コンピュータと教育 4－9
（1989. 2. 25）

問題解決法ガイダンスシステム

―― 発見的解法へのアプローチ ――

竹谷　誠*　　中村　直人*　　伊藤　靖**　　寺田　文行**
*拓殖大学　工学部　　**早稲田大学　理工学部

学習者が数学の問題解決を通して学習すべきことを整理すると，問題解決の対象領域の知識と何の問題かを把握する，問題を分析する，方針を立案するなどの問題解決のための戦略的知識の学習がある．とくに後者の戦略的知識の獲得は数学教育からは数学的知性として欠くことのできないものである．

そこでわれわれは問題解決において学習者の戦略の立案をガイドし戦略的知識の獲得を目的とした問題解決法ガイダンスシステムを開発している．

本稿では学習者の戦略的知識の獲得の方法の一つとして学習者の気づいていない戦略を学習者主体の発見により獲得させる教授法を提案する．さらに，高校数学の“式と計算”領域の“因数分解”を対象に発見をガイドする方法と問題解決法ガイダンスシステムの実現を報告する．

A Guidance System for Problem Solving

(Approach to individualized heuristic learning for the student)

Makoto TAKEYA*, Naoto NAKAMURA*, Yasushi ITO**, and Fumiyuki TERADA**

*Faculty of Engineering, Takushoku Univ.
815-1, Tatemachi, Hachioji, Tokyo, 193 Japan
**School of Science and Engineering, Waseda Univ.
3-4-1, Ohkubo, Shinjyuku, Tokyo, 160 Japan

Solving the mathematical problem, it is very important for a student to acquire two kinds of knowledge, i.e. propositional knowledge and strategic knowledge. Especially, the student has to use strategic knowledge in order to recognize the problem contents, to analyze the objectives, and to find out the solving method.
First, this paper presents a guidance system for problem solving from a mathematical educational point of view.
Next, this paper shows how to support heuristic solving methods by deducing backward from the results, which have been obtained by the standard solving method.
As a result, we show an example of resolution into factors in high school education.

1．はじめに

数学教育においてはよく問題解決能力を高めることが必要だといわれている．数学と問題解決とはどのような関係があるか，教育において問題解決の場面で何を教授しなければならないかは重要な課題であり，数学の教育システムを作成する上でも考慮すべきことと考えられる．

そこで本稿では数学教育の観点から学習者の問題解決を分析しそれに基づく教授法を反映した教育システムについて報告する．

最初に数学の問題解決の過程を整理する．図１にその過程を示す．各過程は，まず何の問題であるかを認識し問題を数学の表現（記号・式・グラフ）に記述する問題把握の過程，次にその数学表現された条件から目標への筋道を考察する論理的展開の過程，最後に条件から目標への筋道を記述する論理的記述過程である．さらにそれらの過程に加えて具体的な数や図を用いてそれぞれの展開の予測を立てる具体的思考の過程がある．

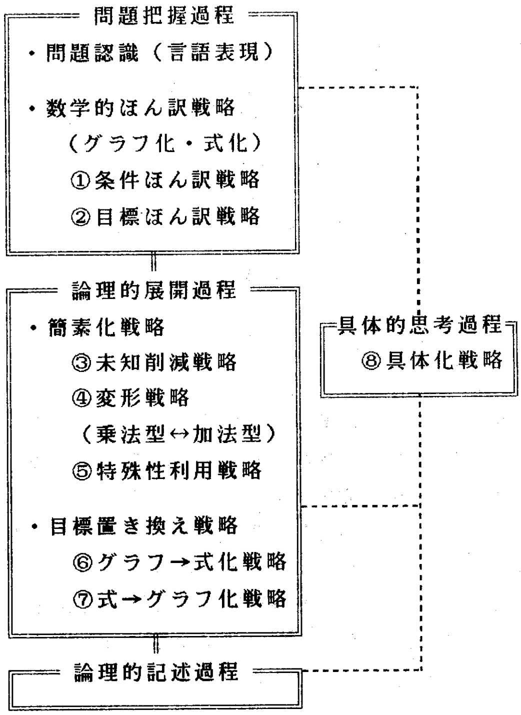

図１．問題解決の過程

各過程において学習者は定義・定理・公式と呼ばれる規則（ルール）を適用して問題解決を図るのである．ここではこの規則を数学的知識とよぶ．ところが問題が複雑・高度になるほどより多くの数学的知識が必要とされ，網羅的に数学的知識を適用していくのではなかなか問題解決に至らない．

そこで，教師など数学のエキスパートの解決法を分析してみると数学では方針と呼ばれる各過程での数学的知識を適応するための意図を持っている．この意図を戦略的知識と呼び，数学教育においてその知識を獲得させることは一般に数学的知性を涵養することの一つと考えられる．図１の①～⑧が問題解決における戦略的知識を統括したものである．

以上の教育的観点から教育システムにおいても数学的知識の教授のみならず戦略的知識の教授を目指すことが必要であると考え，それを目的とした問題解決を支援する教育システムを問題解決法ガイダンスシステムという．

2．戦略的知識の獲得

著者らはこれまでにそのような問題解決の戦略的知識を教授するための学習システム（ＴＨＥ system: Terada Hirose Educational System）を検討してきた[1]．ＴＨＥsystemでは戦略的知識を学習者に表示することでその知識の教授を行なっている．

今回さらに学習者自らが問題解決法を発見することを支援するという立場から学習者の戦略的知識の教授法として以下の２種類の教授法を提案する．

① 与えられた問題に対して解決するための知識が欠落している場合，欠落している知識を教授する．

また学習者がすでに獲得している戦略的知識を出題した問題に対して適用できないあるいは間違えた戦略的知識を適用しようとしている場合，適用のヒントを与える．

② 学習者はすでに獲得している戦略で解決し

ている，あるいは解決可能と推測される場合，さらに未獲得な戦略的知識による他の解法を気づかせ自らの発見による戦略的知識の獲得をさせる．

これらの教授法を人間教師が行なう場合にあてはめ教授に至る要因を考えると，それまでの問題に対する解答の経過と該当問題の解答の過程から学習者の問題解決戦略を推測し，①②の助言を与えている．

これまでの教育システムにおいても①についての教授法は学習者モデルを利用することで人間教師と同様に実現されてきた．②についてはシステムが他の解法のための戦略的知識を教材知識として用意することで学習者にガイダンスする方法も考えられるが，本システムでは教材知識は与えられた教材分野に対する問題を一般に解決可能なだけの知識とし発見的な解法は学習者と同様に獲得しながらガイダンスする方法を考える．

なぜなら，仮に該当の戦略的知識を持っているとしてもその数が増大すると発見的に適切な解法を探索することは困難となる．そこで，１つの解決戦略を手がかりに適切な発見的解法をすばやく見い出し，ガイダンスすることを重要と考えるからである．

３．教授戦略と発見的解法のガイダンス

上述の教育的観点から問題解決法ガイダンスシステムにおける教授戦略（教授法）と学習者の発見についてまとめ，それに基づくとガイダンス方法について述べる．

［教授戦略］

① 学習者の問題解決戦略を第１に尊重する．

② 学習者の解答が進まない場合は，適切な数学的知識の適用を教授する．

③ 学習者の解答過程が正しく，かつそれまでに学習者が保持している以外の発見的解法が考えられる場合はその発見的解法を持つ類題を出題し，発見的解法をガイダンスする．

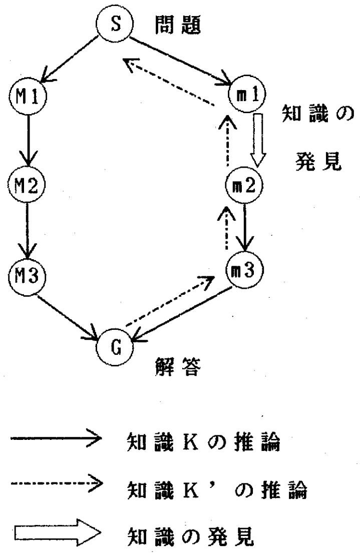

図２．発見的解法の概念

［発見の定義］

学習者が保持している該当分野の戦略的知識と数学的知識の適用では推論不可能な問題を解決したとき，その学習者は発見を行なって問題を解決したという．

すなわち，図２において問題をＳ，解答をＧ，該当分野の知識の集合をＫとしたとき学習者がＳ，ｍ１，ｍ２，ｍ３，Ｇの経路で問題を解決したとする．このときｍ１をｍ２とする知識（推論規則）がＫの要素でない場合この学習者は発見を行なったとし，そのｍ１をｍ２とする推論規則を発見された知識と呼ぶ．

この発見のプロセスは人間が数学の問題を解決する過程でも同様のプロセスを経て，すなわち結果から逆にたどって発見的解法を見い出すという知見にもとづいている．また，数学史からも数々の発見がこのような方法でなされたとも言われている．

なお，この発見された知識が数学において真（正しい知識）であることが必要である．そこで次に発見された知識の真偽の判定について述べる．

［発見の真偽］

数学一般では，発見された知識がすべての数学の定義・定理の要素あるいはそれらから証明可能であればその発見的知識は真であるといえる．このことはシステム上で発見された知識の真偽の判定が困難であることを示している．

なぜならシステムがすべての数学的知識を用意することは困難であるからである．

そこで図２に示したように他のＳ，Ｍ１，Ｍ２，Ｍ３，Ｇという該当分野の知識Ｋを適用した別の真なる解法（一般的解法）が存在する場合に限定して考える．さらに新たな知識の集合としてＧからｍ３，ｍ３からｍ２，ｍ１からＳへの推論を含む知識の集合Ｋ’を加える．するとｍ２からｍ１への推論がＫ’で真であればＳ，Ｍ１，Ｍ２，Ｍ３，Ｇ，ｍ３，ｍ２，ｍ１，Ｓという推論が真となりｍ１からｍ２への推論が真であることが判定できる．

すなわち，発見の真偽は他の一般的解法による解答と一般的解法の逆の推論規則を含む知識により真偽を判定することが可能であることがわかる．

［発見的解法のガイダンス］

学習者の発見の定義とその真偽について述べたが，学習者に図２のｍ２からｍ３への知識あるいはｍ２から続く知識のつながり（方針）を示すことでｍ１からｍ２へ発見をガイダンスすると考える．

４．因数分解ガイダンスシステム

著者らは，まず因数分解を教育対象に取り上げて本問題解決法ガイダンスシステムのフレームワークを固めている．

因数分解ガイダンスシステムは先に述べた学習者に発見的に問題解決戦略を計画させることをガイドするシステムである．因数分解の範囲は高校数学で扱う範囲の因数分解問題である．

学習は，学習者の入力した因数分解の問題に対して４種類のモードにシステムから出題するモードを加え５種類のモードで進行する．

① 解答表示モード

一般的解法による解答の表示．

② 解答照合モード

学習者の計算経過を含む解答の正誤を判定する．またこのモードでは学習者のアドバイス要求に対応するため学習者の戦略を推測することも必要である．

③ ガイダンスモード

一般的解法から発見的解法をアドバイスする．

④ 類題出題モード

学習者と解決した問題と同じ解答手順で解ける問題を出題する．

⑤ 問題出題モード

学習者モデルから学習者が未習あるいは不正確な数学的知識を含む問題をシステムが出題する．

次にシステムの構成，問題解決の教材知識，ガイダンス方法，数式の表現，学習者モデルについて述べる．

なお本システムはprologにて記述されている．

4-1 システムの構成とモジュールの機能

図６に本システムの構成を示す．

①対話インターフェース

学習者からの入力された数式をシステム内部の表現に変換するあるいは逆にシステム内部の表現を数式に変換するモジュール．

②問題解決モジュール

第１の機能としては，学習者から入力された問題（数式）もしくはシステムが学習者に出題した基本教材データ，類題作成モジュールで作成された類題を一般的解法で解くモジュール．その解答はシステム解法ワークメモリに保持される．

第２は，学習者のシステムと異なる解法の正誤を調べるための推論を行なう機能である．因数分解システムでは学習者の解答を展開する推論を行なってその正誤を判定する．

第３は，ガイダンス作成のための解答から問

題へ逆の知識を用いて推論を行なう機能である．因数分解システムでは解答の展開の推論により行なっている．

③教材知識

システムが問題解決モジュールで問題を解くときに適応される知識．詳細な構造は後で述べる．

④解答照合モジュール

学習者の解答とシステムの解答とを照合するモジュール．この結果はガイダンス作成モジュールに伝えられる．

⑤学習者モデル

学習者の知識を表している．詳細は後で述べる．

⑥ガイダンス作成モジュール

先に述べた方法により教材知識を適用して解答照合モジュールで照合できない学習者の解答の正誤および発見的解法の有無を調べガイダンスを決定するモジュール．問題解決モジュールを使用してそれらの推論を行なう．

⑦類題作成モジュール

学習者の解決した問題の類題を作成するモジュール．多項式における文字を数値，他の文字，多項式に変換するなどで類題を作成している．

また，その変換に関する知識は類題作成知識に保持されている．

⑧教授知識

システムのモード変更などの総合的な制御を行なうモジュール．各モードに応じて問題解決モジュール，ガイダンス作成モジュール，類題作成モジュールを起動する．

4-2　教材知識と問題解決

教材知識は，因数分解のための戦略的知識と数学的知識から成っている．

戦略的知識が数学的知識の適用を制限して，効率的に問題解決を行なう．すなわち，戦略知識の下位概念として数学的知識を位置づけている．

戦略的知識（ＳＫ）

　　１文字中心戦略

　　因数定理適用戦略　など

　記述形式

　　ＳＫ（入力式，出力式，［適用条件］，

　　　　　　　　　　［数学的知識］）．

数学的知識

　　因数分解公式

　　多項式の計算　など

　記述形式

　　ＭＫ（入力式，出力式，［適用条件］）．

教材知識の構造を図３に示す．

4-3　ガイダンス方法

因数分解の問題に対してシステムは次の一般的解法と呼ぶ戦略に従い因数分解を実行する．この解法により高校数学範囲の因数分解の問題はすべて解決可能である．

［一般的解法］

戦略０．公式を適用する．

戦略１．文字の置き換えをする．

戦略２．次数に着目して，１文字中心に整理する．

- 1-1.式の中のすべての文字（変数）を取り出す．
- 1-2.各文字に対して単項式中の最大次数を求める．
- 1-3.1-2で求めた次数が最小の文字を中心に降べきの順に整理する．
- 1-4.1-3.の各項の係数が多項式の場合はその多項式を因数分解．
- 1-5.1-4で因数分解された係数についてその共通因数の処理をする．

戦略３．因数定理のあてはめをする．

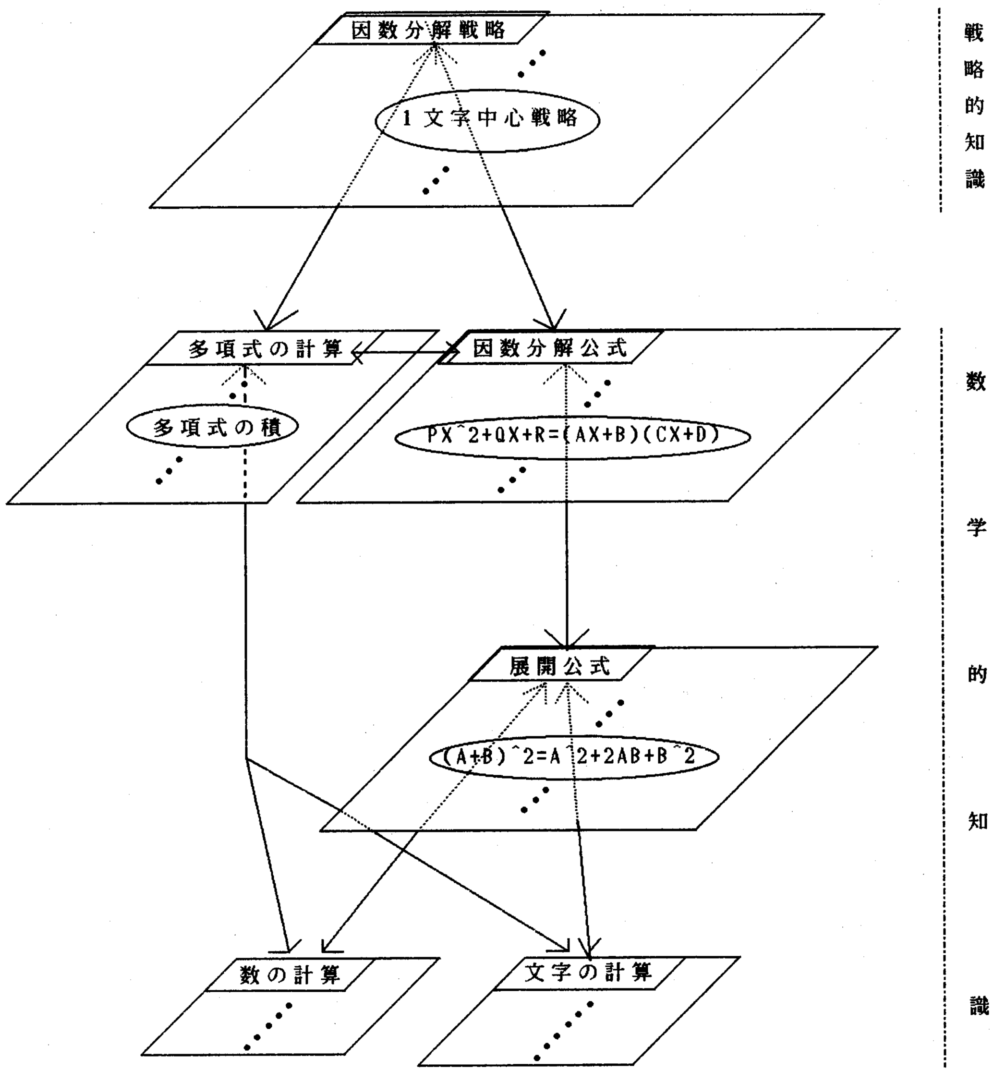

図３．教材知識

ここで一般的解法による解法例を解法１とし，別の解法を解法２とする．

［解法１］

$x^2+y^2-z^2+2xy$

$=x^2+2yx+(y^2-z^2)$

$=x^2+2yx+(y+z)(y-z)$

$=(x+y+z)(x+y-z)$

［解法２］

$x^2+y^2-z^2+2xy$

$=(x^2+2xy+y^2)-z^2$

$=(x+y)^2-z^2$

$=(x+y+z)(x+y-z)$

解法２は学習者がA^2-B^2という公式の適用を意図して意識的に式変形を行なった解答であると考えられる．このような式変形は単純な公式の適

用からは困難であり，学習者のそれまでの経験によるものからA^2-B^2を意図した式変形の発見であると考えられる．このような解法をガイダンスすることを本システムは目的としている．

システムはこの発見的解法を因数分解の逆概念である展開の知識の適用を解答に対して行なう方法で推論する．展開の知識においても因数分解の知識と同様に展開公式を記述した数学的知識と戦略的知識がある．展開の戦略的知識には“共通な式は１文字と見る”という戦略がある．この戦略を適用した展開の解答が因数分解の与式と同値であることから$(x+y)^2-z^2$を経由する解法が推測される．

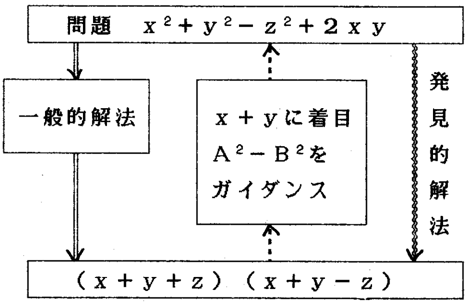

図４．発見的解法のガイダンス手順

この結果をもとに学習者にはA^2-B^2の公式が適用できる式変形があることをガイダンスする．

4-4　数式の表現

学習者から入力された数式（多項式）は，リストの形に変換され，データベースに保持される．

次ぎに，適用される戦略により，数式（多項式）は各項ごとにterm（符号，要素）に，さらに項は各要素ごとにelement（数字，文字など）に変換される．

これらの数式表現は，適用する戦略に応じて変換される．これは，人間が問題を解く際，適用する戦略に応じて数式を変形していくことを意味する．図に，その戦略による表現の違いを示す．

4-5　学習者モデル

数学的知識と戦略的知識は各知識に対する習熟度を数値化したオーバーレイモデルで表す．

さらに発見的解法のアドバイスにより獲得した戦略は，

戦略（式，変形式，［$戦略_1$，‥‥，$戦略_n$］）．

の形式で学習者モデルに随時加えられていく．なおこの形式では発見は式から変形式への変形する戦略を表し，次のリスト表現部は変形後の手順が戦略の列で示されている．

解法２の戦略の例を以下に示す．

戦略（$x^2+y^2-z^2+2xy$，
　　$(x+y)^2-z^2$，［f３］）．

問題：$x^2+y^2-z^2+2xy$

```
data([factor([x,^,2,+,y,^,2,-,z,^,2,+,2,^,1,*,x,^,1,*,y,^,1],1)])
```

解法１

```
data([ factor(
    [ term(+,[e([x],2)]),
      term(+,[e([2],1),
              e([y],1),
              e([x],1)]),
      term(+,[e([<,y,^,1,+,z,^,1,>],1),
              e([<,y,^,1,-,z,^,1,>],1)])
    ], 1 ) ] ).
```

解法２

```
data([ factor(
    [ term(+,[e([<,x,^,1,+,y,^,1,>],2)]),
      term(-,[e([z],2)])
    ], 1 ) ] ).
```

図５．数式表現の例

5．今後の課題

本システムの学習者モデルにおいては発見的に獲得した戦略について個々には保持しているがそれらを一般化して保持していない．今後それらの一般化を行い学習者モデルを構築するシステムに改良する予定である．

さらに，類題の出題方法もこの一般化された学習者モデルを反映した出題方法も検討しなければならない．これも今後の課題である．

［参考文献］

1）中村，竹谷他：数学的知性を涵養するためのコースウェア構成法，教育工学関連学協会連合第2回全国大会．pp.147-148 （1988-8）.

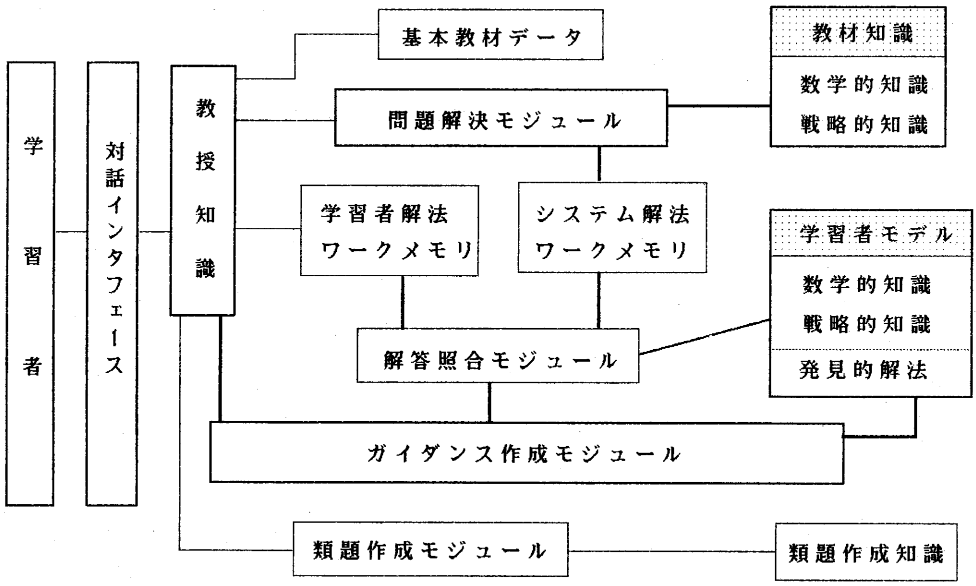

図6．問題解決支援方式ガイダンスシステム概略図