

履歴効果を有したカオス力学系の数理モデルとその解析

齋藤 利裕[†] 入山 聖史[†] 大矢 雅則[†]

[†]東京理科大学 理工学部 情報科学科

概要: 状態の変化の力学と複雑さの概念を融合した情報力学の下で定められるカオス尺度により、様々な分野におけるカオス現象を統一的に扱うことができる。本稿では、履歴効果を有した離散力学系について、具体的に写像をロジスティック写像としたモデルを用い、エントロピー型カオス尺度 (ECD) による解析の有用性を述べる。また、このモデルで生ずる網目状の時系列について、Neimark-Sacker 分岐との関連を示し、その分岐条件と ECD による解析結果との対応について述べる。

A Model of a Chaotic Dynamical System with Memory Effect and Its Analyses

Toshihiro SAITO[†] Satoshi IRIYAMA[†] Masanori OHYA[†]

[†]Department of Information Sciences, Tokyo University of Science

Abstract: The entropic chaos degree (ECD) defined in Information dynamics is known as effective way to analyze chaotic phenomena. In this paper, we claim that the ECD is also useful to analyze discrete dynamical systems with memory effect, in particular we use the logistic map as an example. We show that new behavior in this model is related to the Neimark-Sacker bifurcation and its bifurcation condition is explained by ECD.

1 まえがき

複雑な現象は様々な分野で現れ、それぞれの分野で特質を調べるための指標が導入されている。しかし、複雑さという概念が持つ科学的意味はほぼ共通であるから、それらを統一的に扱う方法が存在するはずである。このような考えから、複雑さの概念を新たに捉え直し、学際領域それ自身を専門にし、様々な分野を横断的に取り扱う道具として情報力学が提唱された [2, 7, 17]。

複雑な現象の一つとしてカオス現象がある。離散力学系 $(x_0; f)$ は、初期値 $x_0 \in I \subset \mathbb{R}^d$ と連続写像 $f: I \rightarrow I$ による差分方程式 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$ で定義される。この系は、初期値 x_0 と写像 f によって決定されているにも関わらず、軌道 $O(x_0; f) = \{f^n(x_0); n = 0, 1, 2, \dots\}$ が不規則かつ複雑な様子を示すカオス現象が存在する。

情報力学では、2.2 で導入されるカオス尺度を用いてカオス現象の解析を行う。カオス尺度は力学系におけるカオス現象の度合いを測る指標の一つであるリアプノフ指数同様にカオス現象を測ることが可能であることが分かっている [3, 4, 5, 12]。カオス尺度を用いた解析では、現在、量子カオス現象 [6, 8, 10]、量子アルゴリズム [13, 17]、生命現象 [11] などの研究にも応用されている。

本稿では、カオス現象を生成する写像をロジスティック写像としたモデルを用い、履歴効果を有することで生じる通常のカオスの振舞いとは異なる振舞い [14, 15, 16] を分岐図、時系列図、軌道図、分岐理論による解析と比較し、カオス尺度による解析の有用性について考察を行う。

2 情報力学の基礎概念とカオス尺度

情報力学は、系における状態の変化の力学と系の持つ複雑さを融合させた力学である。本節では、[2, 7] で導入されている、情報力学によるカオス尺度を説明する。

2.1 情報力学

情報力学では、系を次の $(A, \mathfrak{S}, \alpha(G))$ の組で定める。

- 系における考察の対象 (観測量など) となるものの全体 A 。
- A の元にある科学的量 (観測値など) を得るための方法の集合 \mathfrak{S} 。さらに $\varphi \in \mathfrak{S}$ を状態と定める。
- A や \mathfrak{S} の元の力学的変化を表す、ある位相群 G における A 上の作用の集合 $\alpha(G) \equiv \{\alpha_g; g \in G\}$ 。

従って、「 $(A, \mathfrak{S}, \alpha(G))$ に数理的構造を与える \Leftrightarrow 系を記述する理論が決まる」ということになる。

系における状態の変化は、入力系が外的要因による変換を受けて出力系に変化することにより起こる。外的要因による状態の変化は、入力系を $(A, \mathfrak{S}, \alpha(G))$ 、出力系を $(\bar{A}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{\alpha}(\bar{G}))$ と定めたときに、写像 $\Gamma: \mathfrak{S} \rightarrow \bar{\mathfrak{S}}$ を用いて表し、これをチャネルとよぶ。

情報力学の“力学”は、観測における基準系 $S \subset \mathfrak{S}$ の下でチャネルによる入力系と出力系の状態変化を扱う。

次に、情報力学における系の持つ複雑さについて、以下の 2 種類の複雑さを定める。

- 状態 $\varphi \in S \subset \mathfrak{S}$ の有する複雑さ $C^S(\varphi)$ 。
- 状態 $\varphi \in S$ がチャネル Γ により、状態 $\Gamma\varphi \in \bar{\mathfrak{S}}$ へ遷移したときに、 φ から $\Gamma\varphi$ へ伝達された複雑さ $T^S(\varphi; \Gamma)$ 。

これらは、以下に示す5つの公理を満たすものとして定義される。

公理 1 (複雑さの公理)

1. 正値性: $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ に対して,

$$C^{\mathcal{S}}(\varphi) \geq 0, T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma) \geq 0.$$

2. 不変性: \mathcal{S} 上の全ての端点の集合を $\text{ex}\mathcal{S}$ としたとき, 任意の全単射写像 $j: \text{ex}\mathcal{S} \rightarrow \text{ex}\mathcal{S}$ に対して,

$$C^{\mathcal{S}}(j(\varphi)) = C^{\mathcal{S}}(\varphi), T^{\mathcal{S}}(j(\varphi); \Gamma) = T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma).$$

3. 加法性: $\Phi = \varphi \otimes \psi \in \mathcal{S}$ に対して,

$$C^{\mathcal{S}}(\Phi) = C^{\mathcal{S}}(\varphi) + C^{\mathcal{S}}(\psi).$$

4. 基本不等式: $0 \leq T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma) \leq C^{\mathcal{S}}(\varphi)$.

5. 保存性: $\Gamma = \text{id}$ (ただし, id は恒等写像) のとき,

$$T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma) = C^{\mathcal{S}}(\varphi).$$

以上より, 情報力学を定義する。

定義 2 (情報力学)

情報力学とは, 組

$$\{(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha(\mathcal{G})); (\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\alpha}(\bar{\mathcal{G}})); \Gamma; C^{\mathcal{S}}; T^{\mathcal{S}}; R\}$$

である。ただし, R は各元間の関係を表す。

2.2 カオス尺度

カオス尺度とは, 系の変化に付随してどれだけ複雑さが生成されるかを測るものである。

定義 3 (カオス尺度)

入力状態 $\varphi \in \mathcal{S}$ を, 素な状態 $\omega \in \text{ex}\mathcal{S}$ の重ね合わせ $\varphi = \int_{\mathcal{S}} \omega d\mu$ と表現したとき, カオス尺度 $D^{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma)$ を,

$$D^{\mathcal{S}}(\varphi; \Gamma) = \inf \left\{ \int_{\mathcal{S}} C^{\mathcal{S}}(\Gamma\omega) d\mu; \mu \in M_{\varphi}(\mathcal{S}) \right\}$$

と定める。ここで, $M_{\varphi}(\mathcal{S})$ は, φ を素な状態に分解する測度の集合である。カオス尺度 $D^{\mathcal{S}}$ が $D^{\mathcal{S}} > 0$ のとき系はカオス状態, $D^{\mathcal{S}} = 0$ のとき秩序状態であると定める。

2.3 エントロピー型カオス尺度

情報力学によるカオス尺度を実際に計算するためには, 系の複雑量の組 $C^{\mathcal{S}}, T^{\mathcal{S}}$ を定める必要がある。ここでは, それぞれエントロピー S , 相互エントロピー I を用いたエントロピー型カオス尺度 (Entropic Chaos Degree, 以下 ECD と略) を定める。

2.3.1 離散力学系における ECD のアルゴリズム

\mathbb{R}^d の部分集合 $I \subset \mathbb{R}^d$ と, 写像 $f: I \rightarrow I$ を定め, 以下の手順により ECD を求める。

1. $I \equiv \bigcup_i A_i$ (ただし, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ($i \neq j$)) なる I の有限分割を定め, $A = \{A_i\}$ とする。

2. 状態 $\varphi^{(n)}$ を, $\varphi^{(n)} \equiv \sum_i p_i^{(n)} \delta_i \in \mathcal{S}_A \subset \mathcal{G}$ と定める。ただし, δ_i は δ -測度であり, $p_i^{(n)}$ は定義関数と十分大きな数 $m \in \mathbb{N}$ を用いて,

$$p_i^{(n)} \equiv \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} 1_{A_i}(f^k(x))$$

と定める。

3. 遷移確率分布 $(p_{ij}^{(n,n+1)})$ を

$$p_{ij}^{(n,n+1)} \equiv \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} 1_{A_i}(f^k(x)) 1_{A_j}(f^{k+1}(x))$$

と定める。

4. チャネル Γ_n を $\Gamma_n \equiv \left(\frac{p_{ij}^{(n,n+1)}}{p_i^{(n)}} \right)$, つまり $\varphi^{(n+1)} = \Gamma_n \varphi^{(n)}$ と定める。

5. 以上より, ECD $D^{\mathcal{S}_A}(\varphi^{(m)}; \Gamma_n)$ は,

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{S}_A}(\varphi^{(n)}; \Gamma_n) &= \inf \left\{ \int_{\mathcal{S}_A} S(\Gamma_n \delta_i) d\mu_{\varphi^{(n)}}; \mu_{\varphi^{(n)}} \in M_{\varphi^{(n)}}(\mathcal{S}_A) \right\} \\ &= \sum_{i,j} p_{ij}^{(n,n+1)} \log \frac{p_{ij}^{(n,n+1)}}{p_i^{(n)}} \end{aligned}$$

と計算できる。

2.3.2 ロジスティック写像の ECD とリアプノフ指数の比較

離散力学系のカオス現象を測る指標の一つとしてリアプノフ指数がある。リアプノフ指数は, 近接した2つの初期値の指数関数的乖離の度合いを表したものであり, 以下の定義で与えられる。

定義 4 (リアプノフ指数)

初期値 $x_0 \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$) と滑らかな写像 $f: I \rightarrow I$ で定められる一次元離散力学系におけるリアプノフ指数 $\lambda(x_0)$ は,

$$\lambda(x_0) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{d}{dx} f^n(x_0) \right|$$

で定められている。

ロジスティック写像は, カオス現象を起こす写像として知られている。

定義 5 (ロジスティック写像)

ロジスティック写像 $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は,

$$f_a(x) = ax(1-x)$$

で定められる写像である。

ロジスティック写像について, 初期値を $x_0 = 0.1$, パラメータ a を $3 \leq a \leq 4$ としたときの ECD とリアプノフ指数を計算した結果を図1で示す。

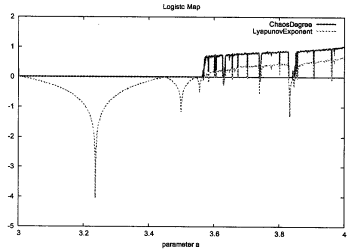


図1 ロジスティック写像のECDとリアプノフ指数

図1より、リアプノフ指数が負のときは $ECD = 0$ 、正のときは $ECD > 0$ であり、ECD はリアプノフ指数同様にカオスを測る指標となることが分かる。

3 履歴効果を有した写像

定義 6 (履歴効果)

初期値 $x_0 \in V$ 、写像 $f: V \rightarrow V$ で定められる離散力学系 $(x_0; f)$ について、履歴効果を有した離散力学系 $((x_0, x_1); f^{(\varepsilon)})$ は、初期値 $x_0, x_1 \in V$ 、履歴効果を有した写像 $f^{(\varepsilon)}: V \times V \rightarrow V$

$$f^{(\varepsilon)}(x, y) \equiv (1 - \varepsilon)f(x) + \varepsilon f(y)$$

で定められる系であり、その差分方程式を

$$x_{n+2} = f^{(\varepsilon)}(x_{n+1}, x_n) = (1 - \varepsilon)f(x_{n+1}) + \varepsilon f(x_n)$$

と与える。ただし ε は、 $0 \leq \varepsilon \leq 1$ である。

以下に、具体的に履歴効果を有したロジスティック写像 $f_a^{(\varepsilon)}$ を用いて、その解析結果を示す。ただし、初期値を $x_0 = 0.1, x_1 = 0.8$ とする。

3.1 ECD による解析

ECD による解析結果は、図2で示される。

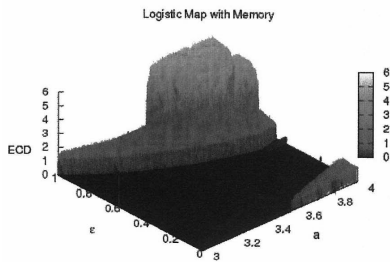


図2 履歴効果を有したロジスティック写像のECD

履歴効果を有した写像は、 $\varepsilon = 0$ のとき元の写像と一致する。 ε の値を増加させることにより、 $\varepsilon = 0$ のときにECDが正となるパラメータ $a = 3.569 \dots$ (この点をファイゲンバウム点という) 以前に、ECDが正になる領域Aが存在した。領域AはECDの値が同様であり、ファイゲンバウム点以降でも同様の値となる部分が存在することが分かる。

3.2 分岐図による解析

a の値を固定し、横軸に ε 、縦軸に周期点をとった分岐図の例を図3で示す。

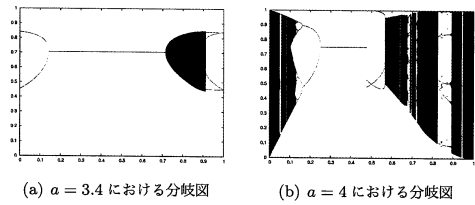


図3 履歴効果を有したロジスティック写像の分岐図

図3より領域Aに至る直前に1周期となることが分かる。

3.3 時系列図による解析

領域Aについて、横軸に計算ステップ数、縦軸に解の値をとった時系列図の例を以下の図4で示す。

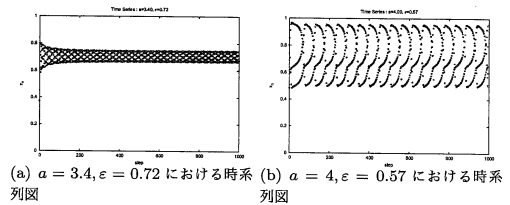


図4 履歴効果を有したロジスティック写像の時系列図

領域Aにおける時系列は、通常のECDが正となるカオスのな時系列とは異なる網目状の時系列が得られた。

3.4 軌道図による解析

網目状の時系列について、軌道 $O((x_0, x_1); f_a^{(\varepsilon)})$ を用いて $x_n, x_{n+1} \in O((x_0, x_1); f_a^{(\varepsilon)})$ としたとき、横軸に x_n 、縦軸に x_{n+1} をとった軌道図の例を図5で示す。

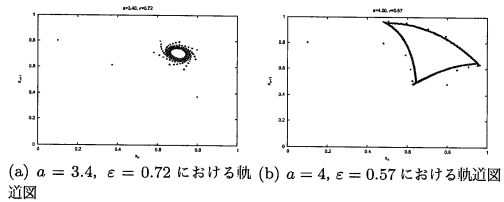


図5 履歴効果を有したロジスティック写像の軌道図

図5より、網目状の時系列は履歴効果を有したロジスティック写像 $f_a^{(\varepsilon)}$ の不動点周りに閉じた軌道を構成することが分かる。

3.5 分岐理論による解析

3.4の結果より、網目状の時系列は、Neimark-Sacker分岐を起こすことにより生じていることが分かる。履歴効果を有した

ロジスティック写像 $f_a^{(e)}$ における Neimark-Sacker 分岐の条件は,

$$\varepsilon(a-2) = 1 \quad (*)$$

ただし, $3 < a < 4$. この詳細は, 講演時に述べる.

以下の図 6 は, 履歴効果を有したロジスティック写像 $f_a^{(e)}$ の ECD に, 式 (*) で与えられる曲線 (赤) を重ねた図である.

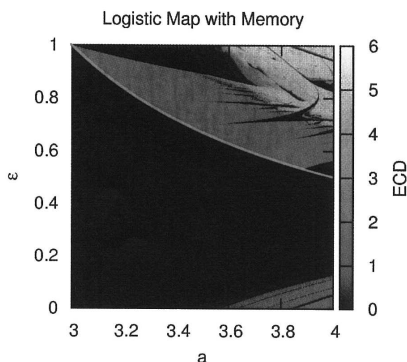


図 6 履歴効果を有したロジスティック写像の ECD と式 (*) の関係

図 6 より, Neimark-Sacker 分岐が生じる条件は式 (*) を満たすときであり, 領域 A は, この条件と対応して出現していることが分かる.

4 むすび

本稿では, ECD, 分岐図, 時系列図, 軌道図, 分岐理論を用いて履歴効果を有したロジスティック写像について解析を行った. 図 2 より, ε の値を増加させることにより, ロジスティック写像におけるファイゲンバウム点以前にも ECD の値が正になる領域 A が存在し, 領域 A における時系列図は, カオス的な時系列ではなく網目状の時系列であることが分かった.

網目状の時系列は, 分岐理論により Neimark-Sacker 分岐により生じることが分かった. Neimark-Sacker 分岐が生じる条件 (*) は, 領域 A の出現と対応しており, ECD は網目状の時系列が生じる領域 A を判別可能であると言える.

また, 履歴効果を有した写像の解析においてリアプノフ指数を計算することは容易ではない. ECD は定義より時系列を解析するため, 関数に依らず解析を行うことができる. この点で, ECD を用いた解析は履歴効果を有したカオス現象の解析に有用であると言える.

謝辞

本研究を行うにあたり, 東京理科大学理工学部 戸川美郎 教授, 浅野真誠 助教に多くの御助言を頂いた, 心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] J.Guckenheimer and P.Holmes, “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector

Fields”, Springer-Verlag, 1983.

- [2] R.S.Ingarden, A.Kossakowski and M.Ohya, “Information Dynamics and Open Systems”, Kluwer Academic Pub., 1997.
- [3] 大矢雅則, 小坂稔, “情報力学によるカオス現象の考察”, 電気情報通信学会論文誌, Vol. J80-A, No. 12, pp. 2138-2144, 1997.
- [4] M.Ohya, “Complexities and their applications to characterization of chaos”, International Journal of Theoretical Physics, Vol. 37, No. 1, pp. 495-505, 1998.
- [5] K.Inoue, M.Ohya and K.Sato, “Application of chaos degree to some dynamical systems”, Chaos, Soliton & Fractals, Vol. 11, pp. 1377-1385, 2000.
- [6] K.Inoue, M.Ohya and I.V.Volovich, “A Treatment of Quantum Baker’s Map by Chaos Degree”, Quantum Information IV, pp. 87-102, 2002.
- [7] A.Kossakowski, M.Ohya and Y.Togawa, “How can we observe and describe chaos?”, Open Systems and Information Dynamics, Vol. 10, pp. 221-233, 2003.
- [8] M.Ohya, “Foundation of Chaos Through Observation”, Quantum Information and Complexity edited by T.Hida, K.Saito and Si Si, pp. 391-410, 2004.
- [9] Yuri A.Kuznetsov, “Elements of Applied Bifurcation Theory”, Springer-Verlag, third edition, 2004.
- [10] M.Ohya, “Adaptive Dynamics in Quantum Information and Chaos”, Stochastic Analysis: Classical and Quantum edited by T.Hida, pp. 127-142, 2005.
- [11] 大矢雅則, “情報進化論”, 岩波書店, 2005.
- [12] M.Asano, M.Ohya and Y.Togawa, “Entropic chaos degree of rotations and log-linear dynamics”, QBIC proceedings, 2007.
- [13] M.Ohya, “Adaptive Dynamics and Its Applications to Chaos and NPC Problem”, QBIC proceedings, 2007.
- [14] 齋藤利裕, 入山聖史, 大矢雅則, “履歴効果とフィードバック効果を有したロジスティック写像のカオスの振舞い”, 第 30 回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp. 481-485, 2007.
- [15] 新井千夏, 入山聖史, 齋藤利裕, 大矢雅則, “カオス尺度を用いたカオス結合系における拡散現象についての考察”, 電子情報通信学会技術研究報告. IT, vol. 108, No. 158, pp. 21-26, 2008.
- [16] 齋藤利裕, 入山聖史, 大矢雅則, “履歴効果を有したロジスティック写像におけるカオス現象の解析”, 第 31 回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp. 326-331, 2008.
- [17] M.Ohya and I.V.Volovich, “Mathematical Foundations of Quantum Information and Quantum Computation”, Springer-Verlag, to be published.