

# IDR 定理に基づく GS 法と SOR 法の提案と収束性評価

春松正敏 (本田技術研究所), 日下部雄三 (九州大学大学院), 藤野清次 (九州大学),  
福重貴浩 (本田技術研究所), 有馬敏幸 (本田技術研究所), ペーター ソネフェルト (デルフト工科大学)

概要: P. Sonneveld と M. van Gijzen 両博士により IDR 定理とそれに基づく反復法 IDR(s) 法が発表され, 斬新なアイデアと収束性のよさから注目されている. さらに, 同時に IDR 定理を応用した新 Gauss-Seidel(GS) 法も発表された. そこで, 新 GS 法に関する Sonneveld の着想を拡張し, 一般形の行列にも適用可能な算法に拡張整理できたので, その導出と評価結果を報告する.

## A Proposal of Gauss-Seidel and Successive Over-Relaxation Methods based on IDR Theorem

Masatoshi Harumatsu (Honda R&D), Yuzo Kusakabe, Seiji Fujino (Kyushu Univ.), Takahiro Fukushima  
(Honda R&D), Toshiyuki Arima (Honda R&D), Peter Sonneveld (Delft Univ. of Tech.)

**Abstract:** We consider generalization of the stationary iterative methods, especially Gauss-Seidel method, based on IDR (Induced Dimension Reduction) Theorem proposed by P. Sonneveld and M. van Gijzen in 2008. To build up recurrence of residual vector of Gauss-Seidel method is an underlying factor for designing efficient and robust iterative methods as the CG method. Through numerical experiments, we verify effectiveness of IDR-based Gauss-Seidel method.

### 1. はじめに

2008 年, P. Sonneveld と M. van Gijzen 両博士により IDR 定理とそれに基づく反復解法 IDR(s) 法が発表され, その斬新なアイデアと収束性のよさからいま注目されている [4] [6]. 同時に, 第 1 著者により IDR 定理を応用した新 Gauss-Seidel(GS) 法も発表された [1] [3]. 本研究では, 新 GS 法に関する Sonneveld の着想を拡張し, 一般形の行列にも適用可能な算法の形に拡張できたので, その導出と評価結果を報告する. 本稿の構成は次のとおりである. 第 2 節で, いくつかの反復アルゴリズムについて考察する. 第 3 節で, IDR-based GS 法の導出および収束判定の初期残差依存性を解消した IGS- $\beta$  版法の算法を記述する. また, 算法中の係数の選択について考察する. 第 4 節で, 数値実験を通して, IGS- $\alpha$  版法と IGS- $\beta$  版法の収束特性を各々明らかにする. 最後に, 第 5 節でまとめる.

### 2. 反復アルゴリズム

#### 2.1 反復アルゴリズム 1

解くべく線形方程式を

$$Ax = b \quad (1)$$

とする. ここで, 行列  $A$  は大きさ  $N \times N$  の実数行列,  $x$  と  $b$  は  $N$  次元の解ベクトルと右辺ベクトルと各々する. そして,  $A = I - B$  と表せるとき, 以下のように変形できる.

$$x = Bx + b. \quad (2)$$

ここで, 次の漸化式を考える. ここで,  $x_0$  は初期近似解ベクトルである.

$$x_{k+1} = Bx_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

スペクトル半径  $\rho(B) < 1.0$  の関係が成り立つときこの漸化式は収束する. また, 残差ベクトル  $r_k$  は次の式で表される.

$$r_k = Bx_k + b - x_k. \quad (4)$$

この残差ベクトル  $r_k$  を用いると, 近似解ベクトル  $x_{k+1}$  は次のように表される.

$$x_{k+1} = x_k + r_k. \quad (5)$$

さらに, 残差  $r_k$  に関する次の漸化式が成り立つ.

$$\begin{aligned} r_k &= Bx_k + b - x_k = B(x_k - x_{k-1}) \\ &= Br_{k-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

以上の 2 つの漸化式を用いて次の反復アルゴリズムが得られる. 残差ベクトル  $r_{k+1}$  の違いを除けば

Richardson の算法になる [2].  $\epsilon$  は収束判定用の微小な値とする.

### 反復アルゴリズム 1

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial solution,  
put  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 = B\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} - \mathbf{x}_0$ ,  
for  $k = 0, 1, 2, \dots$   
   $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k$ ,  
   $\mathbf{r}_{k+1} = B\mathbf{r}_k$ ,  
  if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  stop  
end for.

## 2.2 反復アルゴリズム 2

方程式 (1) が式 (2) のように表せる場合を考える [1][3]. このとき, IDR 定理に基づき, 残差  $\mathbf{r}_{k+1}$  が次の関係式を満たすとす.

$$\mathbf{r}_{k+1} = B(\mathbf{r}_k + \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})). \quad (7)$$

係数  $\gamma_k$  は, 原論文 [3] に従い, IDR 定理で導入された任意ベクトル  $\mathbf{p}$  との直交関係,

$$\mathbf{r}_k + \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}) \perp \mathbf{p} \quad (8)$$

すなわち,

$$(\mathbf{p}, \mathbf{r}_k + \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})) = 0 \quad (9)$$

から求められる. 式 (7) から次の漸化式が導ける.

$$\begin{aligned} & (B - I)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \\ &= \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k \\ &= B(\mathbf{r}_k + \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})) - \mathbf{r}_k \\ &= (B - I)(\mathbf{r}_k + \gamma_k B(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})). \end{aligned} \quad (10)$$

共通因子  $(B - I)$  を両辺から除去すると,

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{r}_k + \gamma_k B(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) \\ &= \mathbf{r}_k + \gamma_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}) + \gamma_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

となる. このとき, 以下の算法が得られる.

### 反復アルゴリズム 2

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial solution,  
put  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 = B\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} - \mathbf{x}_0$ ,  
Let  $\mathbf{p}$  be a random vector, set  $\gamma_0 = 0$ ,

for  $k = 0, 1, 2, \dots$

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \gamma_k d\mathbf{x}_k + (\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k)$ ,  
   $\mathbf{r}_{k+1} = B(\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k)$ ,  
   $d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ ,  
   $d\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k$ ,  
   $\gamma_{k+1} = -\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{p}, d\mathbf{r}_{k+1})}$ ,  
  if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  stop  
end for.

## 2.3 反復アルゴリズム 2 の一般化

これまででは, 行列  $A$  が  $A = I - B$  と表せる場合を考えてきたが, ここでは一般的な場合への拡張

$$A = M - N \quad (12)$$

を考える. ここで, 行列  $M, N$  は正則とする. このとき, 解くべき方程式 (1) は次のように表わされる.

$$M\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (13)$$

さらに,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= M^{-1}N\mathbf{x} + M^{-1}\mathbf{b} \\ &= B\mathbf{x} + \mathbf{b} \end{aligned} \quad (14)$$

と変形し, 反復アルゴリズム 2 を適用する. ここで,

$$B = M^{-1}N, \mathbf{b} = M^{-1}\mathbf{b} \quad (15)$$

である. 一般化した反復算法が次のように得られる.

### 一般化した反復アルゴリズム

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial solution,  
put  $\mathbf{r}_0 = M^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0)$ ,  
Let  $\mathbf{p}$  be a random vector, set  $\gamma_0 = 0$ ,  
for  $k = 0, 1, 2, \dots$

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \gamma_k d\mathbf{x}_k + (\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k)$ ,  
   $\mathbf{r}_{k+1} = M^{-1}N(\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k)$ ,  
   $d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ ,  
   $d\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k$ ,  
   $\gamma_{k+1} = -\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{p}, d\mathbf{r}_{k+1})}$ ,  
  if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  stop  
end for.

## 3 IDR-based Gauss-Seidel 法

$$A = L + D + U \quad (16)$$

と分離する．ここで， $L$  は狭義下三角行列， $D$  は対角行列， $U$  は狭義上三角行列とする．そして，一般化反復法において， $M = L + D$ ， $N = -U$  とおくと，IDR-based Gauss-Seidel 法 (以下，IGS 法と略す) が得られる．また，その第 1 版という意味で IGS- $\alpha$  版法と呼ぶ．Sonneveld の提案した元の IGS 法の算法 [3]<sup>1</sup> を修正し，実装向きに書き換えた IGS- $\alpha$  版法 [1] の算法を以下に示す． $\epsilon$  は収束判定用の微小な値とする．

### IGS- $\alpha$ 版法の算法

```

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial solution,
put  $\mathbf{r}_0 = (L + D)^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0)$ ,
Let  $\mathbf{p}$  be a random vector, set  $\gamma_0 = 0$ ,
for  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
   $\mathbf{s}_k = \mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k$ ,
   $d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k + \gamma_k d\mathbf{x}_k$ ,
   $d\mathbf{r}_{k+1} = -(L + D)^{-1} U\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k$ ,
   $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}$ ,
   $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}$ ,
  if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  stop
   $\gamma_{k+1} = -\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{p}, d\mathbf{r}_{k+1})}$ ,
end for.
```

ここで， $\mathbf{s}_k$  は補助ベクトルである．IGS- $\alpha$  版法では，初期残差  $\mathbf{r}_0$  が，通常のように  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$  ではなく， $\mathbf{r}_0 = (L + D)^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0)$  である．したがって，収束解の真の残差の精度が要求された精度に達していないことがあり得る．そこで，収束したときの残差と真の残差との相違を極力少なくするために，以下の IGS- $\beta$  版法を考案した．

### 3.1 IGS- $\beta$ 版法

IGS- $\alpha$  版法の算法中の残差ベクトル  $\mathbf{r}_k$  を  $\mathbf{r}'_k$  と置き換え，さらに  $\mathbf{r}'_k = (L + D)^{-1}\mathbf{r}_k$  と変換し，最後に元の残差  $\mathbf{r}_k$  の記法に戻すと，IGS- $\beta$  版法が得られる．IGS- $\beta$  版法では，ベクトル  $\mathbf{r}_0$ ， $\mathbf{p}$ ， $\mathbf{s}_k$ ， $d\mathbf{r}_k$  の更新式が IGS- $\alpha$  版法と異なる．ここで，補助ベクトル  $\mathbf{p}$  を  $\mathbf{p} = (L + D)^{-T}\mathbf{p}$  とおくと，IGS- $\alpha$  版法の算法と同じになる． $T$  は行列転置を表す．

### IGS- $\beta$ 版法の算法

<sup>1</sup> 原論文 [3] では，Accelerated GS 法，略して AGS 法と記述されているが，すでに同名の反復法が別があり，混乱を避けるため IDR-based の頭文字をとり IGS 法と本稿では呼ぶことにする．

```

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial solution,
put  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ,
Let  $\mathbf{p}$  be a random vector, set  $\gamma_0 = 0$ ,
for  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
   $\mathbf{s}_k = (D + L)^{-1}(\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k)$ ,
   $d\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{s}_k + \gamma_k d\mathbf{x}_k$ ,
   $d\mathbf{r}_{k+1} = -U\mathbf{s}_k - \mathbf{r}_k$ ,
   $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + d\mathbf{r}_{k+1}$ ,
   $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_{k+1}$ ,
  if  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$  stop
   $\gamma_{k+1} = -\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{p}, d\mathbf{r}_{k+1})}$ ,
end for.
```

## 3.2 係数 $\gamma_k$ の選択法

### 3.2.1 $\gamma_k$ の選択 1

2.2 小節で述べたように，残差ベクトル  $\mathbf{r}_{k+1}$  の更新の式  $\mathbf{r}_{k+1} = B(\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k)$  において，任意ベクトル  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k$  との直交条件から，

$$\gamma_k = -\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}, d\mathbf{r}_k)} \quad (17)$$

と係数  $\gamma_k$  が決まる．これを選択 1 と呼ぶ．

### 3.2.2 $\gamma_k$ の選択 2

ここでは，残差ベクトル  $\mathbf{r}_{k+1}$  の更新の式  $\mathbf{r}_{k+1} = B(\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k)$  において，括弧の中の式のノルム： $\|\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k\|_2$  の最小化から係数  $\gamma_k$  を決める．すなわち，

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k + \gamma_k d\mathbf{r}_k) \\ &= (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) + 2\gamma_k(\mathbf{r}_k, d\mathbf{r}_k) + \gamma_k^2(d\mathbf{r}_k, d\mathbf{r}_k) \end{aligned}$$

を係数  $\gamma_k$  の 2 次式と考えると  $\gamma_k$  で偏微分する．そして，得られた式  $(\mathbf{r}_k, d\mathbf{r}_k) + \gamma_k(d\mathbf{r}_k, d\mathbf{r}_k)$  の値が 0 であるとすると，

$$\gamma_k = -\frac{(d\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{(d\mathbf{r}_k, d\mathbf{r}_k)} \quad (18)$$

と係数  $\gamma_k$  が決まる．これを選択 2 と呼ぶ．

## 4. 数値実験

### 4.1 テスト問題

Table 1 にテスト行列 (16 個) の仕様を示す。テスト行列はフロリダ大学の疎行列データベースから選出した [5]。各行列の解析分野は、構造解析、流体力学、回路解析、石油輸送、音響解析など多岐に亘り、これらのテスト行列で IGS 法の性能を評価する。

Table 1: Specifications of test matrices.

行列	次元数	非零要素数	非零要素/行	解析分野
epb1	14,734	95,053	6.45	構造解析
epb2	25,228	175,027	6.94	
epb3	84,617	463,625	5.48	
poisson3Da	13,514	352,762	26.10	
poisson3Db	85,623	2,374,949	27.74	流体力学
xenon1	48,600	1,181,120	24.30	
ex10hs	2,548	57,308	22.49	
raefsky2	3,242	294,276	90.77	回路解析
raefsky3	21,200	1,488,768	70.22	
add20	2,395	17,319	7.23	回路解析
add32	4,960	23,884	4.82	
memplus	17,758	126,150	7.10	
wang3	26,064	177,168	6.80	
wang4	26,068	177,196	6.80	
watt1	1,856	11,360	6.12	
k3plates	11,107	378,927	34.12	石油輸送
				音響解析

## 4.2 計算機環境と計算条件

計算機環境と計算条件は次の通りである。計算はすべて倍精度浮動小数点演算で行った。計算機は HP Workstation xw4200(CPU: Intel(R) Pentium(R) 4, クロック周波数: 3.8GHz, メモリ: 3Gbytes, OS: Suse Linux version 9.2) を用いた。コンパイラは Intel Fortran Compiler ver.8.1 を用い、最適化オプションは-O3 を使用した。時間の計測には、Fortran の時間計測関数 etime を用いた。計算時間の単位は秒とする。右辺項ベクトル  $b$  は厳密解が  $\hat{x} = (1, \dots, 1)^T$  となるように、 $b = A\hat{x}$  と定めた。収束性を調べた反復法は、通常の Gauss-Seidel 法、IGS- $\alpha$  版法、同- $\beta$  版法の 3 種類である。IGS 法の補助ベクトル  $p$  には初期残差  $r_0 (= b - Ax_0)$ 、区間  $[0, 1]$  の一様乱数、定数 1.0 の 3 通りを与えた。収束判定条件は相対残差の 2 ノルム:  $\|r_{k+1}\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 10^{-6}$  とした。初期近似解  $x_0$  はすべて 0 とした。行列は予め対角スケーリングによって対角項をすべて 1.0 に正規化した。最大反復回数は 10000 回とした。

Table 2(a): Comparison of convergence of GS, IGS- $\alpha$  and IGS- $\beta$  methods.

行列	解法	係数 $\gamma_k$	$p$	反復回数	計算時間	TRR
epb1	GS	-	-	7614	8.49	-6.00
	$\alpha$ 版	1	$r_0$ rand const	1600 2143 <b>1576</b>	1.59 2.15 1.59	-6.40 -6.56 -6.30
		2	-	1813	1.83	-6.27
	$\beta$ 版	1	$r_0$ rand const	3555 1782 1903	3.45 1.73 1.83	-6.31 -6.08 -6.73
		2	-	1619	1.52	-6.00
	epb2	GS	-	-	951	1.89
$\alpha$ 版		1	$r_0$ rand const	205 208 214	0.38 0.40 0.41	-6.64 -6.44 -6.61
		2	-	153	0.29	-6.28
$\beta$ 版		1	$r_0$ rand const	189 199 195	0.35 0.36 0.36	-6.09 -6.43 -6.17
		2	-	<b>136</b>	0.25	-6.01
epb3		GS	-	-	max	60.34
	$\alpha$ 版	1	$r_0$ rand const	1563 1373 1384	11.24 9.83 10.01	-6.28 -6.15 -6.09
		2	-	max	69.42	-4.75
	$\beta$ 版	1	$r_0$ rand const	1377 <b>1337</b> 1384	9.49 9.23 9.53	-6.14 -6.02 -6.12
		2	-	max	67.09	-4.75
	poisson3Da	GS	-	-	2148	7.15
$\alpha$ 版		1	$r_0$ rand const	191 <b>174</b> 237	0.43 0.39 0.52	-6.44 -6.37 -6.32
		2	-	670	1.45	-6.19
$\beta$ 版		1	$r_0$ rand const	175 202 193	0.39 0.44 0.43	-6.12 -6.00 -6.00
		2	-	632	1.37	-6.00
GS		-	-	break	-	-
poisson3Db	$\alpha$ 版	1	$r_0$ rand const	819 674 744	15.49 12.73 14.06	-6.97 -6.66 -6.98
		2	-	<b>547</b>	10.18	-6.18
	$\beta$ 版	1	$r_0$ rand const	680 691 657	12.55 12.82 12.14	-6.10 -6.14 -6.34
		2	-	573	10.52	-6.00
	GS	-	-	break	-	-
	xenon1	$\alpha$ 版	1	$r_0$ rand const	max 5343 max	63.90 34.21 64.36
2			-	max	63.15	-6.14
$\beta$ 版		1	$r_0$ rand const	<b>4974</b> 6196 max	31.48 39.30 63.57	-3.98 -3.95 -3.79
		2	-	9037	56.38	-6.00
GS		-	-	max	4.98	-5.87
ex10hs		$\alpha$ 版	1	$r_0$ rand const	9779 8518 1710	2.66 2.37 0.47
	2		-	2016	0.56	-6.39
	$\beta$ 版	1	$r_0$ rand const	<b>220</b> 254 289	0.06 0.08 0.09	-6.05 -6.00 -6.07
		2	-	1749	0.46	-6.00

Table 2(b): Comparison of convergence of GS, IGS- $\alpha$  and IGS- $\beta$  methods.

行列	解法	係数 $\gamma_k$	$p$	反復回数	計算時間	TRR
raefsky2	GS	-	-	max	19.74	111.4
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	<b>308</b>	0.35	-5.78
			rand	321	0.35	-5.70
		const	329	0.36	-5.91	
		2	-	3527	3.79	-5.70
	$\beta$ 版	1	$r_0$	344	0.38	-6.32
			rand	347	0.38	-6.01
		const	348	0.37	-6.01	
		2	-	4862	5.22	-6.00
	raefsky3	GS	-	-	break	-
$\alpha$ 版		1	$r_0$	1832	9.81	-6.08
			rand	1979	10.52	-6.09
		const	1804	9.59	-6.12	
		2	-	max	52.92	71.45
$\beta$ 版		1	$r_0$	1913	10.09	-6.21
			rand	1893	10.06	-6.29
		const	<b>1727</b>	9.11	-6.09	
		2	-	max	52.65	64.93
add20		GS	-	-	7088	1.39
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	1579	0.24	-6.20
			rand	1404	0.21	-6.18
		const	1426	0.20	-6.16	
	2	-	818	0.11	-6.15	
	$\beta$ 版	1	$r_0$	1572	0.23	-6.37
rand			1134	0.15	-6.05	
const		1195	0.18	-6.00		
2	-	<b>754</b>	0.11	-6.00		
add32	GS	-	-	245	0.08	-6.01
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	43	0.02	-6.23
			rand	43	0.01	-6.32
		const	42	0.01	-6.16	
	2	-	99	0.03	-6.16	
	$\beta$ 版	1	$r_0$	46	0.01	-6.40
rand			<b>41</b>	0.01	-6.35	
const		44	0.01	-6.35		
2	-	94	0.02	-6.04		
memplus	GS	-	-	max	14.97	-5.11
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	4954	5.88	-6.21
			rand	7164	8.52	-5.37
		const	6092	7.19	-4.99	
	2	-	2090	2.45	-6.15	
	$\beta$ 版	1	$r_0$	8219	9.47	-6.03
rand			9194	10.57	-4.73	
const		max	11.70	-4.06		
2	-	<b>1753</b>	2.01	-6.00		
wang3	GS	-	-	4499	8.84	-6.00
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	375	0.72	-6.31
			rand	551	1.06	-6.42
		const	531	1.01	-6.26	
	2	-	819	1.52	-6.19	
	$\beta$ 版	1	$r_0$	<b>331</b>	0.61	-6.09
rand			473	0.88	-6.48	
const		450	0.83	-6.44		
2	-	783	1.36	-6.00		
wang4	GS	-	-	2473	4.87	-6.00
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	448	0.85	-6.67
			rand	530	1.02	-6.30
		const	541	1.03	-6.43	
	2	-	840	1.55	-6.25	
	$\beta$ 版	1	$r_0$	418	0.77	-6.15
rand			<b>349</b>	0.61	-6.01	
const		442	0.79	-6.06		
2	-	682	1.20	-6.01		

Table 2(c): Comparison of convergence of GS, IGS- $\alpha$  and IGS- $\beta$  methods.

行列	解法	係数 $\gamma_k$	$p$	反復回数	計算時間	TRR
watt1	GS	-	-	286	0.04	-6.00
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	50	0.00	-6.31
			rand	50	0.00	-6.23
		const	49	0.00	-6.26	
		2	-	50	0.00	-6.24
	$\beta$ 版	1	$r_0$	46	0.00	-6.12
			rand	44	0.01	-6.15
		const	44	0.00	-6.07	
2		-	<b>39</b>	0.00	-6.02	
k3plates	GS	-	-	max	28.18	-5.94
	$\alpha$ 版	1	$r_0$	max	16.43	-5.27
			rand	max	16.55	-5.82
		const	max	16.42	-5.45	
		2	-	1140	1.89	-6.30
	$\beta$ 版	1	$r_0$	max	16.23	-5.78
			rand	5795	9.48	-5.95
		const	4506	7.33	-5.87	
2		-	<b>786</b>	1.29	-6.00	

Table 2 (a)-(c) に各行列における IGS- $\alpha$  版法, IGS- $\beta$  版法の収束性を示す. ただし, 表中の時間の単位はすべて秒とする. “TRR” は真の相対残差 (True Relative Residual) の常用対数の値を意味し, 近似解  $x_{k+1}$  に対する  $\|b - Ax_{k+1}\|_2 / \|b - Ax_0\|_2$  の値である. 表中の “rand”, “const” は一様乱数 (random number), 定数 1.0(constant) を各々意味する. また, 表中の “max”, “break” は最大反復回数で収束しなかったこと, 計算中にオーバーフローが発生し強制終了したことを各々意味する. また, 各行列ごとに収束までの計算時間が最も短かったものを太字で表示した.

Figs. 1-4 に行列 epb1, epb2, add20, wang3 における IGS 両解法の相対残差履歴を示す. Figs. 1-4 では各解法およびベクトル  $p$  の選択のうち, Tables 2 (a)-(c) で最も優位な収束性を示したものをを用いた.

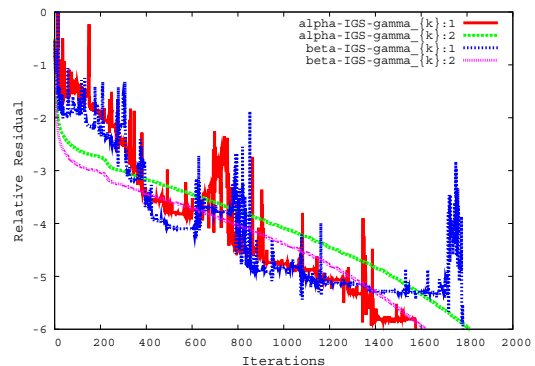


Fig. 1: 行列 epb1 における解法の残差履歴.

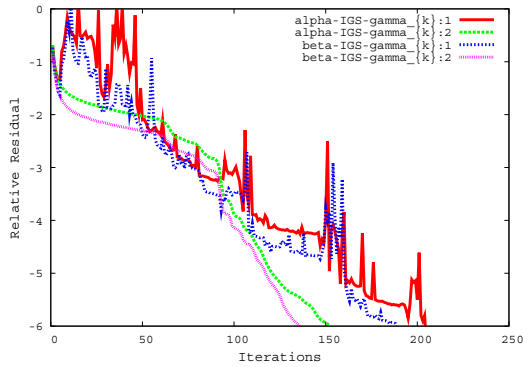


Fig. 2: 行列 epb2 における解法の残差履歴.

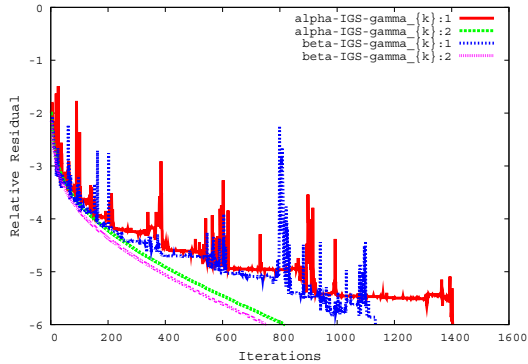


Fig. 3: 行列 add20 における解法の残差履歴.

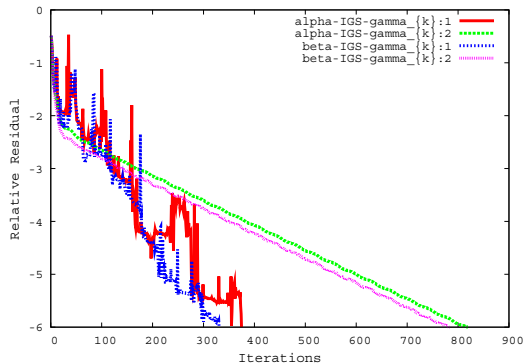


Fig. 4: 行列 wang3 における解法の残差履歴.

Tables 2(a)-(c) および Figs.1-4 の結果の観察から、以下の知見を得ることができた。

- 従来の GS 法の収束性に比べて、IGS- $\alpha$  版法と IGS- $\beta$  版法の収束性は圧倒的に優れている。
- 行列 epb1, poisson3Da, poisson3Db, raefsky2 の 4 つの行列を除く合計 12 個 (内訳は、ベクトル  $p$  が  $r_0$  の場合が 3 ケース、乱数の場合が 3 ケース、定数の場合が 1 ケース、そ

して係数  $\gamma_k$  の選択 2 の場合が 5 ケース) の行列に対して、IGS- $\beta$  版法は IGS- $\alpha$  版法よりも優れた収束性を示した。

- 係数  $\gamma_k$  の選択では、選択 1 と選択 2 の性能は拮抗し、“相互に補完する関係”にあるように思われる。すなわち、どちらの選択法も十分よい選択法である。
- Figs. 1-4 に示した残差履歴から、選択 2 の係数  $\gamma_k$  の選択法の IGS- $\alpha$  版法と IGS- $\beta$  版法の残差は単調に減少することがわかる。この傾向は、係数  $\gamma_k$  の決定が残差ノルムの最小化からなされていることを斟酌すると、予測が可能だが、解析の分野 (流体解析) によっては好ましい性質であると思われる。

## 5. おわりに

本研究によって、IGS- $\beta$  版法は IGS- $\alpha$  版法に比べ優位な (収束の速さと近似解の精度の両面において) 収束性を示した。また、係数  $\gamma_k$  については、選択 1 と選択 2 の収束性のよさが甲乙つけ難いことがわかった。行列の特性に合わせて、これらを使い分けることが肝要と思われる。さらに、IDR-based SOR 法の結果については本研究第 2 報で発表予定である。

## 参考文献

- [1] 尾上勇介, ベーター ソネフェルド, 藤野清次: IDR-AGS 法の収束性と有効性の評価, 情報処理学会 HPC 研究会報告, 2008 年 12 月, No.125, pp.13-18.
- [2] Saad, Y.: Iterative methods for sparse linear systems 2nd edition, SIAM, Philadelphia, 2003.
- [3] Sonneveld, P.: AGS - IDR - CGS - BiCGSTAB - IDR(s): The circle closed, A case of serendipity, The Proc. of Int. Kyoto Forum 2008 on Krylov subspace methods, pp.1-14, September, 2008.
- [4] Sonneveld, P., van Gijzen, M.B.: IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 31, No.2, 1035-1062, 2008.
- [5] University of Florida Sparse Matrix Collection: <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/index.html>
- [6] Wesseling, P., Sonneveld, P.: Numerical Experiments with a Multiple Grid- and a Preconditioned Lanczos Type Methods, Lecture Notes in Math., Springer, No.771, pp.543-562, 1980.