

Balzerによる最適時間一斉射撃アルゴリズムの正当性について

上川 直紀

梅尾 博司

大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻

概要

セルラ・オートマトンは、John von Neumannによって考案された。自己複製機械の研究で考案されたセルラ・オートマトンであるが、現在では複雑系などの多くの分野で研究がなされている。本稿で扱う一斉射撃問題は Myhillにより考案された問題である。隣接セルのみと通信可能であるセルラ・オートマトン上で、セル空間上のセルを同時に同じ内部状態に遷移させる一斉射撃問題は、多くの研究者の興味を引き、多くの研究がなされている。1次元アレイ接続のセルラ・オートマトンを最適時間で射撃に導くアルゴリズムとして、Balzerのアルゴリズムがある。Balzerのアルゴリズムはコンピュータで正当性は確認されているが、数学的な証明はなされていない。本稿では、Balzerの最適時間一斉射撃アルゴリズムについて考察し、このアルゴリズムの正当性について述べる。

キーワード

セルラ・オートマトン、一斉射撃問題

A note on Balzer's transition rule set for time-optimal firing squad synchronization algorithm

Naoki Kamikawa and Hiroshi Umeo

Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering

Abstract

A model of cellular automata (CA) was devised originally for studying self-reproduction by John von Neumann. It is now studied in many fields such as complex systems. Firing squad synchronization problem (FSSP) which this paper deals with was designed by Myhill. All cells are changed to a state called firing at the same time in FSSP. Each cell communicates only with neighborhood cells. There are some time-optimal FSSP algorithms for 1-dimensional arrays. Balzer proposed an 8-state algorithm of FSSP. In this paper, we study Balzer's transition rule set for time-optimal firing squad synchronization algorithm.

key words

cellular automata, firing squad synchronization problem

1 はじめに

セルラ・オートマトン (CA) は、従来から網目結合を持つ並列計算モデルとして、また最近では複雑系、人工生命など数多くの分野で精力的に研究がなされている。

セル空間上のセルを同時に同じ内部状態に遷移させる一斉射撃問題は Myhill により考案された。また、1次元アレイ接続のセルラ・オートマトンを最適時間で射撃に導くアルゴリズムは Waksman[1] が最初に考案した。Waksman のアルゴリズムは 16 状態の CA で実現している。内部状態数を削減した一斉射撃アルゴリズムとして、Balzer[2] のアルゴリズムがある。Balzer の 8 状態アルゴリズムはコンピュータで正当性は確認されているが、数学的な証明はなされていない。本稿では、Balzer の最適時間一斉射撃アルゴリズムについて考察し、このアルゴリズムの正当性について述べる。

2 セルラ・オートマトン

CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトン A の有限個のアレイで構成される。図 1 参照。セルは左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ。有限状態オートマトン A を定式化すると、 $A = (Q, \delta)$ となる。 Q は内部状態の有限集合である。 δ は状態遷移関数で

あり、次のように定義される。

$$\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$$

この場合の状態遷移関数 $\delta(p, q, r) = s$, $p, q, r, s \in Q$ は次の意味を持つ。

あるステップ t 時に、セル C_i の内部状態が q であり、左側のセルの内部状態が p 、右側のセルの内部状態が r であると、次のステップ $t+1$ 時にセル C_i の内部状態が s に遷移する。

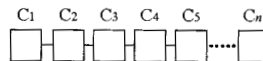


図 1: 1次元接続セルラ・オートマトン

3 Balzerの一斉射撃アルゴリズム

3.1 一斉射撃問題

一斉射撃問題とは、時刻 $t=0$ 時にセル空間に存在する將軍状態と呼ばれる内部状態のセルから発せられた「準備ができた

ら、発射せよ! という命令を兵士セル (静止状態のセル) が受け取った後、未来のある時刻にすべてのセルを同時に同一の射撃と呼ばれる内部状態に遷移するように、セルの遷移規則を決定する問題である。隣接するセルとしか通信できない CA で、すべてのセルを同時に同一の状態に導くグローバルな制御をいかにして実現するかという点が研究者の興味を引き、これまでに数多くのアルゴリズムが提案されている。

3.2 Balzer のアルゴリズムの概要

1次元アレイ接続 CA のセル数を $n (n \geq 2)$ とする。Balzer のアルゴリズムはセル数が n 個の CA を $2n-2$ ステップで射撃に導く。Balzer のアルゴリズムは、内部状態数 8、遷移規則数 165 の CA で実現している。使用する内部状態は L, M, C, B, R, Q, A, F である。L が静止状態, M が将軍状態, F が射撃状態である。Balzer のアルゴリズムの時間-空間図式を図 2 に示す。

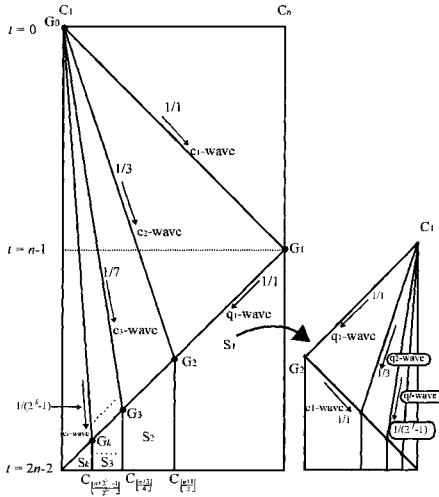


図 2: Balzer のアルゴリズム

初期計算状況でセル C_1 に配置されている将軍状態 M を将軍 G_0 とする。将軍 G_0 は右方向に進む速さ $\frac{1}{2}$ の c_1 波, 速さ $\frac{1}{3}$ の c_2 波, 速さ $\frac{1}{4}$ の c_3 波, ..., 速さ $\frac{1}{2^k-1}$ の c_k 波 ($1 \leq k \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$) を生成する。最も速度が速い c_1 波がセル列の右端であるセル C_n に到達すると、セル C_n に将軍 G_1 を生成し、左方向に進む速さ $\frac{1}{2}$ の q_1 波を含む速さ $\frac{1}{2^l-1}$ の q_l 波群 ($1 \leq l \leq \lfloor \log_2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \rfloor$) を生成する。 q_1 波がセル空間を左方向に進む際に、遅れて進んでくる c_k 波群と衝突する。 q_1 波は、 c_2 波とセル $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ で衝突し将軍 G_2 を生成し、 c_3 波とセル $C_{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor}$ で衝突し将軍 G_3 を生成し、 c_k 波とセル $C_{\lfloor \frac{n+2^k-1}{2^k} \rfloor}$ で衝突し将軍 G_k を生成し、セル空間を分割する。セル $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ からセル C_n までの空間を S_1 , セル $C_{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor}$ からセル $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ までの空間を S_2 , ..., セル C_1 からセル $C_{\lfloor \frac{n+2^k-1}{2^k} \rfloor}$ までの空間を S_k とする。部分空間 S_1 は将軍 G_1 , 部分空間 S_2 は将軍 G_2 , ..., 部分空間 S_k は将軍 G_k が担当し、それぞれの領域内を再度分割する。部分空間 S_1 では、 C_n で生成された q_1 波群と、セル $C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ で反射した c_1 波が衝突することで、新たな将軍を生成し、領域を分割する。このように、右方向に領域を分割する場合は q_l 波群と c_1 波の衝突で将軍の生成を行ない、左方向に領域を分割する

場合は c_k 波群と q_1 波の衝突で将軍の生成を行ない、再帰的に領域を分割し、セル空間がこれ以上分割できなくなった時点で、一斉射撃される。図 3 に Balzer のアルゴリズムのシミュレーション状況を示す。

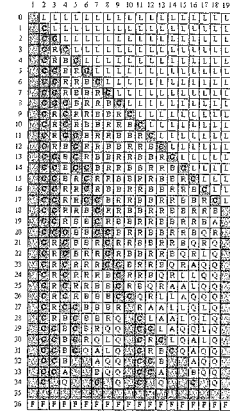


図 3: シミュレーション状況

4 Balzer のアルゴリズムの正当性について

4.1 将軍 G_0 による c_k 波群の生成

本項では将軍 G_0 による c_k 波群の生成について述べる。初期計算状況はセル C_1 の内部状態が M であり、それ以外の全てのセルの内部状態は静止状態 L となる。内部状態 L は静止状態であるので、隣接するセルの内部状態が L の場合、静止状態 L を維持し続ける。また、外界に接するセル C_n 場合、セル C_{n-1} の内部状態が L であれば、セル C_n の内部状態は静止状態 L を維持し続ける。次に速さ $\frac{1}{2}$ の c_1 波と速さ $\frac{1}{3}$ の c_2 波の生成を考える。初期計算状況でセル C_1 の内部状態が M であるので、セル C_2 では 82: M L \rightarrow C が適用され、時刻 $t=1$ 時にセル C_2 の内部状態は C に遷移する。また、 $t=1$ 時にセル C_2 の内部状態は C であり、セル C_3 の内部状態は L であるので、72: C L \rightarrow C が適用され、時刻 $t=2$ 時にセル C_2 の内部状態は C に遷移する。セルの内部状態が L であり、左隣のセルの内部状態が M、もしくは C である場合はセルの内部状態が C に遷移する。これより、内部状態 C がセル空間を右方向に 1 ステップにつき 1 セルだけ伝播する。このセル空間を伝播する内部状態 C を c_1 波と呼ぶ。 c_1 波は 1 ステップにつき 1 セル進むので、速さは $\frac{1}{2}$ である。以上より、静止状態の維持と、 c_1 波の生成に使用する遷移規則集合 U_1 を得る。遷移規則集合 U_1 を表 1 に示す。

| | |
|----------------------------|----------------------------|
| 72 : C L L \rightarrow C | 79 : M L * \rightarrow L |
| 77 : L L L \rightarrow L | 82 : M L L \rightarrow C |

表 1: 遷移規則集合 U_1

表 1 に示す遷移規則の左側の番号は遷移規則番号である。表 1 に示す遷移規則 No79 にある*は外界を示す。すなわち、遷移規則 No79 はセル C_n で適用される。次に、速さ $\frac{1}{3}$ の c_2 波の生成について述べる。 c_1 波を生成した後、セル C_1 に配置された将軍 G_0 は、将軍状態 M を保持し続ける。また、将軍 G_0 の隣のセル (セル C_2) は c_1 波が通過した後も内部状態 C を維持し続ける。 C_3 では、51: C C L \rightarrow R が適用され、内部状態が R に遷移する。 C_4 では、63: R C L \rightarrow B が適用され、内部状態が B に遷移する。 C_5 では、45: B C L \rightarrow R が適用され、内部状態が R に遷移する。セルの位置を $C_g (1 \leq g \leq n)$ で表した場合、

c_1 波が通過した後の内部状態は、 C_3 以降のセルでは、 g が偶数の場合 B に遷移し、 g が奇数の場合 R に遷移する。内部状態 B により、左方向に速さ $\frac{1}{2}$ で進む b 波が生成され、内部状態 R により、左方向に速さ $\frac{1}{2}$ で進む r 波が生成される。 b 波がセル空間を伝わり、 c_2 波を構成する内部状態 C に達した時に、 $147:C R B \rightarrow C$ が適用され、 c_2 波がセル空間を 1 セル分だけ進む。それ以外の場合は、 c_2 波を構成するセルは、内部状態 C を維持し続けるが、 r 波が通過する事で、内部状態 R の領域に置き換える。 $147:C R B \rightarrow C$ が適用され c_2 波がセル空間を 1 セル分だけ進むのは、内部状態 R の領域を b 波が進行して、 c_2 波に達した場合のみである。速さ $\frac{1}{2}$ の c_1 波が通過したセル C_g (g は偶数かつ $3 \leq g \leq n$) の位置で生成される。すなわち、 i を任意の自然数とした場合、 b 波が生成されるセルを $C_b(i)$ 、 b 波が生成される時刻を $T_b(i)$ とすると、 $C_b(i) = 2i + 2$ 、 $T_b(i) = 2i + 2$ となる。 b 波が c_2 波に到達し、 $147:C R B \rightarrow C$ が適用されることで、 c_2 波が 1 セル進行する。よって、 j を任意の自然数とし、 j 番目の b 波により c_2 波が 1 セル進行した時刻を $T_c(j)$ とし、 c_2 波が最初にセル C_m ($1 \leq m \leq n$) に存在したとすると、 $T_c(j) = T_b(j) + \{C_b(j) - (m + j - 1)\} = 3j - m + 5$ となる。 $T_c(j)$ より、 c_2 の速さは $\frac{1}{2}$ であることが示される。また、 c_2 波はセル C_1 で生成され、時刻 $t = 2$ 時に C_2 に移動する。表 2 に c_1 波、 c_2 波の生成に使用する遷移規則を示す。

| | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 23 : B B B \rightarrow B | 57 : M C L \rightarrow C |
| 24 : B B C \rightarrow B | 60 : M C R \rightarrow C |
| 28 : B B R \rightarrow R | 61 : R C B \rightarrow C |
| 30 : C B B \rightarrow B | 62 : R C C \rightarrow B |
| 31 : C B C \rightarrow B | 63 : R C L \rightarrow B |
| 35 : C B R \rightarrow R | 65 : R C R \rightarrow C |
| 39 : R B B \rightarrow B | 117 : * M C \rightarrow M |
| 40 : R B C \rightarrow B | 118 : * M L \rightarrow M |
| 43 : B C B \rightarrow C | 143 : B C R \rightarrow R |
| 44 : B C C \rightarrow R | 146 : B R R \rightarrow R |
| 45 : B C L \rightarrow R | 147 : C R B \rightarrow C |
| 47 : B C R \rightarrow C | 148 : C R C \rightarrow R |
| 49 : C C B \rightarrow C | 152 : C R R \rightarrow R |
| 50 : C C C \rightarrow R | 160 : R R B \rightarrow B |
| 51 : C C L \rightarrow R | 161 : R R C \rightarrow R |
| 53 : C C R \rightarrow C | 165 : R R R \rightarrow R |
| 56 : M C C \rightarrow C | |

表 2: 遷移規則集合 U_2

次に任意の c_k 波が生成可能であると仮定して、 c_{k+1} 波が生成可能である事を示す。 c_k 波が 1 セル分進行する場合、元々 c_k 波が存在したセルでは、 $44:B C C \rightarrow R$ 、もしくは $62:R C C \rightarrow B$ が適用され、内部状態が R もしくは B に遷移する。 B に遷移した場合のみ、 c_{k+1} 波を 1 セル分進行させる為の b 波を生成する。 c_k 波より、 b 波が生成されるセルを $C'_b(i)$ 、 b 波が生成される時刻を $T'_b(i)$ とし、最初に c_k 波が 1 セル進行した時刻を $t = h$ とすると、 $C'_b(i) = 2i + 2$ 、 $T'_b(i) = h + 2 \cdot (2^k - 1)(i - 1)$ となる。 j 番目の b 波により c_{k+1} 波が 1 セル進行した時刻を $T'_c(j)$ とし、 c_{k+1} 波が最初にセル C_m に存在したとすると、 $T'_c(j) = T'_b(j) + \{C'_b(j) - (m + j - 1)\} = (2^{k+1} - 1)j + h - m - 2^{k+1} + 5$ となる。以上より、生成される波の速さは $\frac{1}{2^{k+1}-1}$ となり、 c_k 波より c_{k+1} 波が生成可能であることが示される。また、 c_1 波の生成と、 c_1 波より c_2 波が生成が可能であることを示しているため、遷移規則集合 U_1 と U_2 の和集合により c_k 波群は生成可能である。

4.2 q_l 波と将軍 G_1 の生成

前項で述べた c_1 波がセル C_n に達すると、 $75:C L * \rightarrow M$ が適用され、将軍 G_1 が生成される。この将軍は q_1 波をはじめとする q_l 波群を生成する。ただし、セル空間のセル数 n が偶数の場合、 q_1 波と c_2 が衝突した際にセル $C_{\frac{n}{2}}$ 、セル $C_{\frac{n}{2}+1}$ に、奇数の場合はセル $C_{\frac{n+1}{2}}$ に将軍を生成する。まず、 n が偶数の場合の波の生成から述べる。 n が偶数の場合、セル C_n に将軍

が生成されたステップに、セル C_{n-1} の内部状態は R となっているので、セル C_{n-1} では $144:B R M \rightarrow Q$ が適用され、内部状態が Q に遷移する。次のステップでは、セル C_{n-2} では $145:B R Q \rightarrow Q$ が適用され、内部状態が Q に遷移する。これより、内部状態 Q がセル空間を左方向に 1 ステップにつき 1 セルだけ伝播する。このセル空間を伝播する内部状態 Q を q_1 波と呼ぶ。また、セル数 $n = 3$ の場合の将軍 G_1 の維持に、遷移規則 $100:C M * \rightarrow M$ が必要となる。次に、偶数の場合の q_1 波以外の q_l 波の生成について述べる。前項で述べた c_1 波群の生成の動作を左右反転させた動作となる。前項で述べた遷移規則集合 U_2 に含まれる遷移規則のそれぞれの要素の内部状態を C を Q 、 B を A 、 R を L に置き換え、さらに入力の状態を反転させた遷移規則集合 V_1 を得る。遷移規則集合 V_1 を表 3 に示す。

| | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 : A A A \rightarrow A | 112 : Q M * \rightarrow M |
| 2 : A A L \rightarrow A | 116 : R M * \rightarrow M |
| 3 : A A Q \rightarrow A | 120 : A Q A \rightarrow Q |
| 12 : L A A \rightarrow L | 121 : A Q L \rightarrow Q |
| 13 : L A Q \rightarrow L | 122 : A Q Q \rightarrow Q |
| 17 : Q A A \rightarrow A | 130 : L Q A \rightarrow Q |
| 18 : Q A L \rightarrow A | 131 : L Q L \rightarrow Q |
| 19 : Q A Q \rightarrow A | 132 : L Q M \rightarrow Q |
| 66 : A L L \rightarrow A | 133 : L Q Q \rightarrow Q |
| 67 : A L Q \rightarrow Q | 135 : Q Q A \rightarrow L |
| 75 : C L * \rightarrow M | 136 : Q Q L \rightarrow A |
| 76 : L L A \rightarrow L | 137 : Q Q M \rightarrow Q |
| 77 : L L L \rightarrow L | 138 : Q Q Q \rightarrow L |
| 78 : L L Q \rightarrow L | 139 : R Q A \rightarrow L |
| 84 : M L * \rightarrow M | 140 : R Q L \rightarrow A |
| 85 : Q L A \rightarrow L | 141 : R Q M \rightarrow Q |
| 86 : Q L L \rightarrow L | 142 : R Q Q \rightarrow L |
| 87 : Q L Q \rightarrow L | 144 : B R M \rightarrow Q |
| 100 : C M * \rightarrow M | 145 : B R Q \rightarrow Q |

表 3: 遷移規則集合 V_1

次に、 n が奇数の場合の q_l 波群の生成を述べる。 n が奇数の場合、セル C_n に将軍が生成されたステップに、セル C_{n-1} の内部状態は B となっているので、セル C_{n-1} では $41:R B M \rightarrow A$ が適用され、内部状態が A に遷移する。次のステップでは、セル C_{n-2} では $38:R B A \rightarrow Q$ が適用され、内部状態が Q に遷移する。次のステップでは、セル C_{n-3} では $42:R B Q \rightarrow Q$ が適用され、内部状態が Q に遷移する。これより、 n が奇数の場合の q_1 波が生成される。次に、奇数の場合の q_1 波以外の q_l 波群の生成について述べる。 q_l 波群の伝播は n が偶数の場合と同じであるが、 q_1 波が通過した際の内部状態が、 n が偶数の場合と異なる。 n が偶数の場合、 q_1 波が通過した後は L 、 A に遷移するが、 n が奇数の場合は、遷移規則 $6:B A M \rightarrow R$ 、 $124:B Q R \rightarrow R$ により、常に R に遷移する。内部状態が R に遷移した後、表 4 に示す遷移規則集合 V_2 と遷移規則集合 V_1 により q_l 波群が生成される。

| | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 6 : B A M \rightarrow R | 94 : A M * \rightarrow M |
| 20 : R A A \rightarrow L | 97 : B M * \rightarrow M |
| 21 : R A Q \rightarrow L | 124 : B Q R \rightarrow R |
| 38 : R B A \rightarrow Q | 129 : C Q R \rightarrow R |
| 41 : R B M \rightarrow A | 156 : Q R A \rightarrow L |
| 42 : R B Q \rightarrow Q | 157 : Q R L \rightarrow A |
| 89 : R L L \rightarrow A | 158 : Q R M \rightarrow Q |
| 91 : R L Q \rightarrow Q | 159 : Q R Q \rightarrow L |

表 4: 遷移規則集合 V_2

q_l 波が通過した後の内部状態により、セル空間のセル数 n が偶数であるか奇数であるかを伝える。 q_1 が内部状態が R の場合はセル数 n が奇数となり、内部状態が A もしくは L の場合、セル数 n が偶数となる。

4.3 将軍 G_k の生成

本項では、 c_k 波群と q_1 波、および q_l 波群と c_1 波の衝突による将軍の生成について述べる。まず、 c_k 波群と q_1 波の衝

突について述べる。セル空間のセル数 n が偶数であるか奇数であるかにより、衝突時に適用される遷移規則が異なる。 n が奇数である場合、 c_k 波を構成するセルで $52:C C Q \rightarrow M$ 、もしくは $48:C C A \rightarrow M$ が適用され、將軍状態 M が生成される。 n が偶数である場合、 c_k 波を構成するセルと q_1 波を構成するセルの双方に將軍を生成しないとけない。 c_k 波を構成するセルでは $46:B C Q \rightarrow M$ 、もしくは $64:R C Q \rightarrow M$ が適用され、將軍状態 M が生成される。 q_1 波を構成するセルでは $126:C Q L \rightarrow M$ 、もしくは $125:C Q A \rightarrow M$ が適用され、將軍状態 M が生成される。 c_k 波群と q_1 波の衝突による將軍生成に使用する遷移規則集合 U_3 を表 5 に示す。

| | |
|----------------|-----------------|
| 46 : B C Q → M | 59 : M C Q → M |
| 48 : C C A → M | 64 : R C Q → M |
| 52 : C C Q → M | 125 : C Q A → M |
| 58 : M C M → M | 126 : C Q L → M |

表 5: 遷移規則集合 U_3

ここで生成された將軍は、隣接する左右のセルが將軍状態となるまで、將軍状態を維持し続ける。將軍状態の維持に使用する遷移規則集合 W_1 を表 6 に示す。

| | |
|-----------------|-----------------|
| 92 : A M B → M | 104 : M M B → M |
| 93 : A M M → M | 105 : M M C → M |
| 95 : B M M → M | 106 : M M L → M |
| 96 : B M R → M | 108 : M M Q → M |
| 98 : C M M → M | 110 : Q M C → M |
| 99 : C M Q → M | 111 : Q M M → M |
| 101 : L M A → M | 113 : R M L → M |
| 102 : L M L → M | 114 : R M M → M |
| 103 : M M A → M | 115 : R M R → M |

表 6: 遷移規則集合 W_1

生成された將軍は、右方向に c_k 波群、左方向に q_1 波群を生成する。まず、右方向に生成する c_k 波群について述べる。項 4.1 で述べた遷移規則集合 U_1 、 U_2 は、將軍状態がセル C_1 に配置した時のみ動作する。セル空間を分割した將軍が生成する c_k 波群に関しては、さらに遷移規則の追加が必要となる。ここでは、將軍 G_0 と將軍 G_1 で分割された領域 S_1 で説明を行なう。領域 S_1 のセル数が偶数の場合、遷移規則集合 U_1 、 U_2 の和集合に遷移規則 $153:M R A \rightarrow C$ を追加することで、 c_k 波群は生成可能となる。領域 S_1 のセル数が奇数の場合、項 4.2 で述べた様に、セル数の情報を伝えないとけない。この場合は、 c_1 波が伝播した後にセルの内部状態を L に遷移させる。部分空間で c_k 波群を生成する為に追加する遷移規則集合 U_4 を表 7 に示す。遷移規則集合 U_1 、 U_2 、 U_4 の和集合により、部分空間で c_k 波群が生成可能となる。

| | |
|----------------|-----------------|
| 4 : B A A → C | 55 : L C Q → L |
| 5 : B A L → C | 68 : B L C → R |
| 7 : B A Q → C | 70 : C L A → C |
| 8 : C A A → C | 71 : C L C → R |
| 9 : C A L → C | 74 : C L Q → C |
| 11 : C A Q → C | 80 : M L A → C |
| 14 : M A A → B | 81 : M L C → C |
| 15 : M A L → B | 83 : M L Q → C |
| 16 : M A Q → B | 88 : R L C → B |
| 25 : B B L → R | 149 : C R L → C |
| 32 : C B L → R | 153 : M R A → C |
| 36 : M B A → L | 154 : M R L → B |
| 37 : M B Q → C | 155 : M R Q → C |
| 54 : L C A → L | 162 : R R L → B |

表 7: 遷移規則集合 U_4

また、 S_1 では、 G_1 が生成した q_1 波群と G_2 が生成した c_1 波の衝突により新たな將軍を生成する。 q_1 波群と c_1 波の衝突による將軍生成に使用する遷移規則集合は、遷移規則集合 U_3

に対して、項 4.2 と同様の交換処理を行った遷移規則集合と等しくなる。この遷移規則集合 V_3 を表 8 に示す。

| | |
|-----------------|-----------------|
| 46 : B C Q → M | 127 : C Q M → M |
| 64 : R C Q → M | 126 : C Q L → M |
| 123 : B Q Q → M | 128 : C Q Q → M |
| 125 : C Q A → M | 134 : M Q M → M |

表 8: 遷移規則集合 V_3

q_1 波群については、遷移規則集合 U_4 に対して、遷移規則 $163:R R M \rightarrow Q$ 、 $164:R R Q \rightarrow Q$ と遷移規則集合 U_4 に対して、項 4.2 と同様の交換処理を行った遷移規則集合を追加することで、生成が可能となる。遷移規則 $163:R R M \rightarrow Q$ 、 $164:R R Q \rightarrow Q$ は内部状態が R の領域に q_1 波を生成する為に使用する。追加する遷移規則の集合を V_4 とする。表 9 に遷移規則集合 V_4 に含まれる遷移規則を示す。 q_1 波群は遷移規則集合 V_1 、 V_2 、 V_4 の和集合により、部分空間で c_k 波群が生成可能となる。

| | |
|----------------|-----------------|
| 10 : C A M → Q | 69 : B L M → Q |
| 22 : B B A → Q | 73 : C L M → Q |
| 26 : B B M → A | 90 : R L M → A |
| 27 : B B Q → Q | 150 : C R M → Q |
| 29 : C B A → Q | 151 : C R Q → Q |
| 33 : C B M → A | 163 : R R M → Q |
| 34 : C B Q → Q | 164 : R R Q → Q |

表 9: 遷移規則集合 V_4

c_k 波群と q_1 波、および q_1 波群と c_1 波の衝突により生成した將軍で領域を分割し、分割した領域が 2 になった次のステップに射撃を行なう。射撃に使用する遷移規則集合 W_2 を表 9 に示す。以上の遷移規則集合 U_1 、 U_2 、 U_3 、 U_4 、 V_1 、 V_2 、 V_3 、 V_4 、 W_1 、 W_2 により、セル数 n のセル空間を $2n-2$ ステップで射撃可能となる。

| | |
|-----------------|-----------------|
| 107 : M M M → F | 109 : M M * → F |
| 119 : * M M → F | |

表 10: 遷移規則集合 W_2

5 おわりに

本稿では、1 次元アレイ接続セルラ・オートマトン上の一斉射撃問題について考察し、Balzer の一斉射撃アルゴリズムの遷移規則について考察を行なった。 c_k 波群、 q_1 波群の生成、將軍の生成、射撃に使用する遷移規則について明らかにした。今後の課題としては、明らかにした遷移規則集合を使用することで、すべてのセル数 n で $2n-2$ ステップで射撃可能であることを数学的に示すことである。

参考文献

- [1] A. Waksman: An optimum solution to the firing squad synchronization problem, Information and Control, vol. 9, pp. 66-78, (1966).
- [2] R. Balzer: An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem, Information and Control, vol. 10, 22-42, (1967).
- [3] J. Mazoyer: On optimal solutions to the firing squad synchronization problem, Theoretical Computer Science, 217, pp.53-80, (1999).