

二次共振系の高速・高精度数値計算法とピアノ音の実時間生成

高澤 嘉光(未来テクノ, takasawa@aa.isas.ne.jp)

西口 磯春(神奈川工科大, nishiguc@sd.kanagawa-it.ac.jp)

内容梗概: 離散的な計算手法で処理可能な周波数は、サンプリング定理によりサンプリング周波数の半分までである。したがって、高速計算の不可欠な条件はこの限界周波数まで有効な手法を用いることである。楽器の物理モデルは通常偏微分方程式で表わされる。しかし、それを直接、差分法で離散化しても限界周波数まで有効にする計算手法を見つけることは不可能である。自然界の振動は、固有振動から構成されており、それは二次共振系に帰着できる。この固有振動に着目した計算法は、モード解析法と呼ばれている。この手法により限界周波数まで有効化できる。本稿では、その計算法と、ピアノ音生成への適用について述べる。

A high-speed and high-precision calculation method of 2nd order resonators and a real-time production of piano sounds

TAKASAWA Yoshimitsu(Mirai techno)

NISHIGUCHI Isoharu(Kanagawa Institute of Technology)

Abstract: According to Shannon's sampling theorem, the frequency which is processed by discrete calculation technique can be a half of the sampling frequency. Therefore the high-speed calculation needs to use a method in which this limit frequency is effective. A physical model of a musical instrument is usually expressed in partial differential equations. But even if we apply the finite difference method directly to these equations, it's impossible to find the calculation technique in which the limit frequency is effective. Vibrations of the natural world consist of eigen-vibrations, and can return to 2nd order resonators. The calculation method which aimed at eigen-vibration is called the modal analysis method. This method can make the limit frequency effective. In this paper, this method and its application to a piano-sound production are discussed.

§ 1 はじめに

物理モデルによるピアノ音生成の契機を作ったのは、1994年に発表されたA.Chaigneらの論文[1][2]であることは確かである。その後、J.Bensaら[3](2003)は、A.Chaigneらが示したピアノ弦の振動方程式における周波数依存の減衰項は理論的根拠に欠けるとして新しい数式を提案した。また、B.Bankら[4](2005)は、弦の横振動によって縦振動が励起されるメカニズムを解明した。これによってピアノの物理モデルの数式が確立されたと言える。しかし、そのすべての数値シミュレーションは有限差分法(Finite Difference Method, FDM)に基づくものであった。これに対して著者の一人は、「FDMによる楽音は高次の振動モードになると周波数が大きくなり、ピアノ音の大きな特色である非調和性を再現していない」ことを示し、それに代わる計算法として「モード解析法

(Modal Analysis Method, MAM)」を提案した[5]。MAMは、これまでのモード法またはガレルキン法と本質的には同じであるが、それをピアノの打弦という瞬間的な衝突現象まで適用できるようにしたものである。FDMでは、物理モデルを表す偏微分方程式を直接差分により離散化するのに対して、MAMでは振動体の個々の固有振動に着目するが、その振動は殆どの場合二次共振系になり、それは2階の常微分方程式で表わされる。その数値計算のためには離散化された計算式が必要であるが、差分近似で直接得られる計算式は偏微分方程式の場合と同様周波数が大きくなると誤差が大きくなる。このため、実時間で高品位の楽音を生成するためには、二次共振系の高速・高精度の計算式が不可欠である。本稿では、最初にこの計算法について検討し、次にピアノ音生成において一番重要な打弦処理への適用について述べる。

[物理定数]	
横振動伝播速度	c
剛性	ϵ
弦長	L
基本周波数	$f_a \equiv c/2L$
弦分割数	N
サンプリング周波数	f_e
適用限界周波数	$f_a \equiv f_e/2$
弦ステップ巾	$\Delta x \equiv L/N$
時間ステップ巾	$\Delta t \equiv 1/f_e$
ピアノ打弦位置	x_0
ハンマーヘッド先端幅	W_H

§ 2 二次共振系の高速・高精度数値計算法

二次共振系とは、図1で示されるような質量 m 、バネ k 、粘性抵抗 c から構成され、外力 F が働く振動系である。この系の座標系を x とすればその運動は次の微分方程式で表わされる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} + F \quad (1)$$

ここで、 $\frac{c}{m} = 2b$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{F}{m} = f$ と置き換えると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \quad (2)$$

となる。これ以降、不足減衰、すなわち $b^2 < \omega_0^2$ の場合について考えることにし、 $\omega^2 \equiv \omega_0^2 - b^2$ とする。次に、 $f(t) = \delta(t)$ である時の式(2)の解について考える。 $t < 0$ の時、系は静止状態、すなわち $x = \frac{dx}{dt} = 0$ であるとし、式(2)を $t = 0$ を含む微小な区間で積分し、区間を零にもって行くと加重直後の速度は1になる。したがって、 $t = 0$ では、 $x = 0, \frac{dx}{dt} = 1$ になり、それ以降 $t > 0$ では系は自由振動になる。そこで、 $t = 0$ での初期条件 $x = 0, \frac{dx}{dt} = 1$ による式(2)の解は、

$$h(t) = \frac{1}{\omega} \exp(-bt) \sin(\omega t) \quad t > 0 \quad (3)$$

となる。これは、「インパルス応答関数」と呼ばれる。もし加えられた加速度が $a\delta(t)$ であれば、 $x(t) = ah(t)$ になる。

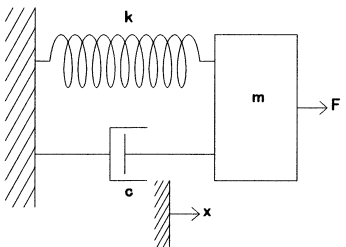


図1 二次共振系

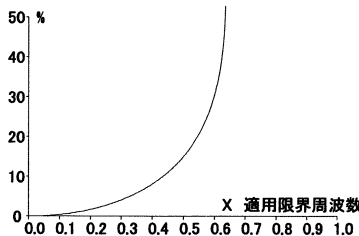


図2 FDMの周波数誤差

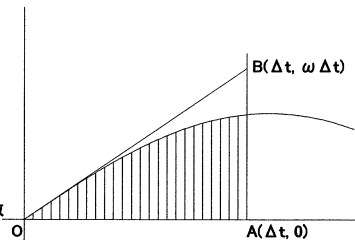


図3 インパルスの重み

2.1 差分近似式と高精度計算式

振動系の変位 $x(t)$ と加速度 $f(t)$ とを時間間隔 Δt で離散化し、それを $x_n = x(n\Delta t)$ と $f_n = f(n\Delta t)$ とする。この離散値を用いて、式(2)の微係数を次式で近似する。

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} \approx \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (4)$$

これを式(2)に代入すると、逐次式が得られる。

$$x_{n+1} = \frac{2 - (\omega\Delta t)^2}{1 + b\Delta t} x_n - \frac{1 - b\Delta t}{1 + b\Delta t} x_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{1 + b\Delta t} f_n \quad (5)$$

次に、式(2)において $f(t) = \delta(t)$ の場合について考えてみる。この時、時系列 x_n では、 $x_{-1} = x_0 = 0, f_n = 0 \quad n > 0$ となるが、時系列 x_n は離散化により近似されているため式(3)を満足することにはならない。そこで、式(3)を満足する時系列を新たに v_n とし、その逐次式を次のように仮定する。

$$v_{n+1} = Av_n - Bv_{n-1} \quad (6)$$

ここで、 A および B は実数であるとし、式(3)の関数 $\sin(\omega t)$ を複素三角関数で表わして上式に代入し、整理すると次式が得られる。ここで $j^2 = -1$ 。

$$A = \exp(-b\Delta t) \exp(j\omega\Delta t) + B \exp(b\Delta t) \exp(-j\omega\Delta t) \quad (7)$$

A および B が実数であることから、この2つの値は次のようになる。

$$A \equiv 2 \exp(-b\Delta t) \cos(\omega\Delta t), \quad B \equiv \exp(-2b\Delta t) \quad (8)$$

上式で決まる A および B を用いた逐次式によって得られる時系列 v_n は $f(t) = \delta(t)$ に対して完全に $h(t)$ に従うことから、この逐次式は高精度計算式であると言える。

一方、逐次式(5)から得られる角速度 ω' と減衰率 b' について考える。式(5)の x_n と x_{n-1} との係数を A' と B' とすると、式(6)との対応関係から次式が得られる。

$$A' \equiv \frac{2 - (\omega_0 \Delta t)^2}{1 + b \Delta t}, \quad B' \equiv \frac{1 - b \Delta t}{1 + b \Delta t} \quad (9)$$

$$\exp(-b' \Delta t) = \sqrt{B'}, \quad \cos(\omega' \Delta t) = \frac{A'}{2\sqrt{B'}} \quad (10)$$

実際に用いられる $b \Delta t$ は非常に小さい。例えば、60dBの減衰時間が0.01sであった時サンプリング周波数を44.1kHzとしても、690/44100となる。このため、式(10)では $\exp(-b' \Delta t) \approx 1 - b \Delta t$ となることから $b' = b$ とみなすことができ、逐次式(5)では減衰率が変化することはない。また、 $B' = 1$ と考えて構わない。この時、 ω と ω' の関係は、

$$\cos(\omega' \Delta t) = 1 - \frac{(\omega_0 \Delta t)^2}{2} \approx 1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{2} \quad (11)$$

となる。図2に式(11)を用いて計算した周波数の誤差を示す。楽音においては、周波数誤差が半音の10分の1でもかなり大きい。この相対誤差は約0.6%であり、これを許容範囲とすれば、式(5)の逐次式で使用可能な周波数帯域は、適用限界周波数 f_a の12%である。

2.2 「たたみ込み積分」に対する高精度計算式

「たたみ込み積分」は、次式で表わされる。

$$x(t) = \int_0^t f(t-u)h(u)du \quad (12)$$

逐次式(5)の左辺の第3項の係数は、たたみ込み積分の離散的な計算における関数値 f_n の重みを意味している。これを D とし、 $b \Delta t$ が非常に小さいのでそれを無視すれば、次のように置換できる。

$$D \equiv \frac{\Delta t^2}{1 + b \Delta t} \approx \Delta t^2 = \frac{1}{\omega} (\omega \Delta t) \Delta t \quad (13)$$

ここで $(\omega \Delta t) \Delta t$ は、図3で示す三角形OBAの面積の2倍を表し、これは式(3)で定義される $h(t)$ の区間 $[0, \Delta t]$ の面積値の2倍を近似したものであると言える。なお、直線OBは点Oにおける関数 $h(t)$ の接線である。ここで、具体的に

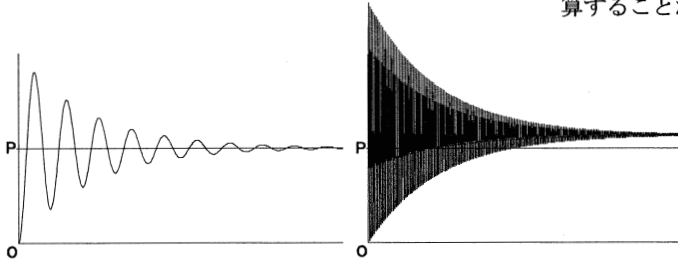


図4 ステップ荷重に対する応答

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0, \\ f_0 & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad (14)$$

とした式(12)の理論解は次式になり、図4に示すように時間の経過とともに $\frac{f_0}{\omega^2 + b^2}$ 、すなわち点Pの高さに収束する。

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 + b^2} \left[1 - \frac{\exp(-bt)}{\omega} \cos(\omega t - \phi) \right], \quad (15-1)$$

$$\phi \equiv \arctan \frac{b}{\omega} \quad (15-2)$$

ここで、式(13)の重み係数を用いて式(6)により離散的に数値計算をすると、 ω が小さい時は理論値 $\frac{f_0}{\omega^2 + b^2}$ に収束する。しかし、 ω が大きくなるに従い、理論値より大きな値に収束する。図5は $\omega = 2\pi(0.5f_a)$ とした時の結果であり、理論値から外れた値に収束していることが分かる。これは、式(13)の係数は $h(t)$ の区間 $[0, \Delta t]$ の面積の近似値であることに原因がある。そこで、重み係数 C を次の積分によって得られる正確な面積により定義する。なお、 b の値は小さいものとする。

$$C \equiv 2 \int_0^{\Delta t} h(t) dt = 2 \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\omega} \exp(-bt) \sin(\omega t) dt \\ = \left(\frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \right)^2 \quad (16)$$

この重み係数を用いた逐次式

$$v_{n+1} = Av_n - Bv_{n-1} + Cf_n \quad (17)$$

を用いれば、適用限界周波数 f_a までのすべての周波数に対して、離散的な応答の計算結果は理論値に一致する。図6に重み係数 C と D の比を示す。 $\omega \Delta t$ が小さい時は、 $C \approx \Delta t^2$ となり、 C と D は同じになる。周波数 f_a に対しては、 $C = \frac{2}{\pi^2} \Delta t^2$ となり、 D は実際の値の2.5倍になる。従って、 ω が小さい時には問題はないが、限界周波数に近づくと誤差が大きくなる。式(17)の逐次式はステップ荷重に対して高精度で計算することができると確認できたが、変動荷重に対しても同様に高精度で計算することができる。

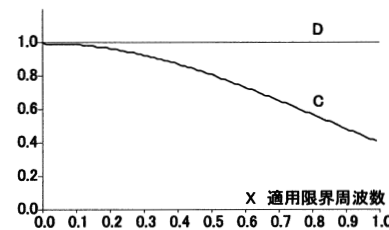


図5 均一な重みの場合の応答

図6 インパルス応答の重み

§ 3 ピアノ音の実時間生成

楽音生成において不可欠な条件は周波数を正確に再現することである。さらに高速性も強く要求される。以下に示すように、MAMにおいては偏微分方程式を常微分方程式に変換することにより、前章に示した高精度計算法を適用できる。ピアノの場合、打弦処理が非常に重要である。弦とハンマーヘッドとの接触時間は長くても数msであり、この間の弦の振動は強制振動であり、ハンマーヘッドの形状や硬さを正確に処理するかどうか、音質の向上の鍵となる。

3.1 弦振動方程式のモード化

ハンマー等で打弦される弦の横振動 $y(x, t)$ は、次のようにモデル化することができる[1][3]。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \epsilon c^2 L^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2b_1 \frac{\partial y}{\partial t} + 2b_2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{\rho} f(x, t) \quad (18)$$

この式中の関数 $f(x, t)$ は、ハンマーによる打弦等で外部から弦に及ぼされる力であり、上式は弦の振動系 $y(x, t)$ への強制振動とみなすことができる。ここで、境界条件を両端支持、すなわち

$$y(0, t) = y(L, t) = \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (19)$$

とすると、第 n モードの固有振動 $\xi_n(x)$ は

$$\xi_n(x) = \sin(\beta_n x), \quad \beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad (20)$$

となり、弦の振動は固有振動 $\xi_n(x)$ の和になる。

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \xi_n(x) \quad (21)$$

この式を式(18)に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 y_n}{dt^2} \xi_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \xi_n(x) + \frac{1}{\rho} f(x, t) \quad (22-1)$$

$$Y_n(t) = (c\beta_n)^2 (1 + \epsilon\pi^2 n^2) y_n + 2(b_1 + b_2 \beta_n^2) \frac{dy_n}{dt} \quad (22-2)$$

この式の両辺に $\xi_m(x)$ を乗じて、弦長で積分する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 y_n}{dt^2} \int_0^L \xi_n(x) \xi_m(x) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \int_0^L \xi_n(x) \xi_m(x) dx + \frac{1}{\rho} \int_0^L f(x, t) \xi_m(x) dx \quad (23)$$

$\xi_n(x)$ は固有関数であるので直交する。すなわち、

$$\int_0^L \xi_n(x) \xi_m(x) dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases} \quad (24)$$

このことより、式(23)は次のようになる。

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = -Y_n(t) + A_n(t) \quad (25-1)$$

$$A_n(t) = \frac{2}{M_s} \int_0^L f(x, t) \xi_n(x) dx \quad (25-2)$$

ここで、 $\rho L = M_s$ であり、 $A_n(t)$ は、ハンマーが第 n モードの振動に及ぼす加速度である。上式の $Y_n(t)$ に式(22-2)を代入すると次式が得られる。

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} + c_{1n} \frac{dy_n}{dt} + c_{2n} y_n = A_n(t) \quad (26-1)$$

$$c_{1n} = 2(b_1 + b_2 \beta_n^2), \quad c_{2n} = (c\beta_n)^2 (1 + \epsilon\pi^2 n^2) \quad (26-2)$$

以上のように、数式モデルの偏微分方程式(18)の表現は常微分方程式(26)に代った。この系は、まさに前章で述べた共振系(resonator)である。また、式(26-2)より周波数 f_n は次式になり、 $\epsilon = 0$ の時以外は倍音 $n f_d$ から n^2 に比例した外れ方で大きくなる。これは「非調和性(inharmonicity)」と呼ばれている。

$$f_n = (n f_d) \sqrt{1 + \pi^2 \epsilon n^2} \approx (n f_d) (1 + \frac{1}{2} \pi^2 \epsilon n^2) \quad (27)$$

非調和性はピアノ音の個性を醸し出し、非常に重要な役割を有する。このことから周波数の正確な再現が必要である[8]。

3.2 有限差分法(FEM)の誤差

ここで、式(18)の連続系を「差分法」を用いて近似解を求めた時の誤差を、減衰項と外力を省略した次式を使って導出する[6][7]。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \epsilon c^2 L^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (28)$$

離散系の場合、 i を x 座標、 k を時間の離散点、 n をモード番号とすると、座標点 (i, k) における弦の振動は次のように固有振動の和として表すことが出来る。なお、 a_n は第 n モードの振幅を表す。

$$y_{i,k}^n = a_n \sin(\omega_n k \Delta t) \sin\left(\frac{\pi n i \Delta x}{L}\right) \quad (29-1)$$

$$y_{i,k} = \sum_{n=1}^{\infty} y_{i,k}^n \quad (29-2)$$

ここで、式(28)の微分を次のように中心差分式で近似する。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y_{i-1,k} - 2y_{i,k} + y_{i+1,k}}{\Delta x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\pi n \Delta x}{2L} \right)^2 y_{i,k}^n \quad (30)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \approx \frac{y_{i-2,k} - 4y_{i-1,k} + 6y_{i,k} - 4y_{i+1,k} + y_{i+2,k}}{\Delta x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\pi n \Delta x}{2L} \right)^4 y_{i,k}^n \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_{i,k-1} - 2y_{i,k} + y_{i,k+1}}{\Delta t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\Delta t} \sin \frac{\omega_n \Delta t}{2} \right)^2 y_{i,k}^n \quad (32)$$

これらの3つの式を式(28)に代入し、両辺に $\sin(\frac{\pi n i \Delta x}{L})$ を乗じて、 i に関して0から $N-1$ までの和を取る。 $\sin(\frac{\pi n i \Delta x}{L})$ は離散的固有関数であるので直交する。すなわち、

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi m i \Delta x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n i \Delta x}{L}\right) = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases} \quad (33)$$

であるので、次式が得られる。

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \sin \frac{\omega_n \Delta t}{2} \right)^2 = c^2 \left(\frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\pi n \Delta x}{2L} \right)^2 + \epsilon c^2 L^2 \left(\frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\pi n \Delta x}{2L} \right)^4 \quad (34)$$

この式をまとめると、最終的に次式が得られる。

$$\sin \frac{\pi f_n}{f_e} = \frac{2Nf_0}{f_e} \sin \frac{\pi n}{2N} \sqrt{1 + \epsilon(2N \sin \frac{\pi n}{2N})^2} \quad (35)$$

この関係式は、連続系の式(27)に対応し、 f_n/N が小さい時には両者は同じになる。図7に連続系と離散系の場合の周波数の配置を示す。なお、 $\epsilon = 0.000015$ 、 $N = 100$ 、 $f_e = 1000f_0$ である。上段は連続系であり、モード番号が大きくなるに従いその間隔が広まっている。しかし下段のFDMによる離散系ではモード番号が大きくなると間隔が狭くなり、非調和性を全く再現してない。

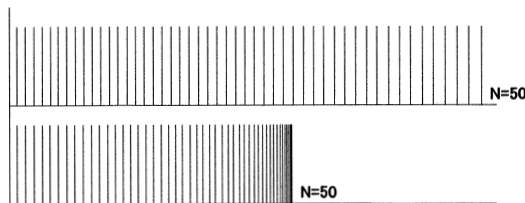


図7 周波数の配置 上段：連続系 下段：離散系

3.3 打弦時の力・加速度の配分

ピアノ弦の振動は、モード化により式(26)で表わされる共振系の集合体になったが、これらの共振系は打弦時にハンマーヘッドから力を受けて振動を開始する。したがって、この力が各モードに対してどのように配分されるかが非常に重要である。ハンマーは打鍵力により加速され、弦の下方から弦と衝突するが、その時には速度 v_0 を有している。ここで、 $\zeta(t)$ はハンマーの変位、 y_0 はハンマーの打弦位置 $x = x_0$ における弦の変位とする。 $\zeta > y_0$ ならばハンマーが弦と接触しており、その差 $|\zeta - y_0|$ はハンマーヘッドの先端部分の圧縮量である。そこで、この圧縮力を次式で定義する。

$$F_H(u) = \begin{cases} K_H u^p (1 + \mu \frac{\partial u}{\partial t}) & \text{if } u > 0, \\ 0 & \text{if } u \leq 0 \end{cases} \quad (36)$$

この時、弦の各部が受ける力は次式になる。

$$f(x,t) = F_H(\zeta - y_0) g(x, x_0) / \int_0^L g(x, x_0) dx \quad (37)$$

関数 $g(x,t)$ は、圧縮力 $F_H(\zeta - y_0)$ の分布を表し、ハンマーヘッドの形状等によって決まる。一方、衝突時には、ハンマー自体は弦に及ぼした式(36)で決まる力を反発力として弦から受ける。したがって、その運動方程式は次のようになる。

$$M_H \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -F_H(\zeta - y_0) \quad (38)$$

第 n モードの振動が受ける力は式(26)において加速度 $A_n(t)$ になるが、それは式(25-2)から次のようになる。

$$A_n(t) = \frac{2F_H(\zeta - y_0)}{M_s} \frac{\int_0^L g(x, x_0) \xi_n(x) dx}{\int_0^L g(x, x_0) dx} \quad (39)$$

上式における2番目の分数は各モードへの配分を表しているのので、これを σ_n とする。また、関数 $g(x, x_0)$ はヘッドが弦と接触する先端の幅 W_H 以外では0であるので、 σ_n は次のようになる。

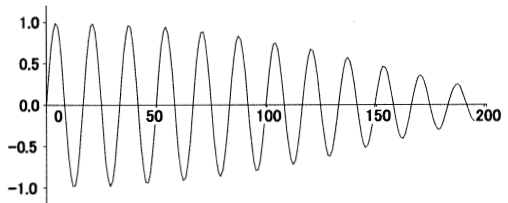


図8 打弦力のモードへの配分係数

$$\sigma_n = \int_a^b g(x, x_0) \sin(n\pi \frac{x}{L}) dx / \int_a^b g(x, x_0) dx \quad (40)$$

$$a = x_0 - W_H/2, \quad b = x_0 + W_H/2$$

ここで具体的に、分布関数に、次の関数を考えてみる。これはハンマー窓あるいは \cos^2 窓と呼ばれる関数である。

$$g(x, x_0) = \cos^2 \frac{\pi(x-x_0)}{W_H} \quad (41)$$

最終的に、配分係数 σ_n は、ヘッドの形状への依存度を表す関数 $\nu(z)$ と打点位置 x_0 の依存度を表す関数 $\sin(\frac{n\pi}{L}x_0)$ との積になる。

$$\sigma_n = \nu(\alpha n) \times \sin(\frac{n\pi}{L}x_0), \quad \alpha = \frac{W_H}{2L} \quad (42)$$

$$\nu(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi(1-z)z(1+z)} \quad (43)$$

式(26)に基づいた実際の計算では、さらに離散化により、前出の式(17)の右辺第3項に対応する項を計算する必要がある。図8にモードへの配分係数の具体例を示す。使用したデータは、次のとおりである。

$$f_0/f_e = 0.001, \quad e = 0.000015, \quad x_0 = 1/8.3,$$

$$W_H/2L = 1/200$$

図において配分係数が負になっていることは、振動の位相が逆相であることを意味している。実際に生成される楽音における各モードの強さは、打弦により弦に加えられた力、すなわち加速度の関数 $\frac{2F(t)}{M_a}$ と各モードのインパルス応答関数との「たたみ込み演算」によって決まるが、関数 $F(t)$ は、ハンマーヘッドの固さや打弦速度によって大きく影響を受ける。

参考文献

- [1] A.Chaigne and A.Askenfelt, Numerical simulation of Piano strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods, J.Acoust.Soc.Am. **95**(2), 1112-1118(1994).
- [2] A.Chaigne and A.Askenfelt, Numerical simulation of Piano strings. II. Comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer-string parameters, J.Acoust.Soc.Am. **95**(3), 1631-11640(1994).
- [3] J.Bensa,S.Bilbao,R.Kronland-Martinet, J.O.Smith,The simulation of piano string vibration: From physical models to finite difference schemes and digital waveguides, J.Acoust.Soc.Am. **114**(2), 1095-1108(2003).

モード解析法(MAM)の利点は、ハンマーヘッドの力の分布関数が分かれば、そのモードへの配分係数を解析的に求めることが出来ることであり、これによってヘッドの形状が音色に及ぼす影響を正確に調べることができる。以下に、2つの分布関数と形状依存関数とを示す。ここで、興味のあることは「後者の関数は前者のフーリエ積分になっている」ことである。

[cos 窓]

$$g(x, x_0) = \cos \frac{\pi(x-x_0)}{W_H} \quad (44-1)$$

$$\nu(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(1-2z)(1+2z)} \quad (44-2)$$

[楔形窓, $b=0$ の時には, 矩形窓]

$$g(x, x_0) = \begin{cases} 1 - b \frac{x-x_0}{W_H/2} & \text{if } x > x_0, \\ 1 + b \frac{x-x_0}{W_H/2} & \text{if } x \leq x_0 \end{cases} \quad (45-1)$$

$$\nu(z) = \frac{2u + bw^2}{2+b}, \quad u = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, \quad w = \frac{\sin(0.5\pi z)}{0.5\pi z} \quad (45-2)$$

§4 おわりに

常微分方程式でも偏微分方程式でも、その差分近似においては周波数誤差が非常に大きい。これに対して、ここで述べたモード分解に基づく高精度計算法では適用限界周波数まで精度良く計算することができる。また、ピアノ音の生成においては、弦とハンマーとの接触・離脱を取り扱う必要があるが、本稿に示した方法で接触力を取り扱うことができ、これによりピアノ音の実時間演奏も可能になる。なお、本稿では、不足減衰の場合の定式化を示したが、臨界減衰および過減衰に対しても同様な取り扱いが可能である。

- [4] B.Bank,L.Sujbert,Generation of longitudinal vibrations in piano strings: From physics to sound synthesis, J.Acoust.Soc.Am. **117**(4),2268-2278(2005).
- [5] 高澤嘉光,楽器における「打・叩・撞」のモード法による解析—ピアノの場合,日本音響学会音楽音響研究会資料 **MA2006-3**(2006).
- [6] 高澤嘉光,楽音生成における物理モデルの数値シミュレーションの誤差について,日本音響学会音楽音響研究会資料 **MA2006-17**(2006).
- [7] Yoshimitsu Takasawa, Numerical Dispersion of finite difference method,J.Acoust. Soc. Am. **120**,3364(2006).
- [8] 高澤嘉光,西口磯春,ピアノ低音弦の非調和度が音色に及ぼす影響について—モード法を用いた物理モデルによる検証—,日本音響学会音楽音響研究会資料 **MA2008-33**(2008).