

テクニカルノート

代用電荷法による直線スリット領域への
数値等角写像

天野 要^{†1} 鳳 弘勝^{†1,*1} 李 涛^{†1}
遠藤 慶一^{†1} 岡野 大^{†1}

様々な正準スリット領域への数値等角写像は科学技術計算において重要である。この論文では、代用電荷法を用いて非有界な多重連結領域から直線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を簡単な数値例で示す。この正準領域はポテンシャル流問題で広く知られる平行スリット領域の一般化になっている。

Numerical Conformal Mappings onto a Rectilinear
Slit Domain by the Charge Simulation Method

KANAME AMANO,^{†1} HIROKATSU OOTORI,^{†1,*1} TAO LI,^{†1}
KEIICHI ENDO^{†1} and DAI OKANO^{†1}

Numerical conformal mappings onto canonical slit domains are important in scientific computations. In this paper, using the charge simulation method, we present a numerical method for the conformal mapping of unbounded multiply connected domains onto a rectilinear slit domain, which is a generalization of the parallel slit domain well-known for potential flow problems. Simple numerical examples show the effectiveness of our method.

^{†1} 愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻

Department of Electrical and Electronic Engineering and Computer Science, Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

*1 現在、日立システムアンドサービス株式会社

Presently with Hitachi Systems & Services, Ltd.

1. はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題であり、物理学や工学への応用が広い。しかし、多くの場合、与えられた条件を満たす等角写像を求めるには数値計算が必要である。それゆえ、数値等角写像は科学技術計算の重要な課題として古くから研究されている^{4),12)}。

多重連結領域の場合には、単連結領域の場合の単位円板領域のような単一の標準領域は存在しない。等角写像できるのは多重度 n だけでなく $3n - 6$ ($n \geq 3$) 個のモジュラスと呼ばれる保存量が同じ領域間に限られる。そこで、いかなる多重度とモジュラスの場合にも等角写像が存在するように、幾何学的な形状に着目した領域を設定して正準領域とするという方法がとられる。このような領域には平行スリット領域、円弧スリット領域、放射スリット領域、円弧スリットをともなう円板領域、円弧スリットをともなう円環領域等がある⁷⁾。これらのスリットをともなう正準領域への等角写像は流体力学、電磁気学、電気工学等への応用上も重要でありながら、簡単で精度の高い数値計算法はあまり知られていなかった。我々はこれらの等角写像の問題にラプラス方程式の数値解法として知られている代用電荷法^{6),9)}を適用し、非有界な多重連結領域から平行スリット領域、円弧スリット領域、放射スリット領域への等角写像と有界な多重連結領域から円弧スリットをともなう円板領域、円環領域への等角写像の表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を与えた^{1),2),10)}。

この論文では、非有界な多重連結領域から直線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を簡単な数値例で示す。この正準領域はポテンシャル流問題で広く知られる平行スリット領域の一般化になっている。

2. 写像定理と問題

図1のように無限遠点を含み直線分状のスリット S_1, S_2, \dots, S_n をともなう複素平面の全体を直線スリット領域と呼ぶ。ここでは $z = x + iy$ 平面上のジョルダン閉曲線 C_1, C_2, \dots, C_n の外側の無限遠点を含む非有界な n 重連結領域 D から $w = u + iv$ 平面上の直線スリット領域への等角写像 $w = f(z)$ を考える。このとき、曲線 C_1, C_2, \dots, C_n はそれぞれ実軸と角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ をなす直線スリット S_1, S_2, \dots, S_n に移るとする。Shiba¹¹⁾ は、より一般的な枠組みの中で、平行スリット領域への写像定理（下記で $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta$ の場合⁷⁾）をこのような直線スリット領域に一般化した。

定理 上記の直線スリット領域への等角写像は、スリット S_1, S_2, \dots, S_n が実軸となす角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ を任意に指定し、 $f(\infty) = \infty$ かつ無限遠点を中心とするローラン級数が

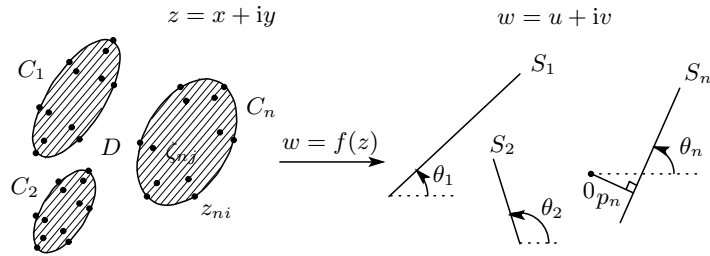


図 1 直線スリット領域への等角写像 (ζ_{nj} は電荷点, z_{ni} は拘束点)

Fig. 1 Conformal mapping onto the rectilinear slit domain (ζ_{nj} is for charge points, and z_{ni} collocation points).

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (1)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる.

問題の等角写像の写像関数を

$$f(z) = z + g(z) + ih(z) \quad (2)$$

と表現する. $g(z)$ と $h(z)$ ($g(x, y)$ と $h(x, y)$ をこのように略記する) は D で調和な関数とその共役対で, 無限遠点における正規化条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad g(\infty) + ih(\infty) = 0 \quad (3)$$

と, 閉曲線 C_m が実軸と角 θ_m をなす直線スリット S_m に移るという境界条件

$$\text{Im}(e^{-i\theta_m} f(z)) = p_m, \quad \text{i.e.,} \quad \text{Im}[e^{-i\theta_m} (g(z) + ih(z))] - p_m = -\text{Im}(e^{-i\theta_m} z) \quad (4)$$

$(z \in C_m, m = 1, 2, \dots, n)$

を満たさなければならない. p_m は w 平面上の原点からスリット S_m を含む直線までの符号付き距離を意味する未知の定数である.

こうして問題は, 式 (3) と (4) を満たす調和関数対 $g(z)$ と $h(z)$ を定数 p_m の値とともに求めることに帰着する. 境界条件 (4) が $g(z)$ だけではなく $h(z)$ を含み, 解析関数 $g(z) + ih(z)$ に対する条件となっていることに注意する.

3. 代用電荷法の適用

代用電荷法を用いて, この調和関数対を複素対数関数の 1 次結合で

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (5)$$

と近似する. Q_0 は未知の複素定数, Q_{lj} は未知の実係数 (電荷と呼ばれる) である. 特異点 (電荷点と呼ばれる) ζ_{lj} は領域 D の外部すなわち閉曲線 C_l の内側に配置される. この近似関数に次の 3 条件を課す.

(i) 1 価性条件: 式 (5) が D で 1 価であるためには

$$\int_{C_l} dH(z) = \int_{C_l} d \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^{N_m} Q_{mj} \arg(z - \zeta_{mj}) = 2\pi \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

でなければならない (十分条件でもある).

(ii) 正規化条件: この 1 価性条件の下, 式 (3) から

$$G(\infty) + iH(\infty) = Q_0 + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) = 0$$

を課して $Q_0 = 0$, したがって

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (7)$$

を得る.

(iii) 拘束条件: 各閉曲線 C_m 上に電荷と同数の拘束点 z_{mi} を配置し, 式 (7) に境界条件 (4) を選点的に課して拘束条件

$$\text{Im}[e^{-i\theta_m} (G(z_{mi}) + iH(z_{mi}))] - P_m = -\text{Im}(e^{-i\theta_m} z_{mi}),$$

i.e.,

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} [-\sin \theta_m \log |z_{mi} - \zeta_{lj}| + \cos \theta_m \arg(z_{mi} - \zeta_{lj})] - P_m$$

$$= -\text{Im}(e^{-i\theta_m} z_{mi})$$

$$(z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

を得る。\$P_m\$ は \$p_m\$ の近似値である。

式 (6) と (8) は \$Q_{lj}\$ と \$P_m\$ に関する \$N_1 + N_2 + \dots + N_n + n\$ 元連立 1 次方程式を構成する。これを解いて式 (7) で \$G(z) + iH(z)\$ を定め、\$g(z) + ih(z)\$ の近似値として式 (2) に代入すれば近似写像関数 \$F(z) \simeq f(z)\$ を得ることができる。

数値計算には複素対数関数の主値を用いる。すると、式 (7) の \$\log(z - \zeta_{lj})\$ は半直線 \$\{\zeta_{lj} - t \mid t > 0\}\$ 上に \$2\pi i\$ の不連続をともなう。我々は領域 \$D\$ でこのような不連続を生じない近似写像関数（連続スキームと呼ぶ）を構成したい。ここでは閉曲線 \$C_1, C_2, \dots, C_n\$ はそれぞれの内側の 1 点 \$\zeta_{10}, \zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}\$ に対して星形であると仮定する。前述の 1 価性条件 (6) の下、式 (7) を

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} [\log(z - \zeta_{lj}) - \log(z - \zeta_{l0})]$$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (9)$$

と変形する。式 (9) の \$\log((z - \zeta_{lj})/(z - \zeta_{l0}))\$ の不連続は線分 \$(\zeta_{lj}, \zeta_{l0})\$ 上に現れる。こうして領域 \$D\$ で連続な近似写像関数を構成することができる。

連続スキーム 近似写像関数を

$$F(z) = z + G(z) + iH(z), \quad (10)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (11)$$

と表現すれば、未定の実係数 \$Q_{lj}\$ は \$P_m\$ とともに \$N_1 + N_2 + \dots + N_n + n\$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \left[-\sin \theta_m \log \left| \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z_{mi} - \zeta_{l0}} \right| + \cos \theta_m \arg \frac{z_{mi} - \zeta_{lj}}{z_{mi} - \zeta_{l0}} \right] - P_m$$

$$= -\text{Im}(e^{-i\theta_m} z_{mi})$$

$$(z_{mi} \in C_m, i = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

を解いて得られる。

4. 数 値 例

3 個の円

\$C_l : |z - \zeta_{l0}| = 1, \zeta_{l0} = 3(2 - l) \quad (l = 1, 2, 3)\$
 の外側の 3 重連結領域を \$D\$ とし、拘束点と電荷点を

$$z_{lj} = \zeta_{l0} + \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \quad \zeta_{lj} = \zeta_{l0} + q \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}$$

$$(j = 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, 3) \quad (14)$$

と配置する。\$0 < q < 1\$ は電荷配置のパラメータである。誤差の指標としては

$$\epsilon_{F_l} = \max_{1 \leq k \leq M} |\text{Im}(e^{-i\theta_l} F(z_{lk})) - P_l|, \quad \epsilon_{P_l} = P_l - P_l^{(2N)} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (15)$$

を用いる。\$z_{lk}\$ は \$C_l\$ 上に一様に置かれた \$M = 8N\$ 個の点で、\$P_l^{(2N)}\$ は電荷数を \$N\$ から \$2N\$ に倍増して得られた計算値である。

図 2 は \$\theta_1 = \pi/10, \theta_2 = 2\pi/10, \theta_3 = 3\pi/10\$ の場合の数値等角写像の結果である。表 1 はその計算誤差である。\$\kappa\$ は連立 1 次方程式 (12), (13) の \$L_1\$ 条件数で、\$P_l\$ は (15) の第 2 式右辺に非零の数字が現れた桁までを記している。

この方法は \$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta\$ として平行スリット領域の問題にそのまま適用可能

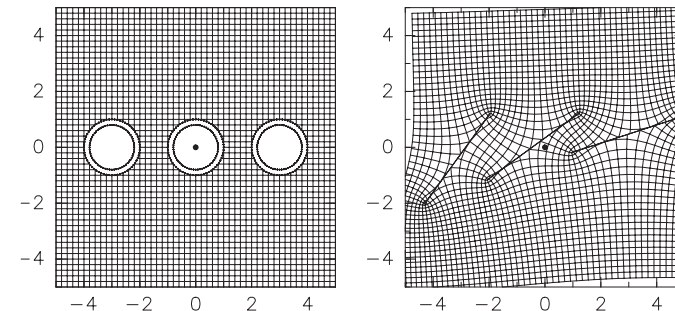


図 2 直線スリット領域への数値等角写像 (\$\theta_1 = \pi/10, \theta_2 = 2\pi/10, \theta_3 = 3\pi/10\$)

Fig. 2 Numerical conformal mapping onto the rectilinear slit domain (\$\theta_1 = \pi/10, \theta_2 = 2\pi/10, \theta_3 = 3\pi/10\$).

表 1 数値等角写像の計算誤差 ($q = 0.8$)
 Table 1 Numerical errors of the conformal mapping ($q = 0.8$).

N		ϵ_{F_1}	ϵ_{P_1}	P_1	κ
32	C_1	9.9E-05	4.2E-06	-0.474113	
	C_2	1.1E-04	1.6E-05	0.27212	1.2E+03
	C_3	1.2E-04	1.2E-05	2.29859	
64	C_1	3.9E-08	1.8E-09	-0.474109234	
	C_2	4.2E-08	6.5E-09	0.272131810	1.2E+05
	C_3	4.7E-08	4.6E-09	2.298598825	

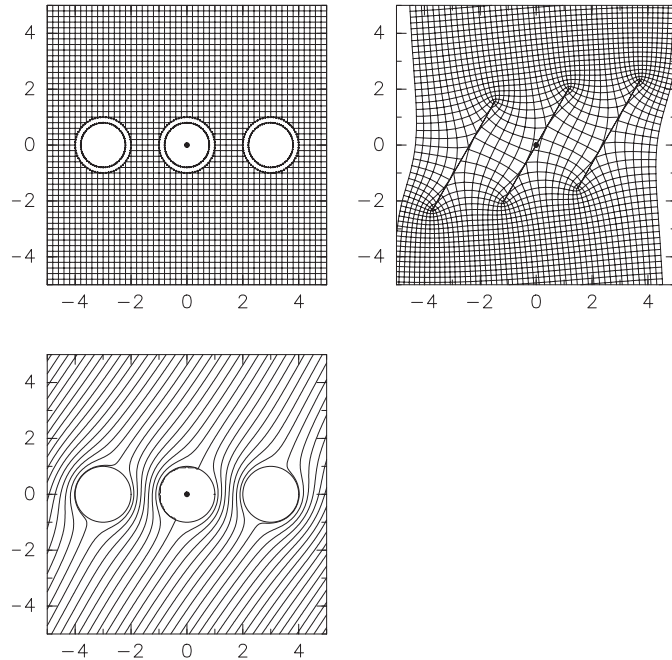


図 3 平行スリット領域への数値等角写像 ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/3$) と障害物を過ぎる一様流

Fig. 3 Numerical conformal mapping onto the parallel slit domain ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/3$) and a uniform potential flow past three cylindrical obstacles.

である．図 3 は $\theta = \pi/3$ の場合の結果である．左下は $\text{Im}(e^{-i\theta} F(z))$ の等高線で，3 個の円柱状の障害物を過ぎる一様流の流線を表現している⁵⁾．計算誤差は表 1 とほとんど同じである．

提案された方法は次の 3 つの条件が重なると解くべき連立 1 次方程式に数値的悪条件を生じることがある：(i) 境界曲線，たとえば C_m ，が対称性を持ち，(ii) $\theta_m = 0$ で，(iii) 偶数 N_m 個の電荷を用いる．実際，問題の領域が単一円の外部で， $\theta = 0$ ，さらに偶数 N 個の拘束点と電荷点に等間隔同相配置 (14) を用いた場合には $N + 1$ 行 $N + 1$ 列の係数行列が特異であることは容易に分かる．しかし，数値実験の結果では多重連結領域の境界曲線が楕円や Cassini の楕形の場合にも悪条件を生じている．

5. おわりに

非有界な多重連結領域から一般的な直線スリット領域への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を簡単な数値例で示した．この方法は平行スリット領域への数値等角写像にもそのまま適用可能である．奇数個の電荷を用いれば簡単に避けることはできるが，対称性の高い境界閉曲線 C_m に対して $\theta_m = 0$ を指定した場合に生じる悪条件問題の解析を今後の課題としたい．

なお，もう 1 つの正準領域として円境界領域（すべての境界が円であり，スリットはともなわない）がある．近年，円境界領域から正準スリット領域への等角写像が注目を集めている³⁾．代用電荷法はこの問題を得意としている．また，周期基本解を用いて周期的領域の等角写像も可能になる等，その適用性を広げている⁸⁾．

謝辞 研究に関して日頃から助言をいただく東京大学の杉原正顯教授と電気通信大学の緒方秀教准教授に感謝する．なお，この研究は日本学術振興会の科学研究費補助金（課題番号 19340024）の補助を受けている．

参 考 文 献

- 1) Amano, K.: A Charge Simulation Method for Numerical Conformal Mapping onto Circular and Radial Slit Domains, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.19, No.4, pp.1169–1187 (1998).
- 2) 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯: 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法, *情報処理学会論文誌*, Vol.42, No.3, pp.385–395 (2001).
- 3) Crowdy, D.G. and Marshall, J.: Conformal Mappings between Canonical Multiply Connected Domains, *Comput. Meth. Funct. Theory*, Vol.6, No.1, pp.59–76 (2006).
- 4) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.3, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 5) 今井 功: 複素解析と流体力学, 日本評論社, 東京 (1989).

- 6) 村島定行：代用電荷法とその応用，森北出版，東京（1983）.
- 7) Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York (1952).
- 8) Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Numerical Conformal Mapping of Periodic Structure Domains, *Japan J. Industr. Appl. Math.*, Vol.19, No.2, pp.257–275 (2002).
- 9) 岡本 久，桂田祐史：ポテンシャル問題の高速解法，*応用数理*，Vol.2, No.3, pp.212–230 (1992).
- 10) Okano, D., Ogata, H., Amano, K. and Sugihara, S.: Numerical Conformal Mappings of Bounded Multiply Connected Domains by the Charge Simulation Method, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.159, No.1, pp.109–117 (2003).
- 11) Shiba, M.: On the Riemann-Roch Theorem on Open Riemann Surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol.11, No.3, pp.495–525 (1971).
- 12) Trefethen L.N. (Ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2 (1986).

(平成 21 年 3 月 25 日受付)

(平成 21 年 5 月 13 日採録)



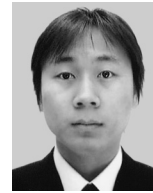
天野 要（正会員）

1948 年生。1971 年京都大学工学部電子工学科卒業。1978 年北海道大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。工学博士。現在，愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻教授。研究分野は数値解析，情報科学，認知心理学。情報処理学会創立 30 周年記念論文賞，日本応用数理学会 1996 年度論文賞，情報処理学会創立 40 周年記念論文賞受賞。日本数学会，日本応用数理学会，日本心理学会，SIAM 各会員。



鳳 弘勝

1983 年生。2006 年愛媛大学工学部情報工学科卒業。2008 年愛媛大学大学院理工学研究科博士前期課程電子情報工学専攻修了。現在，日立システムアンドサービス株式会社勤務。在学中の研究課題は代用電荷法と数値等角写像。



李 涛（学生会員）

1977 年生。2005 年愛媛大学理学部物質理学科卒業。2007 年愛媛大学大学院理工学研究科博士前期課程情報工学専攻修了。現在，同博士後期課程電子情報工学専攻在学中。研究課題は代用電荷法と数値等角写像。日本応用数理学会学生会員。



遠藤 慶一（正会員）

1980 年生。2003 年京都大学工学部情報学科卒業。2005 年京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻修士課程修了。2008 年同博士後期課程修了。博士（情報学）。現在，愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻助教。研究分野はネットワーク，情報処理，応用数理。電子情報通信学会，日本応用数理学会各会員。



岡野 大（正会員）

1968 年生。1992 年東京大学工学部物理工学科卒業。1995 年東京大学大学院工学系研究科修士課程物理工学専攻修了。博士（情報理工学）。現在，愛媛大学大学院理工学研究科電子情報工学専攻准教授。研究分野は数値解析，情報処理。情報処理学会創立 40 周年記念論文賞受賞。日本応用数理学会会員，SIAM 各会員。