02, 8.1775189E+01)	(2.08E+02, 0.40)
9	(-3.68643459E+02, -2.86834814E+02)	(4.67E+02, -2.48)
10	(-9.0475290E+02, 1.55175602E+03)	(1.80E+03, 2.10)
20	( 8.3033805E+05, 3.50398389E+05)	(9.01E+05, 0.40)

高い精度が得られる．このとき  $\epsilon_{F_l} > \epsilon_{P_l}$  である．しかし,  $\kappa$  は逆に増加し, 最後は解くべき連立 1 次方程式に数値的悪条件を生じる．表には示されていないが,  $q$  が 1 から 0 に向かって減少して電荷が境界から離れるに従って  $\epsilon_{F_l}$  と  $\epsilon_{P_l}$  はまず急激に減少する．しかし,  $\kappa$  は逆に増加し, 最後は数値的悪条件を生じる．なお, 表 1 の cpu time (秒) はこの表の作成に要した計算時間であり, 作図の時間は含まない．また,  $N = 256$  の場合の条件数は  $\kappa = 3.8 \times 10^{14}$ , 計算時間は cpu time = 1.57 秒であった．

表 2 は Laurent 級数 (1) の式 (17) による近似値であり, その値は螺旋的に発散している． $A_k$  の値は  $A_k - A_{k(2N)}$  に非零の数字が現れた桁までの値である．

### 3. 共線スリット領域への数値等角写像

#### 3.1 写像定理と問題

図 3 のように無限遠点を含み同一直線上に位置する直線分状のスリット  $S_1, S_2$  をともなう複素平面の全体を共線スリット領域と呼ぶ。ここでは  $z$  平面上の Jordan 閉曲線  $C_1, C_2$  の外側の無限遠点を含む非有界な 2 重連結領域  $D$  から  $w$  平面上の共線スリット領域への等角写像  $w = f(z)$  を考える。

定理 2 上記の共線スリット領域への等角写像は  $f(\infty) = \infty$  かつ無限遠点を中心とする Laurent 級数が

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (21)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる。

定理 2 は定理 1 の特別な場合であるが、この場合にはスリットが実軸となす角  $\theta$  は未知である。Shiba<sup>46)</sup> はこの定理をより一般的な枠組みの中で記している。

この等角写像の写像関数を

$$f(z) = z + ie^{i\theta}(g(z) + ih(z)) \quad (22)$$

と表現する。調和関数対  $g(z)$  と  $h(z)$  は無限遠点における正規化条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad g(\infty) + ih(\infty) = 0 \quad (23)$$

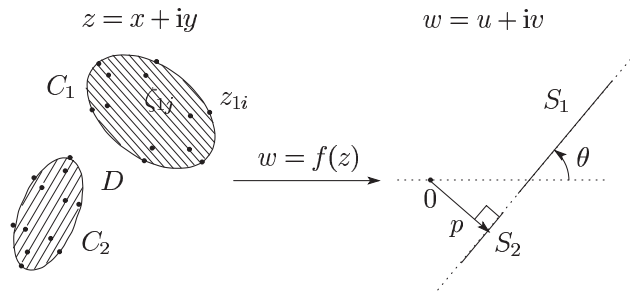


図 3 共線スリット領域への等角写像 ( $\zeta_{nj}$  は電荷点,  $z_{ni}$  は拘束点)

Fig. 3 Conformal mapping onto the collinear slit domain ( $\zeta_{nj}$  is for charge points and  $z_{ni}$  collocation points).

と、閉曲線  $C_1, C_2$  が実軸と角  $\theta$  をなす共線スリット  $S_1, S_2$  に移るという境界条件

$$\begin{aligned} \text{Im}(e^{-i\theta} f(z)) &= p, \quad \text{i.e.,} \quad g(z) - p = -\text{Im}(e^{-i\theta} z) \\ (z \in C_m, m = 1, 2) \end{aligned} \quad (24)$$

を満たさなければならない。 $p$  は  $w$  平面上の原点からスリット  $S_1, S_2$  を含む直線までの符号付き距離を意味する未知の定数である。

こうして問題は式 (23) と (24) を満たす調和関数対  $g(z)$  と  $h(z)$  を定数  $p$  と  $\theta$  の値とともに求めることに帰着する。

#### 3.2 代用電荷法の適用

この調和関数対を複素対数関数の 1 次結合で

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (25)$$

と近似し、この近似関数に次の 3 条件を課す。

(i) 1 価性条件：式 (6) と同様に

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2) \quad (26)$$

でなければならない。

(ii) 正規化条件：式 (7) と (8) と同様に

$$Q_0 = 0, \quad (27)$$

したがって

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (28)$$

を得る。

(iii) 拘束条件：式 (28) に境界条件 (24) を選点的に課して拘束条件

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mi} - \zeta_{lj}| - P &= -\text{Im}(e^{-i\theta} z_{mi}) = x_{mi} \sin \theta - y_{mi} \cos \theta \\ (z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2) \end{aligned} \quad (29)$$

を得る． $P$  と  $\theta$  は  $p$  と  $\theta$  の近似値である．

式 (26) と (29) は  $N_1 + N_2 + 2$  個の未知量  $Q_{lj}$  と  $P, \theta$  に関する  $N_1 + N_2 + 2$  個の連立方程式を構成する．そこで，変数を

$$Q_{lj}^* = \frac{Q_{lj}}{\cos \theta}, \quad P^* = \frac{P}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0)$$

と変換して  $Q_{lj}^*$  と  $P^*$ ,  $\tan \theta$  に関する連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* &= 0 \quad (l = 1, 2), \\ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* \log |z_{mi} - \zeta_{lj}| - P^* - x_{mi} \tan \theta &= -y_{mi} \\ (z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2) \end{aligned}$$

を得る．

閉曲線  $C_1, C_2$  はそれぞれの内側の 1 点  $\zeta_{10}, \zeta_{20}$  に対して星形であると仮定し，式 (10) と同様に式 (28) を

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (30)$$

と変形して，領域  $D$  で連続な近似写像関数を構成することができる．

スキーム 2a 近似写像関数を

$$F(z) = z + ie^{i\theta}(G(z) + iH(z)), \quad (31)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (32)$$

と表現すれば，未定係数  $Q_{lj}$  は  $P, \theta$  とともに変数変換

$$Q_{lj} = Q_{lj}^* \cos \theta, \quad P = P^* \cos \theta \quad (\cos \theta \neq 0) \quad (33)$$

の下に  $Q_{lj}^*, P^*, \tan \theta$  に関する  $N_1 + N_2 + 2$  元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* = 0 \quad (l = 1, 2), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* \log \left| \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z_{mi} - \zeta_{l0}} \right| - P^* - x_{mi} \tan \theta &= -y_{mi} \\ (z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2) \end{aligned} \quad (35)$$

の解として定まる．

$\cos \theta = 0$  のときには  $\sin \theta \neq 0$  であるから，変数変換

$$Q_{lj}^* = \frac{Q_{lj}}{\sin \theta}, \quad P^* = \frac{P}{\sin \theta} \quad (\sin \theta \neq 0)$$

を行って次のスキームを得る．

スキーム 2b 近似写像関数を

$$F(z) = z + ie^{i\theta}(G(z) + iH(z)), \quad (36)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (37)$$

と表現すれば，未定係数  $Q_{lj}$  は  $P, \theta$  とともに変数変換

$$Q_{lj} = Q_{lj}^* \sin \theta, \quad P = P^* \sin \theta \quad (\sin \theta \neq 0) \quad (38)$$

の下に  $Q_{lj}^*, P^*, \cot \theta$  に関する  $N_1 + N_2 + 2$  元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* = 0 \quad (l = 1, 2), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj}^* \log \left| \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z_{mi} - \zeta_{l0}} \right| - P^* + y_{mi} \cot \theta &= x_{mi} \\ (z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2) \end{aligned} \quad (40)$$

を解いて得られる．

与えられた問題領域  $D$  に対してスキーム 2a と 2b のいずれを用いるべきかの判断は容易である．次のように選択を半自動化することも可能である：(i) まずスキーム 2a を採用して連立 1 次方程式 (34), (35) を解き，(ii)  $|\tan \theta| \leq c$  ならば計算をそのまま続行し，(iii)  $|\tan \theta| > c$  (オーバフローの場合も含む) ならば計算をスキーム 2b に変更する．公平な選択には  $c = 1.0$  が望ましいが，多少でも無駄な計算を避けるために  $c = 10.0$  とすれば  $|\theta| \leq 0.468 \dots \pi$  の範囲でスキーム 2a が選択される．

導関数 いずれの近似写像関数を用いても，写像関数の導関数を

$$f'(z) \simeq F'(z) = 1 + ie^{i\theta} \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} \frac{Q_{lj}}{z - \zeta_{lj}}, \quad (41)$$

$$f^{(k)}(z) \simeq F^{(k)}(z) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!ie^{i\theta} \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} \frac{Q_{lj}}{(z - \zeta_{lj})^k} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (42)$$

で計算することができる。

Laurent 級数 いずれの近似写像関数を用いても, Laurent 級数 (21) の係数を

$$a_k \simeq A_k = -\frac{ie^{i\theta}}{k} \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \zeta_{lj}^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (43)$$

で計算することができる。

### 3.3 数 値 例

#### 例 2 楕円と Cassini の楕形

$$C_1 : \left\{ e^{i\phi} z + \zeta_{10} \mid \frac{x^2}{\alpha^2} + y^2 = 1 \right\}, \quad \alpha = 3, \zeta_{10} = 2 + 3i, \phi = 0.2\pi,$$

$$C_2 : \{z \mid |(z - \zeta_{20})^2 - 1| = \beta^2\}, \quad \beta = 1.06, \zeta_{20} = -1 - 3i$$

の外側の 2 重連結領域を  $D$  とする。

楕円  $C_1$  は扁平な, Cassini の楕形  $C_2$  は凹型の境界曲線の例である。楕円  $C_1$  に対しては, 拘束点と電荷点を Joukowski 変換

$$J(t) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \quad (44)$$

を用いて

$$z_{1j} = \zeta_{10} + J(\rho e^{i\omega_j}), \quad \zeta_{1j} = \zeta_{10} + J(re^{i\omega_j}),$$

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}}, \quad r = 1 + q(\rho - 1), \quad \omega_j = \frac{2(j-1)}{N}\pi \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (45)$$

と配置する。  $0 < q < 1$  は電荷配置のパラメータである。Cassini の楕形  $C_2$  に対しては, まず拘束点を

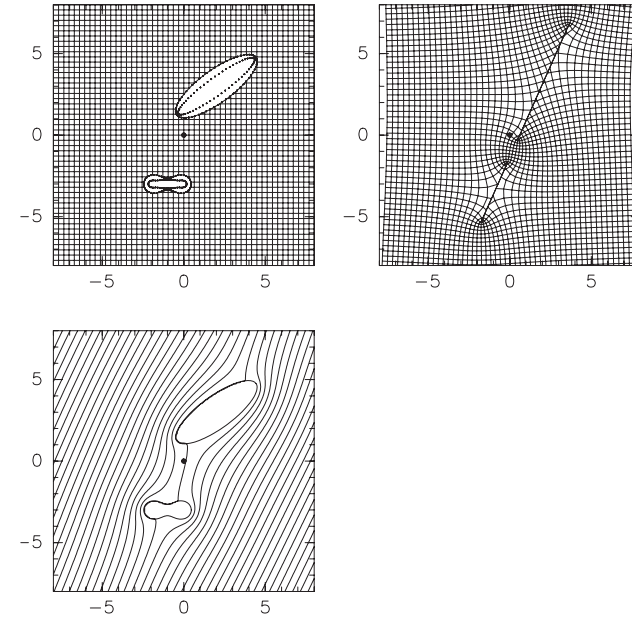


図 4 共線スリット領域への数値等角写像と障害物を通る一様流 (例 2)  
Fig. 4 Numerical conformal mapping onto the collinear slit domain and a uniform potential flow past two cylindrical obstacles (Example 2).

$$z_{2j} = \zeta_{20} + R_j e^{i\omega_j}, \quad R_j = \sqrt{\cos 2\omega_j + \sqrt{\cos^2 2\omega_j + \beta^4 - 1}},$$

$$\omega_j = \frac{2(j-1)}{N}\pi \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (46)$$

と配置し, 次に電荷点を

$$\zeta_{2j} = z_{2j} + iq^*(z_{2j+1} - z_{2j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (47)$$

と配置する。ここに  $q^* > 0$  ( $z_{20} = z_{2N}, z_{2N+1} = z_{21}$ ) はもう 1 つの電荷配置のパラメータである。誤差の指標として

$$\epsilon_{F_l} = \max_{1 \leq i \leq N} |\text{Im}(e^{-i\theta} F(z_{li+1/2})) - P| \quad (l = 1, 2), \quad (48)$$



表 3 数値等角写像の誤差 (例 2,  $q = 0.5, q^* = 1$ )Table 3 Numerical results of the conformal mapping (Example 2,  $q = 0.5, q^* = 1$ ).

$N$		$\epsilon_{F_1}$	$\epsilon_P$	$P$	$\epsilon_\Theta$	$\Theta$	$\kappa$
16	$C_1$	6.5E-02	1.2E-02	-0.57	2.1E-03	1.150	2.4E+03
	$C_2$	8.5E-01					
32	$C_1$	2.7E-03	4.9E-05	-0.55833	1.5E-05	1.15215	7.2E+06
	$C_2$	1.1E-03					
64	$C_1$	8.3E-06	1.5E-07	-0.5582780	4.7E-08	1.15213652	4.7E+05
	$C_2$	3.4E-07					
128	$C_1$	1.7E-10	9.2E-11	-0.55827789175	1.4E-11	1.15213647345	5.1E+06
	$C_2$	3.6E-08					

表 4 Laurent 級数の計算結果 (例 2,  $q = 0.5, q^* = 1$ )Table 4 Numerical results for the Laurent expansion (Example 2,  $N = 64, q = 0.5, q^* = 1$ ).

$k$	(Re $A_k$ , Im $A_k$ )	( $ A_k $ , arg $A_k$ )
1	(-4.421116E+00, 1.788845E+00)	(4.77E+00, 2.76)
2	(-6.07119E+00, -4.846347E+00)	(7.77E+00, -2.47)
3	(4.25463E+00, -6.286872E+01)	(6.30E+01, -1.50)
4	(1.2657199E+02, -1.447487E+02)	(1.92E+02, -0.85)
5	(1.103044E+03, 2.27018E+02)	(1.13E+03, 0.20)
6	(3.24514E+03, 4.063686E+03)	(5.20E+03, 0.90)
7	(-6.60081E+03, 2.660804E+04)	(2.74E+04, 1.81)
8	(-1.2352740E+05, 7.41236E+04)	(1.44E+05, 2.60)
9	(-7.41505E+05, -2.394265E+05)	(7.79E+05, -2.83)
10	(-1.822548E+06, -3.845458E+06)	(4.26E+06, -2.01)
20	(1.660295E+14, -1.7031E+12)	(1.66E+14, -0.01)

$$\epsilon_P = P - P_{(2N)}, \quad (49)$$

$$\epsilon_\Theta = \Theta - \Theta_{(2N)} \quad (50)$$

を用いる。

図 4 は  $\theta = \pi/3$  の共線スリット領域への数値等角写像の結果である。2 つのスリットは同一直線上に位置している。左下は楕円と Cassini の楕形を輪郭線とする障害物を過ぎる一様流の流線である。図のような 2 個の障害物の境界に沿う流線は問題領域  $D$  に対して角  $\theta$  とともに一意に定まる。

表 3 に計算誤差を示す。  $P$  と  $\Theta$  の値は式 (49) と (50) の右辺に非零の数字が現れた桁までを記している。このように楕円や Cassini の楕形に対しても高い精度が得られている。なお、  $N = 256$  の場合の条件数は  $\kappa = 2.6 \times 10^{11}$ 、計算時間は cpu time = 0.54 秒であった。

表 4 は Laurent 級数 (21) の (43) による近似値であり、その値は螺旋的に発散している。

代用電荷法では拘束点とともに電荷点の配置が重要である。最適配置は未解決の課題であるが、式 (47) の方法は楕円や Cassini の楕形を含む様々な形状の境界曲線に簡単に適用できて比較的高い精度を与える。一般的に誤差はパラメータ  $q^*$  の関数としてまず急速に減少し、次いで増加に転じるので、その準最適値を見出すことは容易である。ただし、その値は  $N$  に依存し、表 3 で  $q^* = 1$  は  $N = 16$  に対しては大きく、  $N = 128$  に対しては小さい値である。

等角写像による格子生成 共線スリット領域の特徴は幾何学的な構造が簡単なことである。ここでは、その特徴に注目して共線スリット領域への数値等角写像による境界適合型の直交格子生成の可能性について検討する。

等角写像は古くから格子生成に利用されてきた<sup>27),52)</sup>。その最大の理由は問題領域 (物理空間) と標準/正準領域 (論理空間) の間の 1 対 1 等角写像が問題領域において境界曲線に適合した直交曲線格子 (座標系) を与えることにある。Knupp ら<sup>27)</sup> は多くの困難 (2 次元に限られる、境界点/格子点の制御が難しい、写像の構成と多価性の扱いが難しい、領域の形状の小さな変化が境界点の位置を大きく変える、等) をあげながら、この理由で等角写像が格子生成の方法として利用されてきたことを記している。また、Mastin<sup>31)</sup> は楕円型の格子生成法と等角写像の関係を考察し、折りたたみ (folding) のような不都合が両者の基礎にある数学的な関係を調べることで回避できることを示している。文献 27), 52) には様々な格子の例を見ることができる。

格子生成では論理空間として (差分法の適用が容易な) 矩形領域を設定することが多い。原理的にはどのような多重連結領域も反転や切断 (branch cut) によって矩形領域に変換できる。しかし、Thompson ら<sup>52)</sup> は多重連結領域の場合には水平/垂直な直線スリットをとともう領域を設定することも有力な選択肢であることを指摘している (スリット上では 2 価関数を扱う)。

さて、共線スリット領域は簡単な変換  $\hat{w} = e^{-i\theta} w - p$  で実軸上にスリットをとともう全平面 (または、実軸上で接続された 2 つの半平面) に写像することができる。この平面に矩形/正方形格子 (Descartes 座標系) を設定すれば、逆写像は問題領域  $D$  上で境界曲線  $C_1$  と  $C_2$  に適合した直交曲線格子 (座標系) を与える。Okano ら<sup>43)</sup> はこの逆写像の近似写像関数を代用電荷法で構成する方法を提案している。

図 4 左下の流線 ( $\text{Im}(e^{-i\theta} F(z))$  の等高線) は  $\hat{w}$  平面上の実軸に平行な格子線の逆写像に対応している ( $C_1$  と  $C_2$  に沿う流線は実軸に対応している)。これに直交する等速度ポテンシャル線 ( $\text{Re}(e^{-i\theta} F(z))$  の等高線) は  $\hat{w}$  平面上の虚軸に平行な格子線に対応する。図 4

では、前者の格子線を等間隔に描くことで流れの向きと速さ（流線の密度に比例する）を同時に表現している。Knupp ら<sup>27)</sup>の指摘のように境界点や格子点（格子線の交点）の位置の制御は難しいが、境界  $C_1$  と  $C_2$  の近くで密な格子を作成することは容易である。非有界領域に差分法や有限要素法のような領域分割法を適用する場合には適当な仮想境界を設ける必要はある（たとえば、Ushijima<sup>54)</sup>）が、共線スリット領域への等角写像は境界適合型の直交格子生成法の1つとして好ましい性質を備えていると考えられる。

共線スリット領域への数値等角写像の方法は多重度  $n \geq 2$  の領域に適用可能である。その場合、任意に指定された2つの境界曲線が共線スリットに移り、他の閉曲線はそれと平行な直線スリットに移る。

#### 4. おわりに

この論文では一般的な平行スリット領域と共線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験で検証した。得られた近似写像関数を用いて、任意階数の導関数や写像定理に現れる Laurent 級数を簡単に計算することができる。関数論がそのまま適用できるという意味で、簡潔で精度が高く解析的な表現形式を持つ近似写像関数が得られることの意義は大きい。Ogata ら<sup>36)</sup>は代用電荷法で流れの複素速度ポテンシャルを構成して Blasius の公式に代入し、電荷の位置と大きさだけで障害物に働く力を簡単かつ高精度に計算している。また、櫻井ら<sup>29),30),45)</sup>は、代用電荷法で求めた近似写像関数を用いて、Padé 近似の分母の零点を新しい電荷点として計算に必要な電荷数を大幅に削減している。

多重連結領域のもう1つの正準領域として円境界領域（すべての境界曲線が円であり、スリットはともなわない）がある。近年、円境界領域から正準スリット領域への等角写像が注目されている<sup>9),10)</sup>。電荷配置が簡単で高い精度が得られるという意味で、代用電荷法はこの問題を得意としている<sup>6),7),42)</sup>。なお、Ogata らは様々な周期基本解を用いて周期領域の数値等角写像<sup>35)</sup>や Stokes 流問題の数値解法<sup>38)-40)</sup>を提案している。

代用電荷法は電荷数  $N$  に対して公式誤差が指数的に減少するという性質を持ち、この性質が高い精度を与える。しかし、 $N$  の増加にともなって解くべき連立1次方程式の条件数は急激に増加し、数値的な誤差は増大する。境界曲線の複雑な領域や高多重連結領域ではこの問題が数値計算上の制約になる。また、境界曲線のアスペクト比（縦横の比） $L$  の大きな領域の等角写像では、境界上でとりうる  $|f'(z)|$  の範囲が  $L$  に対して指数的に広がり（crowding と呼ばれる）、これが数値計算上の制約となる<sup>53)</sup>。代用電荷法による数値等角写像に高精度数値計算を適用し、より大規模な問題や格子生成への応用の可能性を探りたい。

謝辞 研究に関して日ごろから助言いただく東京大学の杉原正顯教授と電気通信大学の緒方秀教准教授、数値実験に協力いただいた鳳弘勝氏（現在、日立システムアンドサービス）に感謝する。この研究は日本学術振興会の科学研究費補助金（課題番号 19340024）の補助を受けている。

#### 参 考 文 献

- 1) 天野 要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol.28, No.7, pp.697-704 (1987).
- 2) 天野 要：代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol.29, No.1, pp.62-72 (1988).
- 3) 天野 要：代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol.29, No.10, pp.914-924 (1988).
- 4) 天野 要：代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法，情報処理，Vol.31, No.5, pp.623-632 (1990).
- 5) Amano, K.: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.53, No.3, pp.353-370 (1994).
- 6) Amano, K.: A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.19, No.4, pp.1169-1187 (1998).
- 7) 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯：代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法，情報処理学会論文誌，Vol.42, No.3, pp.385-395 (2001).
- 8) Berrut, J.P.: A Fredholm integral equation of the second kind for conformal mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2, pp.99-110 (1986).
- 9) Crowdy, D.G. and Marshall, J.: Conformal mappings between canonical multiply connected domains, *Comput. Meth. Funct. Theory*, Vol.6, No.1, pp.59-76 (2006).
- 10) DeLillo, T.K., Driscoll, T.A., Elcrat, A.R. and Pfaltzgraff, J.A.: Radial and circular slit maps of unbounded multiply connected circle domains, *Proc. R. Soc. A*, Vol.464, No.2095, pp.1719-1737 (2008).
- 11) Driscoll, T.A. and Trefethen, L.N.: *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- 12) Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung* (in German), Springer, Berlin (1964).
- 13) Gaier, D.: Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung (in German), *Math. Z.*, Vol.147, No.2, pp.113-129 (1976).
- 14) Gaier, D.: Das logarithmische Potential und die konforme Abbildung mehrfach

- zusammenhängender Gebiete (in German), *E.B. Christoffel, The Influence of his Work on Mathematics and the Physical Sciences*, Butzer, P.L. and Fehér, F. (Eds.), pp.290–303, Birkhäuser, Basel (1981).
- 15) GFD-DENNOU Club : 地球流体電脳ライブラリ (DCL). available from <http://www.gfd-dennou.org> (参照 2009-04-09)
- 16) Gutknecht, M.H.: Solving Theodorsen's integral equation for conformal maps with the fast Fourier transform and various nonlinear iterative methods, *Numer. Math.*, Vol.36, No.4, pp.405–429 (1981).
- 17) Gutknecht, M.H.: Numerical experiments on solving Theodorsen's integral equation for conformal maps with the fast Fourier transform and various nonlinear iterative methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.4, No.1, pp.1–30 (1983).
- 18) Gutknecht, M.H.: Numerical conformal mapping methods based on function conjugation, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2, pp.31–77 (1986).
- 19) Hayes, J.K., Kahaner, D.K. and Kellner, R.G.: An improved method for numerical conformal mapping, *Math., Comput.*, Vol.26, No.118, pp.327–334 (1972).
- 20) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.3, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 21) Henrici, P.: Fast Fourier methods in computational complex analysis, *SIAM Rev.*, Vol.21, No.4, pp.481–527 (1979).
- 22) Hough, D.M. and Papamichael, N.: The use of splines and singular functions in an integral equation method for conformal mapping, *Numer. Math.*, Vol.37, No.1, pp.133–147 (1981).
- 23) Hough, D.M. and Papamichael, N.: An integral equation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, *Numer. Math.*, Vol.41, No.3, pp.287–307 (1983).
- 24) 今井 功: 複素解析と流体力学, 日本評論社, 東京 (1989).
- 25) Katsurada, M. and Okamoto, H.: A mathematical study of the charge simulation method I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.IA, Math.*, Vol.35, No.3, pp.507–518 (1988).
- 26) Katsurada, M. and Okamoto, H.: The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem, *Computers Math. Applic.*, Vol.31, No.1, pp.123–137 (1996).
- 27) Knupp, P. and Steinberg, S.: *Fundamentals of Grid Generation*, CRC Press, Boca Raton, Florida (1993).
- 28) Kythe, P.K.: *Computational Conformal Mapping*, Birkhäuser, Boston (1998).
- 29) Lu, Y., Itoh, T., Itoh, S. and Sakurai, T.: Improving the accuracy of numerical conformal mapping by Padé approximation using the Arnoldi method, *J. Inform. Comput. Sci.*, Vol.2, No.2, pp.289–294 (2005).
- 30) 呂 毅斌, 伊東 拓, 櫻井鉄也: 多重連結領域数値等角写像の Padé 近似を用いた電荷点配置法, 日本応用数理学会論文誌, Vol.16, No.3, pp.149–164 (2006).
- 31) Mastin, C.W.: Elliptic grid generation and conformal mapping, *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation*, Castillo, J.E. (Ed.), pp.9–17, SIAM, Philadelphia (1991).
- 32) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京 (1983).
- 33) 室田一雄: 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, 情報処理学会論文誌, Vol.34, No.3, pp.533–535 (1993).
- 34) Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York (1952).
- 35) Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Numerical conformal mapping of periodic structure domains, *Japan J. Industr. Appl. Math.*, Vol.19, No.2, pp.257–275 (2002).
- 36) Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Computations of the forces on obstacles in two-dimensional potential flows by the charge simulation method, *Information*, Vol.5, No.3, pp.307–318 (2002).
- 37) Ogata, H., Okano, D., Sugihara, M. and Amano, K.: Unique solvability of the linear system appearing in the invariant scheme of the charge simulation method, *Japan J. Industr. Appl. Math.*, Vol.20, No.1, pp.17–35 (2003).
- 38) Ogata, H., Amano, K., Sugihara, H. and Okano, D.: A fundamental solution method for viscous flow problems with obstacles in a periodic array, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.152, No.1-2, pp.411–425 (2003).
- 39) Ogata, H.: A fundamental solution method for three-dimensional Stokes flow problems with obstacles in a planar periodic array, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.189, No.1-2, pp.622–634 (2006).
- 40) Ogata, H. and Amano, K.: A fundamental solution method for three-dimensional viscous flow problems with obstacles in a periodic array, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.193, No.1, pp.302–318 (2006).
- 41) 岡本 久, 桂田祐史: ポテンシャル問題の高速解法, 応用数理, Vol.2, No.3, pp.2–20 (1992).
- 42) Okano, D., Ogata, H., Amano, K. and Sugihara, S.: Numerical conformal mappings of bounded multiply connected domains by the charge simulation method, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.159, No.1, pp.109–117 (2003).
- 43) Okano, D., Terazono, M., Amano, K. and Ogata, H.: Bi-directional method for numerical conformal mappings of multiply connected domains by the charge simulation method, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol.54, pp.357–363 (2005).
- 44) Reichel, L.: A fast method for solving certain integral equations of the first kind with application to conformal mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2, pp.125–142 (1986).
- 45) 櫻井鉄也, 杉浦 洋: Padé 近似を用いた数値等角写像の計算法, 情報処理学会論文

誌, Vol.43, No.9, pp.2959–2962 (2002).

- 46) Shiba, M.: Notes on the existence of certain slit mappings, *Proc. Japan Academy*, Vol.51, No.9, pp.687–690 (1975).
- 47) 宋 殷志, 杉浦 洋, 櫻井鉄也: 数値等角写像における Theodorsen 方程式の解法, *情報処理学会論文誌*, Vol.30, No.4, pp.393–401 (1989).
- 48) Symm, G.T.: An integral equation method in conformal mapping, *Numer. Math.*, Vol.9, No.3, pp.250–258 (1966).
- 49) Symm, G.T.: Numerical mapping of exterior domains, *Numer. Math.*, Vol.10, No.5, pp.437–445 (1967).
- 50) Symm, G.T.: Conformal mapping of doubly-connected domains, *Numer. Math.*, Vol.13, No.5, pp.448–457 (1969).
- 51) Theodorsen, T.: Theory of wing sections of arbitrary shape, *NACA Report*, No.411, (1931).
- 52) Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W.: *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, North-Holland, Elsevier, New York (1985).
- 53) Trefethen L.N. (Ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2 (1986).
- 54) Ushijima, T.: An FEM-CSM combined method for planar exterior Laplace problems, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.18, No.2, pp.359–382 (2001).

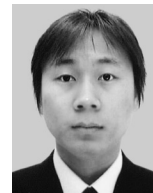
(平成 21 年 4 月 16 日受付)

(平成 21 年 8 月 19 日採録)



天野 要 (正会員)

1948 年生。1971 年京都大学工学部電子工学科卒業。1978 年北海道大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。工学博士。現在、愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻教授。研究分野は数値解析, 情報科学, 認知心理学。情報処理学会創立 30 周年記念論文賞, 日本応用数理学会 1996 年度論文賞, 情報処理学会創立 40 周年記念論文賞受賞。日本数学会, 日本応用数理学会, 日本心理学会, SIAM 各会員。



李 涛 (学生会員)

1977 年生。2005 年愛媛大学理学部物質理学科卒業。2007 年愛媛大学大学院理工学研究科博士前期課程情報工学専攻修了。現在, 同博士後期課程電子情報工学専攻在学中。研究課題は代用電荷法と数値等角写像。日本応用数理学会学生会員。



遠藤 慶一 (正会員)

1980 年生。2003 年京都大学工学部情報学科卒業。2005 年京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻修士課程修了。2008 年同博士後期課程修了。博士(情報学)。現在, 愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻助教。研究分野はネットワーク, 情報処理。電子情報通信学会, 日本応用数理学会各会員。



岡野 大 (正会員)

1968 年生。1992 年東京大学工学部物理工学科卒業。1995 年東京大学大学院工学系研究科修士課程物理工学専攻修了。博士(情報理工学)。現在, 愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻准教授。研究分野は数値解析, 情報処理。情報処理学会創立 40 周年記念論文賞受賞。日本応用数理学会, SIAM 各会員。