

## 配当成長率に関する投資家の推測を 考慮したオプション評価モデル

田中 健太郎<sup>†1</sup> 宮崎 浩一<sup>†1</sup> 錦 康二<sup>†1</sup>

配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルに基づくオプション評価の先行研究では、オプション価格が満たすべき偏微分方程式を導出する手法を採用している。この手法は数学的に洗練されているが、配当成長率に関する投資家の推測に関するモデルのパラメータがどのような形でオプション価格に影響を及ぼすのか直感的理解が得にくい。また、複雑なペイオフを持つオプションの評価に柔軟に対応することが困難である。本研究では、シミュレーションに基づくオプション評価モデルを提案し、数値実験に基づいてモデルのパラメータがどのようなメカニズムによってボラティリティスマイルやスキューを生成するかについて検討する。

### An option valuation model based on an asset pricing model incorporating investors' beliefs

KENTARO TANAKA<sup>†1</sup>, KOICHI MIYAZAKI<sup>†1</sup>  
and KOJI NISHIKI<sup>†1</sup>

Preceding researches for an option valuation model based on an asset pricing model incorporating investors' beliefs on a drift of dividend process adopt an approach to derive the partial differential equation that the option price should satisfy. Though the approach is mathematically elegant, it is quite difficult for us to intuitively capture how parameters related to the beliefs affect to the option pricing and also to evaluate complex options. In this research, we propose the option valuation model based on a simulation approach and discuss the mechanism that the parameters generate volatility smile based on numerical experiments.

<sup>†1</sup> 電気通信大学システム工学科

Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications

## 1. はじめに

オプションとは、満期日において原資産を取り決めた権利行使価格で買う（コール）又は売る（プット）ことができる権利である。著名なオプション評価モデルとして、Black-Scholesモデル（以下BSモデル）がある。BSモデルでは株価収益率がウィナー過程に従うことを仮定している。しかし、現実のオプション市場価格をBSモデル価格に一致するように標準偏差（ボラティリティ）を逆算すると（逆算された値をインプライド・ボラティリティ（IV）と呼ぶ）、権利行使価格が現在の株価から乖離したオプションほどIVが大きくなるため、BSモデルでは現実のオプション市場価格を捉えることができない。

このため、オプション市場価格と整合的な評価モデルの構築を目標に様々なモデルが提案されてきた。その中に最適な消費と投資を行う代表的個人を考え、代表的個人が生涯における消費の期待効用を最大化するといった設定の下で均衡状態における証券価格を導くといったミクロ経済学に基礎をおく資産評価モデルがある。本研究では、配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルであるVeronesi(2000)に焦点を当てる。Veronesi(2000)では、投資家にとって配当成長率の確率過程のドリフトが取り得る状態は既知であるが、各時刻においてどの状態をとっているかについては知りえず、ノイズが含まれたシグナルを観測することが可能との設定の下で配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルを構築している。

この配当成長率に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデルに基づいてオプション評価モデルを提案したものに、David and Veronesi(2002)等がある。これらのモデルは、何れもオプション価格が満たすべき偏微分方程式を導き、それをフーリエ変換によって解くアプローチを採用している。これらの手法は数学的に洗練されているが、その反面、配当成長率に関する投資家の推測に関するモデルのパラメータがどのような形でオプション価格に影響を及ぼすのか直感的理解が得にくい。

そこで本研究では、シミュレーションに基づくオプション評価モデルを提案し、数値実験に基づいて、配当成長率に関する投資家の推測に関するモデルのパラメータがどのようなメカニズムによってスマイルのようなIVの形状に影響を与えるかについて詳細に検討する。

## 2. 配当成長に関する投資家の推測を考慮した資産評価モデル

ここでは、配当成長に関する投資家の推測を考慮した資産価格評価モデルの概略を紹介する。詳しくは、Veronesi(2000)を参照されたい。

最適な消費と投資を行う代表的個人を考え、代表的個人が生涯における消費の期待効用を最大化するものとする。この経済における均衡は、実行可能条件の下で期待効用を最大化するような最適制御問題の解として与えられ、均衡において代表的個人は、企業の発行する全配当  $D(t)$  を瞬時に消費財  $c$  に換えて消費する。均衡における証券価格  $P(t)$  はオイラー方程式 (1) で与えられる。

$$P(t) = \frac{E\left(\int_t^\infty u_c(D(s), s) D(s) ds | F(t)\right)}{u_c(D(t), t)} \quad (1)$$

ここで  $D(t)$  は配当、 $F(t)$  は時点  $t$  における投資家の持つ情報のセット、 $u_c(D(t), t)$  は効用関数  $u(c, t)$  を  $c$  に関して微分し、 $c = D(t)$  とおいたものである。

投資家の効用関数として定数相対リスク回避型効用関数  $u(c, t) = e^{-\phi t} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  を導入する。投資家の効用は消費に関して、連続で微分可能であり、厳密に増加を満たすものとする。効用関数として、定数相対リスク回避型のもの採用すれば、式 (1) の証券価格  $P(t)$  を式 (2) のように具体的に与えることができる。

$$\frac{P(t)}{D(t)} = E\left[\int_t^\infty \exp(-\phi(s-t)) \left(\frac{D(s)}{D(t)}\right)^{1-\gamma} ds | F(t)\right] \quad (2)$$

ここで、 $\gamma$  は投資家のリスク回避度、 $\phi$  は割引率表し、式 (2) において、配当  $D$  は、式 (3) のような確率過程に従うものと仮定する。

$$dD = \theta(t)Ddt + \sigma_D DdW_D \quad (3)$$

ここで、 $\theta(t)$  は真の配当成長率、 $\sigma_D$  は配当のボラティリティ、 $W_D$  は標準ブラウン運動を表す。配当成長率  $\theta(t)$  は、通常、投資家には既知であるとしてモデル化されている。Veronesi(2000) では、投資家にとって既知なのは、配当成長率  $\theta(t)$  がとり得る状態  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  のみであり、各時点  $t$  において配当成長率  $\theta(t)$  がとる状態については未知としている。この設定の下で、投資家は、式 (4) で与えられるような配当成長率  $\theta(t)$  にノイズが加わったシグナル  $e$  を観測する。ここで、 $\sigma_e$  は拡散係数、 $W_e$  は  $W_D$  とは独立な標準ブラウン運動である。

$$de = \theta(t)dt + \sigma_e dW_e \quad (4)$$

本研究において投資家の推測  $\pi_i(t)$  とは、式 (5) で表現されるような、時点  $t$  における株式の配当成長率が  $\theta(t) = \theta_i$  である確率を表す。投資家によって配当成長率に対する予想が大きく異なる場合には、配当成長率が取りうる値  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  自体が様々に設定されており、かつ、これらの状態に対する確率分布  $\pi_i(t)$  のばらつきが大きいときである。逆に、多くの投資家が同じ考えを持っている場合には、投資家が推測する配当成長率の状態は

一つに収斂し、評価モデルは BS モデルとなる。このモデルの興味深い点は、投資家の推測  $\pi_i(t)$  自体が配当成長率  $\theta_i$  をとる確率だが、この確率  $\pi_i(t)$  が式 (6) の確率過程に従って時間と共に変化し、初期時点を除けば時刻に応じた確率分布として与えられる点である。

$$\pi_i(t) = \text{prob}(\theta(t) = \theta_i | F(t)) \quad (5)$$

$$d\pi_i(t) = p(f_i - \pi_i(t))dt + \pi_i(t)(\theta_i - m_\theta(t))\left(\frac{1}{\sigma_D}d\tilde{W}_D + \frac{1}{\sigma_e}d\tilde{W}_e\right) \quad (6)$$

ここで、 $p$  は回帰スピード、 $f_i$  は投資家の推測  $\pi_i$  の定常状態における分布の期待値、 $m_\theta$  は式 (7) で表される投資家の期待配当成長率を表し、 $d\tilde{W}_D$  と  $d\tilde{W}_e$  はそれぞれ式 (8)、式 (9) で表される標準ブラウン運動である。また、式 (8) を用いることにより式 (3) の配当成長の確率過程は、式 (10) のように表現できる。

$$m_\theta(t) = E(\theta(t) | F(t)) = \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \theta_i \quad (7)$$

$$d\tilde{W}_D = \frac{1}{\sigma_D} \left( \frac{dD}{D} - m_\theta(t)dt \right) \quad (8)$$

$$d\tilde{W}_e = \frac{1}{\sigma_e} (de - m_\theta(t)dt) \quad (9)$$

$$dD = m_\theta(t)Ddt + \sigma_D Dd\tilde{W}_D \quad (10)$$

ここで、 $d\tilde{W}_D$  と  $d\tilde{W}_e$  には一見するとドリフト項があるが、式 (7) よりその期待値は 0 であり、 $dW_D$  や  $dW_e$  と同様に標準ブラウン運動に従うものと見なすことができる。

Veronesi(2000) では、株価  $P(t)$  を式 (11) のように表現している。

$$P(t) = D(t) \left( \sum_{i=1}^n \pi_i(t) C_i \right) \quad (11)$$

ここで  $C_i$  (式 (11)) は、式 (2) の配当成長率が  $\theta(t) = \theta_i$  である場合の期待値を表す。

$$C_i = \frac{1}{(\phi + p + (\gamma - 1)\theta_i + 0.5\gamma(\gamma - 1)\sigma_D^2)(1 - pH)} \quad (12)$$

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{f_j}{(\phi + p + (\gamma - 1)\theta_j + 0.5\gamma(\gamma - 1)\sigma_D^2)} \quad (13)$$

### 3. 本研究のオプション評価モデル

#### 3.1 オプション評価モデル

本節では、Veronesi(2000) にある投資家の推測を考慮した株価モデルを用いたオプショ

ン評価モデルを提案する。まず、式 (2) の両辺に  $D(t)$  を乗じて式 (14) を得る。

$$P(t) = E \left[ \int_t^\infty \exp(-\phi(s-t)) \left( \frac{D(s)}{D(t)} \right)^{-\gamma} D(s) ds | F(t) \right] \quad (14)$$

式 (14) は、各時点  $s$  に発生するペイオフ  $D(s)$  を現時点  $t$  まで  $\exp(-\phi(s-t)) \left( \frac{D(s)}{D(t)} \right)^{-\gamma}$  によって割り引くことにより、証券価格  $P(t)$  が得られることを表している。満期  $T$  においてのみペイオフ  $b(D(T))$  が発生するような派生証券  $P(t)^b$  の時刻  $t$  における価格は、満期  $T$  以外の時刻  $s (\neq T)$  では支払いがなく  $D(s) = 0$  となるため積分記号を用いずに与えられる。

$$P(t)^b = E \left[ \exp(-\phi(T-t)) \left( \frac{D(T)}{D(t)} \right)^{-\gamma} b(D(T)) | F(t) \right] \quad (15)$$

本研究において分析対象となるヨーロッパ・オプションは満期  $T$  においてのみペイオフが発生する派生証券であり、特にコール・オプション価格  $P(t)^{call}$  は、 $Max[P(T) - K, 0]$  のペイオフを代入すれば、式 (16) のように導出できる。

$$P(t)^{call} = E \left[ e^{-\phi(T-t)} \left( \frac{D(T)}{D(t)} \right)^{-\gamma} Max \left[ D(T) \sum_{i=1}^n \pi_i(T) C_i - K, 0 \right] | F(t) \right] \quad (16)$$

モデルのパラメータがオプション価格に与える影響を直感的に把握するためには、式 (16) にある  $\frac{D(T)}{D(t)}$  や満期の投資家の推測  $\pi_i(T)$  を生成する必要がある。 $\frac{D(T)}{D(t)}$  は式 (17) のように表現されるため、本研究では、式 (17) にある  $\int_t^T m_\theta(s) ds$  と  $\pi_i(T)$  を以下に述べるモンテカルロ・シミュレーションにより求めてオプション価格を導出する方法を提案する。

$$\frac{D(T)}{D(t)} = \exp \left( \int_t^T m_\theta(s) ds - \frac{1}{2} \sigma_D^2 (T-t) + \sigma_D (\tilde{W}_D(T) - \tilde{W}_D(t)) \right) \quad (17)$$

### ・ $\pi_i(T)$ のシミュレーション法

- (1) 満期までの期間を  $m$  等分し (本研究では  $m = 40$ )、その時間間隔  $\Delta t (\Delta t = \frac{T-t}{m})$  における式 (8) 式 (9) で表現される  $d\tilde{W}_D$  と  $d\tilde{W}_e$  を発生させる。
- (2) 式 (6) で表される時点  $t$  における微小時間  $\Delta t$  の投資家の推測  $\pi_i(t)$  の変化量  $d\pi_i(t)$  を求める。
- (3) 手順 (2) で求めた  $d\pi_i(t)$  を用いて、次の時点における投資家の推測を  $\pi_i(t + \Delta t) = \pi_i(t) + d\pi_i(t)$  として計算する。
- (4) 手順 (1), (2), (3) を初期時点  $t$  から満期  $T$  まで繰り返し、投資家の推測  $\pi_i$  のパス

を求めた上で、満期  $T$  での投資家の推測  $\pi_i(T)$  を求める。

### ・ $\int_t^T m_\theta(s) ds$ の導出法

- (1) 時点  $s$  における投資家の推測  $\pi_i(s)$  を用いて投資家の期待配当成長率  $m_\theta(s)$  を計算する。
- (2) 手順 (1) を初期時点  $t$  から満期  $T$  まで繰り返し、時点  $t$  から  $T$  までの期待配当成長率  $m_\theta(s)$  を導出する。
- (3) 手順 (2) で導出した  $m_\theta(s)$  のパスから  $\int_t^T m_\theta(s) ds$  の値を求める。

このようにシミュレーションを用いて投資家の推測 ( $\pi_1, \dots, \pi_n$ ) についてのパスを発生させることにより、そのパスに応じたペイオフが1つ導出される。本研究ではこのシミュレーションを2万回繰り返すことにより、式 (16) のオプション価格を計算する。

### 3.2 投資家の推測とインプライド・ボラティリティの形状

投資家が想定するオプション満期までの株価収益率の分布が正規分布よりも裾の厚い分布 (図1を参照) であるとき、現実のオプション市場価格は、正規分布を仮定したBSモデルの価格から乖離する。

この裾の厚い分布を用いて満期におけるペイオフの期待値を現時点まで割り引いて投資家が想定する現実のオプション価格を求め、得られたオプション価格がBSモデルのオプション価格と一致するように正規分布の標準偏差を求めたものがIVである。権利行使価格が現在の株価から乖離した水準に設定されるほど、株価収益率分布の裾野に当たる確率は、裾野の厚い分布と正規分布とでは相対的に大きく異なる。裾野が厚い分布であれば、オプション価格は正規分布の場合よりも大きく評価されるため、両者を一致させるには正規分布の標準偏差を大きくとる必要がある。このような現象は、ボラティリティのスマイルと呼ばれる。分布の片側のみの裾野が厚い場合には、スキューと呼ばれる。

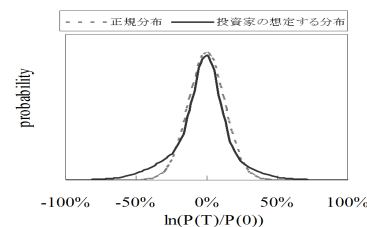


図1 オプション満期までの株価収益率分布

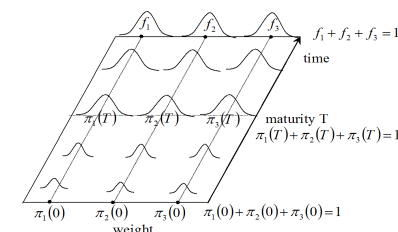


図2 投資家の推測  $\pi_i(t)$  のダイナミクス

表1 パラメータセット

セット	状態 i	$f_i$	$\theta_i$	$\pi_i(0)$	$p$	$\sigma_D$	$\sigma_e$
a skew	1	1	61.33 %	-8.00 %	90.00 %	0.3	10 %
		2	38.67 %	8.00 %	10.00 %		
	2	1	65.33 %	-8.00 %	10.00 %	0.3	10 %
		2	34.67 %	8.00 %	90.00 %		
b smile( $\theta_i$ )	1	1	6.44 %	-12.00 %	12.50 %	0.3	10 %
		2	90.00 %	0.00 %	75.00 %		
		3	3.56 %	10.00 %	12.50 %		
	2	1	6.71 %	-18.00 %	7.50 %	0.3	10 %
		2	90.00 %	0.00 %	85.00 %		
		3	3.29 %	13.00 %	7.50 %		
	3	1	7.15 %	-24.00 %	5.00 %	0.3	10 %
		2	90.00 %	0.00 %	90.00 %		
		3	2.85 %	16.00 %	5.00 %		

満期における株価は、 $P(T) = D(T) \sum \pi_i(T) C_i$  (式 (11)) によって与えられるので、満期までの株価リターンは、 $\ln \frac{P(T)}{P(0)} = \ln \frac{D(T)}{D(0)} + \ln \sum \frac{\pi_i(T) C_i}{\pi_i(0) C_i}$  となる。オプション価格に影響を与えるのは、満期での株価の分布であるから、言い換えると株価リターン  $\ln \frac{P(T)}{P(0)}$  の分布である。数値実験においては、まず、この分布が IV のスキューと整合的であるか確認する。

次に、株価リターンの構成要素となる配当の対数変化率  $\ln \frac{D(T)}{D(0)}$  や株価配当率の対数変化率  $\ln \sum \frac{\pi_i(T) C_i}{\pi_i(0) C_i}$  の分布がどのようなパラメータ感応度をもつかを調べて、パラメータセットが IV のスマイルやスキューに与える影響を考察する。ここで、再度確認しておきたいことは、株価配当率の対数変化率にある  $\pi_i(T)$  は、オプション満期において株価配当率が  $C_i$  となる確率であるが、この確率は図 2 の模式図にあるように確率分布として与えられることである。

## 4. 数値実験

### 4.1 数値実験の目的と分析設定

数値実験の目的は、配当成長率に関する投資家の推測を考慮したオプション評価モデルのパラメータ設定と IV のスキューやスマイルとの関係について、オプション満期までの株価リターンやその構成要素となる配当や株価配当率の対数変化率に関する分布を用いて詳細に調べることである。数値実験では、現在の配当  $D(0)$  : 年間 150 円、割引係数  $\phi$  : 1.50%

残存期間  $T$  : 0.3 年、リスク回避係数  $\gamma$  : 0 としたうえで、配当の成長率  $\theta_i$ 、投資家の推測の初期値  $\pi_i(0)$ 、投資家の推測  $\pi_i$  の定常状態における分布  $f_i$ 、回帰スピード  $p$ 、配当のボラティリティ  $\sigma_D$ 、シグナルのボラティリティ  $\sigma_e$  のような配当成長率に関する投資家の推測に影響を与えるパラメータが IV のスキューやスマイルと呼ばれる現象に与える影響について考察する。表 1 には、数値実験に用いるパラメータセット (以下、セットと略す) を表した。表 1 のセットは、現時点における株価  $P(0)$  が 10000 円となるように構成されている。IV を導出する際には、権利行使価格が現時点の株価より高い場合にはコール・オプションの価格 (式 (16)) を低い場合にはプット・オプションの価格を用いて計算した。

### 4.2 数値実験の結果と考察

#### 4.2.1 ボラティリティ・スキュー (現時点の投資家の推測 $\pi_i(0)$ の観点から)

IV にスキューが見られる際には、配当成長に関する投資家の推測がプラス成長やマイナス成長に偏っている場合が考えられる。そこで配当成長に関する現時点における投資家の推測  $\pi_i(0)$  として表 1-a に、-8%に大きなウェイトがかけられているセット 1 と +8%に大きなウェイトがかけられているセット 2 を設定した。表 1-a から、セット 1 の定常状態における投資家の推測  $f_i$  は、セット 2 対比で相対的に +8%へのウェイトが大きくなっている。

ボラティリティスキューに関する実験結果を図 3 に示した。図 3 からセット 1 は現在の株価よりも権利行使価格が高いコール・オプションの IV が高くなっており、セット 2 では現在の株価よりも権利行使価格が低いプット・オプションの IV が高くなっており、オプション価格はオプション満期の株価に基づいて評価されるため、コール (プット)・オプションでは株価が高く (低く) なる確率が大きいほどオプション価格は高くなる。ここでは、オプション満期までの株価リターンやその構成要素となる配当や株価配当率の変化率に関する分布を用いて詳細に考察する。表 2 には、これら 3 つの分布に関する 1 次から 4 次までの

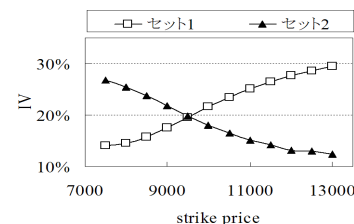


図 3 表 1-a のセットの下での IV

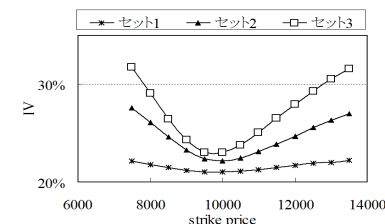


図 4 表 1-b のセットの下での IV

表 2 表 1-a のセットの下での各モーメント

		1	2
$\ln\left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)$	$E[x]$	-0.74 %	-0.56 %
	$E[(x-\mu)^2]$	1.45 %	1.19 %
	$E[(x-\mu)^3]$	0.6524 %	-0.5271 %
	$E[(x-\mu)^4]$	0.0312 %	0.0268 %
$\ln\left(\frac{D(T)}{D(0)}\right)$	$E[x]$	-2.01 %	1.65 %
	$E[(x-\mu)^2]$	0.36 %	0.36 %
	$E[(x-\mu)^3]$	0.0032 %	-0.0049 %
	$E[(x-\mu)^4]$	0.0000 %	0.0000 %
$\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^2 \pi_i(T)C_i}{\sum_{i=1}^2 \pi_i(0)C_i}\right)$	$E[x]$	1.28 %	-2.21 %
	$E[(x-\mu)^2]$	0.54 %	0.38 %
	$E[(x-\mu)^3]$	0.0736 %	-0.0508 %
	$E[(x-\mu)^4]$	0.0113 %	0.0086 %

モーメントを掲載した。表 2 から、セット 1 の 3 次モーメントはプラスの大きな値であるのに対して、セット 2 ではマイナスの大きな値となることが確認される。

次に、配当の対数変化率について確認する。配当の対数変化率の分布で興味深いのは、僅かではあるがセット 1 の期待値はマイナス (-2.01%)、セット 2 の期待値はプラス (1.65%) となっている点である。これは、満期での配当  $D(T)$  を導くウィナー過程 (式 (10)) のドリフトとなる投資家の推測の期待値  $m_\theta$  が、初期時点における配当成長率  $\theta_i$  に関する投資家の推測  $\pi_i(0)$  の影響を残しているためと考えられる。実際、初期時点における投資家の推測の期待値  $m_\theta$  は、セット 1 で -0.64、セット 2 で 0.64 である。このように配当の対数変化率の分布の期待値はセット 1 とセット 2 で異なるが、どちらのセットに関しても分布の裾野が厚くなるような現象は見られない。事実、3 次、4 次のモーメントは共に 0 に近く、どちらの分布も概ね正規分布に従っている。このため、セット 1、2 の下で株価リターンの分布の両側の裾野が厚くなることを満期における配当  $D(T)$  の分布から説明することは難しい。そこで、株価配当率の対数変化率の分布が満期における株価リターンの分布へ与える影響について考察する。この数値実験においては  $n = 2$ 、つまり、配当成長率  $\theta_i$  は -8% と 8% の 2 通りである。株価配当率の対数変化率を見ると株価リターンの分布と同様に、セット 1 の 3 次モーメントはプラスの値であるのに対して、セット 2 ではマイナスの値となることが確認される。つまり、株価リターンの分布において、株価配当率の対数変化率が大きな影響を与えていることがわかる。

ここで、株価配当率の対数変化率の分布が上記のような形状となる理由を考える。セット

1、2 の下で、配当成長率  $\theta_i$  が -8% と 8% となる場合の  $C_i$  を式 (12)、式 (13) から求めると、セット 1 ではそれぞれ 62.42、104.91、セット 2 ではそれぞれ 41.33、69.48 となる。セット 1 では、初期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(0)C_i$  は、 $C_1 = 62.42$  に 90% のウエイト、 $C_2 = 104.91$  に 10% のウエイトがかかっている。これに対して、満期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(T)C_i$  では、満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) が初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) から定常状態におけるウエイト (分布として与えられ、その期待値は  $f_i$ ) へと移行する過程にあるため、 $C_1 = 62.42$  へのウエイト  $\pi_1(T)$  の期待値は 90% より低く、 $C_2 = 104.91$  へのウエイト  $\pi_2(T)$  は 10% より高くなり、かつ、共に定数ではなく分布として与えられる。このため、満期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(T)C_i$  は初期時点における  $\sum_{i=1}^2 \pi_i(0)C_i$  よりも大きく、株価配当率の対数変化率の分布の期待値は先に見たように正の値となる。また、ウエイト  $\pi_2(T)$  が分布として与えられることから、株価配当率の対数変化率の右側の裾野が厚くなる。セット 2 では、セット 1 とは全く逆の状況になる。これが、株価リターン分布において片側の裾が厚くなる要因となっている。

#### 4.2.2 ボラティリティ・スマイル (配当成長率 $\theta_i$ の観点)

配当成長率  $\theta_i$  として 3 状態を想定して表 1-b の Smile( $\theta_i$ ) に示すような 3 通りのセットを分析対象とする。セット 1 は、配当成長率  $\theta_i$  が -12%、0%、8% の状態、セット 2 は、配当成長率  $\theta_i$  が -18%、0%、13% の状態、セット 3 では、配当成長率  $\theta_i$  が -24%、0%、16% の状態を取ると想定している。セット 1 からセット 3 になるに従って、配当成長率  $\theta_i$  の取りうる状態の散らばりが大きくなるように設定されている。次に、配当成長率に関する現在の投資家の推測  $\pi_i(0)$  について確認しておく。先に見た配当成長率の状態の順に、セット 1 では、12.5%、75%、12.5%、セット 2 では、7.5%、85%、7.5%、セット 3 では、5%、90%、5%、に設定されている。

実験結果 (図 4) から、セット 1 ではどの権利行使価格の IV も概ね同程度であるのに対して、セット 2 では権利行使価格が現在の株価である 10000 円から乖離するに従って IV は高くなっておりスマイルが確認される。また、セット 3 になると、セット 2 よりもスマイルが顕著に現れる。

4.2.1 節と同様にして、モデルのパラメータセットとスマイルとの因果関係を検討する。表 3 には、表 1-b の各セットの下でのシミュレーションにより得られた株価リターン、配当の対数変化率、株価配当率の対数変化率に関する分布に関する 1 次から 4 次までのモーメントを示した。通常、両側の裾野が厚い確率分布は、分布の中央部分が尖った形となり 4 次モーメント (尖度) が大きい。表 3 を見ると、株価リターンに関する 4 次モーメントは、

セット1からセット3になるに従って大きくなっており、株価リターン分布の両側の裾野は、セット1からセット3の順に厚くなるのがわかる。これが、先に見たセットとスマイルとの関係が生じる要因である。

株価リターン分布の両側の裾野がセット1からセット3の順に厚くなる要因について、株価リターンを配当の対数変化率と株価配当率の対数変化率に分解して詳しく分析する。表3から、何れのセットにおいても、配当の対数変化率に関する分布の3次、4次モーメントは共に0に近く、どちらの分布も概ね正規分布に従っている。これに対して、株価配当率の対数変化率に関する分布の4次モーメントは、セット1からセット3の順に大きいことがわかる。よって、株価リターン分布の両側の裾野が厚くなる要因は、主に、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚いことによると考えられる。

セット1からセット3の順に、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野が厚くなることを確認しておく。この数値実験においては  $n = 3$ 、つまり、配当成長率  $\theta_i$  の取りうる状態は3通りである。各セットの下で、配当成長率が0ではない状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合に対する  $C_1, C_3$  を式(12)、式(13)から求めると、セット1ではそれぞれ47.16, 95.42, セット2ではそれぞれ41.37, 110.70, セット3ではそれぞれ36.74, 131.54と、セット1からセット3になるに従って配当成長率の状態が  $\theta_1$  と  $\theta_3$  の場合で  $C_1$  と  $C_3$  に大きな違いが見られる。配当成長率が  $\theta_2 = 0$  の場合の  $C_i$  は、配当成長率が状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合の  $C_1$  と  $C_3$  を平均した水準程度であり、何れのセットにおいても同程度である。株価配当率の対数変化率を求める際に重要なのは、初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) と満期にお

けるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) である。満期におけるウエイト  $\pi_i(T)$  (分布として与えられる) は、初期時点におけるウエイト  $\pi_i(0)$  (定数) から定常状態におけるウエイト (分布として与えられ、その期待値は  $f_i$ ) へと近づいていく過程にある。何れのセットにおいても定常状態において配当成長率が  $\theta_2 = 0$  ( $C_i$  の平均水準である  $C_2$  を与える) をとる期待値  $f_2$  は90%であるが、初期時点におけるウエイト  $\pi_2(0)$  (定数) がセット3では90%とセット1の75%よりも大きいので、セット3の満期におけるウエイト  $\pi_2(T)$  の期待値はセット1よりも大きく、株価配当率の対数変化率に関する分布の平均部分の確率が高くセット3の方がセット1よりも中央部分が尖った分布となる。また、株価配当率の対数変化率に関する分布の裾野がセット1よりセット3の方が厚くなるのは、先に述べたように、配当成長率が状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる場合の  $C_1$  と  $C_3$  がセット3ではセット1に比べて大きく乖離していること、初期時点とは異なり満期ではセット3において配当成長率が状態  $\theta_1, \theta_3$  をとる確率  $\pi_1(T), \pi_3(T)$  がセット1にそれほど見劣りしないことによる。

## 5. まとめと結語

本研究では、BSモデルとの対比を想定し投資家の効用関数をリスク中立的と仮定して、投資家の推測を考慮した株価評価モデルを素直に発展させる形でオプション評価モデルを提案した。また、数値実験においては、モンテカルロ・シミュレーションに基づいて、投資家の推測に関するモデルのパラメータとスキューやスマイルとの関係を検討した。

数値実験においては、投資家の推測を表現するパラメータが、オプション満期までの株価リターン分布の裾野の厚さに影響を及ぼすことによってIVにスキューやスマイルが生じることを確認した。更にスキューやスマイルの要因を株価リターンの構成要素となる配当の対数変化率や株価配当率の対数変化率に関する分布に基づいて分析した。数値実験結果から、投資家の推測を表現するパラメータによってIVにスキューやスマイルが生じるのは、配当の対数変化率よりも株価配当率の対数変化率にパラメータが与える影響によるところが大きかった。また、数値実験によって、投資家の推測を表現するパラメータとIVのスキューやスマイルとの関係が直感的に想定される結果と概ね整合的であることもわかった。

## 参考文献

- 1) P. Veronesi: How does information quality affect stock returns. Journal of Finance 55 (2000), 807-837
- 2) A. David and P. Veronesi: Option prices with uncertain fundamentals. Working-paper, University of Chicago (2002)

表3 表1-bのセットの下での各モーメント

		1	2	3
$\ln\left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)$	$E[x]$	-0.65 %	-0.81 %	-1.00 %
	$E[(x-\mu)^2]$	1.36 %	1.68 %	2.06 %
	$E[(x-\mu)^3]$	-0.0010 %	-0.0321 %	-0.0835 %
	$E[(x-\mu)^4]$	0.0044 %	0.0403 %	0.1541 %
$\ln\left(\frac{D(T)}{D(0)}\right)$	$E[x]$	-0.23 %	-0.27 %	-0.28 %
	$E[(x-\mu)^2]$	0.36 %	0.37 %	0.38 %
	$E[(x-\mu)^3]$	-0.0002 %	-0.0006 %	-0.0012 %
	$E[(x-\mu)^4]$	0.0000 %	0.0001 %	0.0001 %
$\ln\left(\frac{\sum \pi_i(T)C_i}{\sum \pi_i(0)C_i}\right)$	$E[x]$	-0.42 %	-0.54 %	-0.72 %
	$E[(x-\mu)^2]$	0.43 %	0.63 %	0.91 %
	$E[(x-\mu)^3]$	-0.0003 %	-0.0134 %	0.0373 %
	$E[(x-\mu)^4]$	0.0010 %	0.0124 %	0.0583 %