

## カオスの足あと — 非線形力学の新しい表現手法 —

下西 風澄<sup>†</sup> 井庭 崇<sup>†</sup>

本論文の目的は、非線形関数の可視化における新しい表現手法を提案することである。提案手法では、関数の値を角度に変換して描画することで、その軌道を平面的な描画パターンとして視覚的に捉えることができるようになる。本論文で取り上げるロジスティック方程式では、周期領域とカオス領域には明らかな違いが観察され、その中間領域には周期とカオスが入り混じるパターンが観察された。この新たな表現手法は、カオスの複雑な軌道を、より視覚的・感覚的に捉えることができる方法として、可能性を秘めていると思われる。

## The Footprints of Chaos — New Method for Visualizing Nonlinear Dynamics —

KAZETO SHIMONISHI<sup>†</sup> and TAKASHI IBA<sup>†</sup>

In this paper, we propose a new method for visualizing behaviors of a non-linear function. In this method, which we call the method “Footprints of Chaos”, the value generated by the function is converted into an angle. Therefore, the trajectory can be understood as a visual pattern on 2-dimensional plane. As results of simulation experiments, we can observe the obvious differences between the periodic area and the chaotic area. Moreover, the mixture of periodic and chaotic patterns are found in the area of “the edge of chaos”. The proposed method is useful for understanding complex trajectory of nonlinear dynamics visually.

### 1. はじめに

本論文では、カオスの振る舞いみせる非線形関数の新しい理解を促す表現手法を提案する。「カオス」とは、力学系の中で決定論的な規則に従って発生したにもかかわらず、不規則な振る舞いをする現象のことである。カオスが興味深いのは、単に不規則であるだけでなく、その内部に複雑な構造を持つことである。その構造を把握するには、多くの場合、相空間における軌道として捉えるが一般的であるが、本論文では、変数のとる値を幾何学的な値に変換して描画するという視覚的な方法を提案する。この手法を用いて、様々な条件のもとシミュレーションを行い、その結果を観察したところ、様々なパターンが描画され、その構造が視覚的に捉えられることが確認できた。このようにカオスの軌跡を平面空間にプロットしていくことから、私たちはこれを「カオスの足あと」(footprints of chaos)と名づけた。

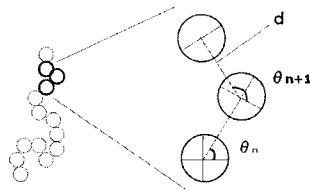


図1 提案手法のモデル

### 2. 提案手法

本論文の提案手法は、ロジスティック方程式のように、変数をひとつ持つ関数を対象としている。表現の手順は、以下のとおりである(図1)。

- (1) キャンパスの中心に半径  $r$  の円を描画する。
- (2) 関数の初期値  $x_0$  を角度  $\theta_0$  に変換し、その円の中心から距離  $d$  の点を中心とする半径  $r$  の円を描画する。
- (3)  $x_1$  の値を計算し、(2)と同じように、角度  $\theta_1$  に変換して、半径  $r$  の円を描画する。

<sup>†</sup> 慶應義塾大学 総合政策学部  
Faculty of Policy Management, Keio University

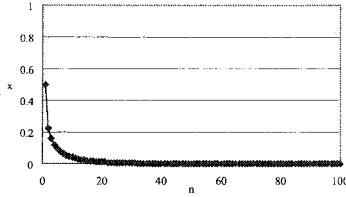


図2  $0 \leq a \leq 1$  における  $x_n$  の推移 ( $a = 0.9$   $x_0 = 0.5$ )

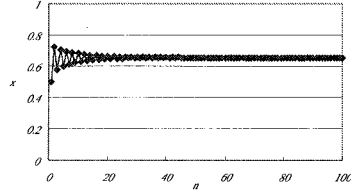


図6  $2 < a \leq 3$  における  $x_n$  の推移 ( $a = 2.9$   $x_0 = 0.5$ )

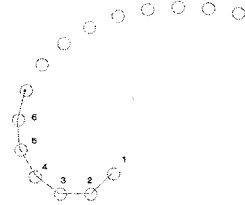


図3  $0 \leq a \leq 1$  における描画パターン ( $a = 0.9$   $x_0 = 0.5$ )

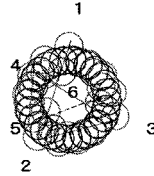


図7  $2 < a \leq 3$  における描画パターン ( $a = 2.9$   $x_0 = 0.5$ )

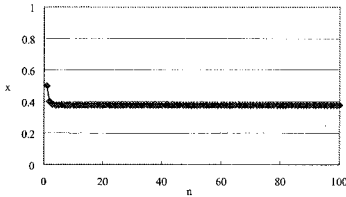


図4  $1 < a \leq 2$  における  $x_n$  の推移 ( $a = 1.6$   $x_0 = 0.5$ )

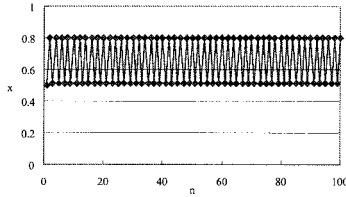


図8  $3 < a \leq 1 + \sqrt{6}$  における  $x_n$  の推移 ( $a = 3.2$   $x_0 = 0.5$ )

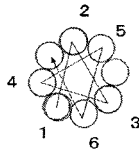


図5  $1 < a \leq 2$  における描画パターン ( $a = 1.6$   $x_0 = 0.5$ )

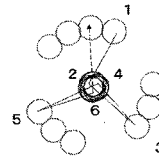


図9  $3 < a \leq 1 + \sqrt{6}$  における描画パターン ( $a = 3.2$   $x_0 = 0.5$ )

- (4) 同じ手順で関数の変数とする値  $x_n$  を角度  $\theta_n$  に変換させて、 $n$  番目の円を描画していく。

### 3. ロジスティック方程式への適用

#### 3.1 基本的な振る舞いの確認

本提案手法の基本的な特徴を確認するために、いくつかの典型的な結果を取り上げることにしたい。ここでは、非線形関数として「メイの生態系モデル」として知られるロジスティック方程式を用いる。これは、1970年代に数理生態学者のロバート・メイが、生物の親の世代の個体数と子の世代の個体数の関係性を表すモデルとして提案したものであり、次式で与えられる<sup>1)</sup>。

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

ロジスティック方程式は、コントロール・パラメータ  $a$  の値によって振る舞いが大きく変わるとい特徴があるため、以下では、その基本的な振る舞いを確認しておくことにしたい<sup>\*</sup>。

コントロール・パラメータ  $a$  が  $0 \leq a \leq 1$  の範囲にある場合は、 $x = 0$  の固定点へ収束する(図2)。本提案手法では、角度  $\theta_n$  が徐々に小さくなり、最終的には  $0$  へ収束するため、一直線上に円が描画され続けることになる(図3)。

<sup>\*</sup> 本論文におけるシミュレーション結果は、Processing<sup>2)</sup> システムを用いて実装・実行したものである。

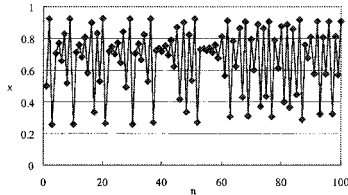


図 10  $1 + \sqrt{6} < a \leq 4$  における  $x_n$  の推移 ( $a = 3.7$   $x_0 = 0.5$ )

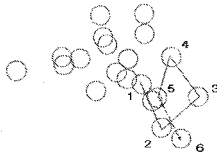


図 11  $1 + \sqrt{6} < a \leq 4$  における描画パターン ( $a = 3.7$   $x_0 = 0.5$ )

コントロール・パラメータ  $a$  が  $1 < a \leq 2$  の範囲にある場合は、 $x = (a - 1)/a$  の固定点へ収束する (図 4)。本提案手法では、角度  $\theta_n$  が 1 つの値に固定され、円形のパターンが描画される (図 5)。

コントロール・パラメータ  $a$  が  $2 < a \leq 3$  の範囲にある場合は、振動しながら、 $x = (a - 1)/a$  の固定点へ収束していく (図 6)。本提案手法では、最初は円の位置が揺らいでいるが、徐々に角度  $\theta_n$  が 1 つの値に固定され、円形のパターンが描画されるようになる (図 7)。

コントロール・パラメータ  $a$  が  $3 < a \leq 1 + \sqrt{6}$  (約 3.569...) の範囲にある場合は、安定な 2 周期へ収束する (図 8)。本提案手法では、角度  $\theta_n$  が 2 つの値を交互にとるため、内と外のふたつの円形パターンが描画される (図 9)。

コントロール・パラメータ  $a$  が  $1 + \sqrt{6} < a \leq 4$  の範囲にある場合は、カオス的な振る舞いが見られる (図 10)。本提案手法では、角度  $\theta_n$  も複雑に変化し、さまざまなパターンが描き出される (図 11)。以下では、カオス領域において、どのようなパターンが生成されるのかについて分析を行う。

### 3.2 カオス領域における描画パターン

ロジスティック方程式のカオス領域において、どのような描画パターンが生成されるのかを理解するために、一部の結果をまとめたものが、図 12 である。この図では、コントロール・パラメータ  $a$  を、 $a = 3.60$  から  $a = 3.74$  まで、 $0.1$  ずつ変化させたときのパターン

の変化を示している\*。カオス領域では、コントロール・パラメータ  $a$  の変化によって、描画パターンが大きく異なることが分かる。

また、ロジスティック方程式においては、 $a = 3.83$  の付近で「窓」(periodic window)と呼ばれる 3 周期点が存在することが知られている<sup>3)</sup>。「窓」に入る直前の  $a = 3.8282$  から  $a = 3.8285$  までを、 $0.0001$  ずつ変化させて描画すると、図 13 のようになる\*\*。この図から、分岐の「窓」に入る直前では、カオス領域と周期領域が入り混じったような複雑なパターンとなることがわかる。特に  $a = 3.8283$  と  $a = 3.8284$  では、最初にくいつか周期を迎った後、再びカオス的な軌跡を示していく様子が明確に描き出されている。そして、 $a = 3.8285$  になると完全に周期的な振る舞いになっていることがわかる。

## 4. おわりに

本論文で提案した手法では、単純な式から複雑な軌跡を生むという「カオス」の特徴を、効果的に提示できているといえるだろう。特に「窓」の分析では、周期領域とカオス領域の中間領域に、周期とカオスが入り混じったようなパターンが観察された。これは、動的な秩序に関する「カオスの縁」の概念と関係しているのではないかと私たちは考えている。今後は、ロジスティック方程式以外の非線形関数において、どのような図形を観察することができるのかについて調べ、カオス結合系への適用も考えていきたい。

## 謝 辞

本研究において、井庭研究室のメンバーには多くの協力を頂いたことに感謝します。特に同研究会の広瀬隼也君には多大な協力を頂いたことを感謝します。

## 参 考 文 献

- 1) May, R.M.: Simple Mathematical Models with Very complicated Dynamics, *Nature*, No. 261J (1976).
- 2) Greenberg, I.(ed.): *Processing: Creative Coding and Computational Art*, friends of ED (2007).
- 3) Feigenbaum, M.J.: The universal metric properties of nonlinear transformations, *Statistical Physics*, Vol. 21, No. 6, pp. 669-706 (1979).

\* 本論文では特に明示する場合を除いて、 $r = 2$ 、 $d = 5$ 、描画ステップ数  $N = 20000$  の設定における結果を示す。

\*\* ここでは、描画のための円間の距離  $d$  は 10 に設定している。これは、 $d$  の値が小さい場合には、円が重なって表示されてしまうためその構造を理解しにくくなるためである。

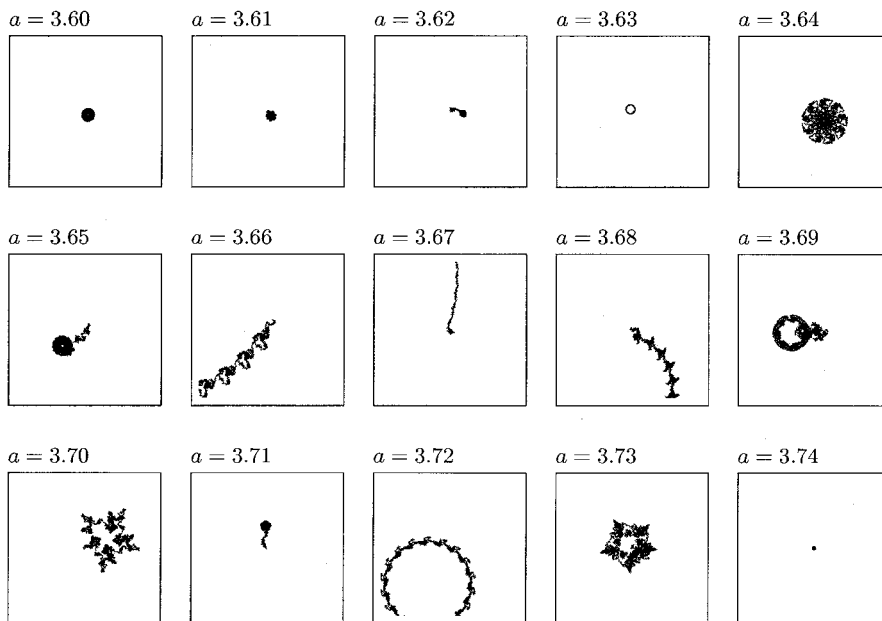


図 12 コントロール・パラメータ  $a$  の値ごとの描画パターン ( $a = 3.60 \sim 3.74$ ,  $x_0 = 0.1$ )

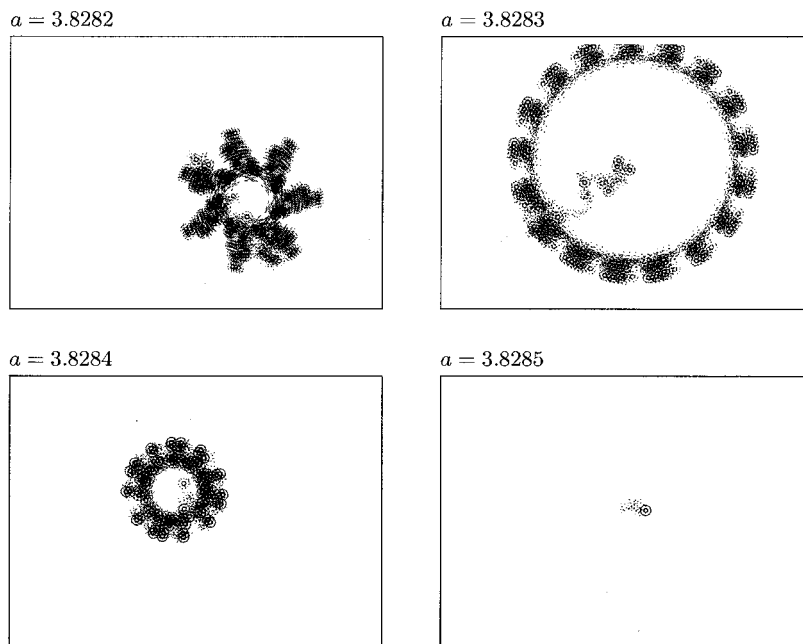


図 13 「カオスの足あと」による「窓」付近の描画パターン ( $a = 3.8282 \sim 3.8285$ ,  $x_0 = 0.2$ )