

ファジィ項目関連構造分析による学習者の特性解析

伊藤公紀 大内 東
北海道大学工学部

本稿では各テスト項目に対する正誤反応を1-0の2値パターンで表現し、学習者集団全体に対してのテスト項目全体の関連構造を解析する方法である Airasian & Bart の順序理論や竹谷の項目関連構造分析を含むような拡張的手法を提案する。本稿で提案するファジィ項目関連構造分析法 (Fuzzy Item Relational Structure Analysis: FIRS 分析) は、各学習者の多値的なテスト項目に対する獲得得点データから、個人別にテスト項目間のファジィな達成順序関係を求める。すなわち、本手法は集団のみならず個人に対しても適用可能である。また、これを利用し同質な学習者のクラスターを求め、クラスターを代表するようなファジィな達成順序関係を得ることができる。

Fuzzy Item Relational Structure Analysis for Evaluation of Students by Performance Scores.

Kohki Itoh Azuma Ohuchi
Faculty of Engineering, Hokkaido University

Sapporo, 060 JAPAN

A new method for evaluation to students by performance scores is proposed in this paper. By using the method, researchers can obtain a fuzzy order relation R of every student on the set of test items. Furthermore, the method finds clusters composed of students with the same characteristic by means of a fuzzy clustering technique and can obtain some characteristic of each cluster.

1. はじめに

教育指導の改善を図るための情報収集の一環として、ある基準に従って学習者を分類することがある。特に、テスト項目に対する反応パターンが分類するための情報として採用されることが多い。学習者の理解の程度（テスト項目の獲得得点）は必ずしも教師が認識している学習課題（テスト項目）の難易度順に一致しておらず、このような情報を利用して教師は自らの教授法や学習課題の提示順序等の改善の手掛かりとしたり、あるいは学習者集団の特性を知ることの助けとする。

各テスト項目に対する正誤反応を1-0の2値パターンで表現し、学習者集団全体に対してのテスト項目全体の関連構造を解析する方法は数多く報告されている。例えば、Airasian & Bartの順序理論 [1] や竹谷によって提案された項目関連構造分析 (Item Relational Structure Analysis: IRS 分析 [2]) などがある。

これらは学習者集団全体の平均的特性を得る手法である。通常の場合、分析対象となる学習者集団の各構成員はテスト項目に対する反応が均一であるという保証はなく、むしろ様々な特性を持つ学習者の集合体と考えるのが自然である。このような場合、平均的特性から逸脱するような少数の学習者群は全体の中に埋没してしまい、それぞれの特性にあった指導につなげることが難しい。

また、一般に教師はテスト項目に対して正答か誤答かの2値的な評価ばかりではなく、場合によっては多値的な評価を下す必要がある。このとき、IRS分析等の手法を適用するためには、各テスト項目における学習者の得点を適当なしきい値によって2値化する必要がある。

上述の事柄を考慮し、本稿では各学習者の多値的なテスト項目に対する得点データから、2値化することなしに個人別のテスト項目間のファジィな達成順序関係を得ることができ、さらに各学習者ごとの達成順序関係から集団全体の平均的な傾向及び特性が類似した学習者ごとの傾向を判断するファ

ジィ項目関連構造分析法 (Fuzzy Item Relational Structure Analysis: FIRS 分析) を提案する。本手法は個人の特性を求めめることを基本とするため、集団全体のみならず少数の学習者の特性を記述することも可能である。なお、具体的な指導内容の考察は本稿の範囲外である。

2. 諸定義

本稿で使用する主な概念の定義について記述する。さらに必要なものについてはその都度定義する。

定義 1 (ファジィ集合)

ある集合 X におけるファジィ集合 A とは、帰属度関数 $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ によって特徴付けられた集合である。

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \quad (1)$$

定義 2 (ファジィ関係)

直積 $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ におけるファジィ関係 R とは、 $X \times Y$ におけるファジィ集合 R のことであり、帰属度関数 $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ によって特徴付けられる。

$$R = \int_{X \times Y} \mu_R(x, y)/(x, y) \quad (2)$$

定義 3 (反射的)

R を X 上のファジィ関係とすると、ファジィ関係 R が反射的であるとは、

$$\mu_R(x, x) = 1, \quad \forall x \in X \quad (3)$$

が成り立つことである。

定義 4 (推移的)

R を X 上のファジィ関係とすると、ファジィ関係 R が推移的であるとは、

$$\mu_R(x, z) \geq \max_y \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)\} \\ \forall x \in X, \forall y \in X \forall z \in X \quad (4)$$

が成り立つことである。

定義 5 (ファジィ擬順序関係)

R を X 上のファジィ関係とすると、ファジィ関係 R が擬順序関係であるとは、反射的、推移的の2つの性質を満たす場合である。また、ファジィ擬順序関係を行列表現したものをファジィ擬順序関係行列と呼ぶ。

3. 従来の手法と FIRS 分析の基本的概念

Airasian & Bart の順序理論や竹谷の IRS 分析の基本的な考えは次の通りである。

ある学習者集団 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ の全体的傾向として、テスト項目 t_j の達成のためにはテスト項目 t_i の達成を必要条件としていると仮定する。 t_i と t_j の達成を $t_i = 1, t_j = 1$ 、非達成を $t_i = 0, t_j = 0$ と表記することとすると、 n 人の学習者は表1の 2×2 分割表の a, b, c, d のいずれかに振り分けられる。

表 1: 2×2 分割表

	$t_j = 1$	$t_j = 0$	total
$t_i = 1$	a	b	$a + b$
$t_i = 0$	c	d	$c + d$
total	$a + c$	$b + d$	n

このうち、仮定に矛盾するのは c の組み合わせである。すなわち、易しいはずのテスト項目 t_i を誤答し、難しいはずのテスト項目 t_j を正答する組み合わせである。

Airasian & Bart の順序理論では全体に対する c の割合がある定数 ϵ 以下であるとき、すなわち、

$$\frac{c}{n} \leq \epsilon \quad (5)$$

が成り立つとき順序関係が存在するとしている。

竹谷の IRS 分析ではテスト項目 t_j の達成がテスト項目 t_i の達成を必要条件としていると仮定したとき、仮定に反する c の組み合わせが t_i と t_j が独立なときに生起する割合に比べてどの程度かを算出して

いる。すなわち、

$$\frac{c}{n} \leq \mu \frac{c}{a+c} \frac{c}{c+d} \quad (6)$$

ただし、 μ は $0 \leq \mu \leq 1$ の比例定数である。

これらの手法はいずれも c に該当する学習者数を順序関係の算出に利用している。これを2値論理で表現すると以下の様になる。

2つの命題 P, Q を考える。命題 $P =$ “テスト項目 t_i を達成した” が真であることを $P = 1$ と表わし、命題 P が偽であることを $P = 0$ と表わす。命題 $Q =$ “テスト項目 t_j を達成した” の場合も P と同様である。

P から Q への含意の真理値表は表2の通りである。

表 2: $P \Rightarrow Q$ 真理値表

Pattern	P	Q	$P \Rightarrow Q$
(1)	1	1	1
(2)	1	0	0
(3)	0	1	1
(4)	0	0	1

真理値表の (2) が表1の c に対応する。

従って上述の事柄を多値論理的に拡張を行えば、命題 P, Q が真である度合いを区間 $[0, 1]$ とすることで、Airasian & Bart の順序理論や竹谷の IRS 分析とはほぼ同様な結果を得るような多値データを扱える手法を開発することができる。含意の計算法は種々存在するが Gödel のファジィ含意関数を用いた場合、 P から Q への含意の真理値表は表3の通りである。

また、Airasian & Bart の順序理論や竹谷の IRS 分析は、2つのテスト項目間の順序関係の学習者集団全体についての統計的分析であり、算出された達成順序に沿わないような少数の学習者の反応はノイズ的に扱われている。しかしながら、学習者集団全体についての統計的分析のみでは不都合な場合もある。例えば特性を異にする構成員が同数の小集団が

2つあった場合は、その2つの小集団をまとめた集団全体について分析した結果は両集団の平均的な結果であり、この結果に基づく教育的指導効果は薄いと見える、等である。

表 3: Gödel のファジィ含意関数による $P \Rightarrow Q$ 真理値表

Pattern	$P \Rightarrow Q$
(1) $P \leq Q$	1
(2) $P > Q$	Q

本稿では、一般には学習者集団全体で均一な特性を有するという保証はないことを踏まえ、少数の学習者の反応はノイズではなくむしろ集団の特性の一翼を担うものと考え取り扱う。すなわち、学習者集団をテスト項目に対する反応パターンに応じてクラスターに分割し、小集団ごとに分析を行う。

Airasian & Bart の順序理論や IRS 分析が集団全体の特性を2値データを基に統計的に分析するのに対し、本稿では学習者個人の特性をファジィデータを基にファジィ含意関数を使用して分析し、その後集団の特性の記述に発展させる方法を提案する。

4. FIRS 分析の手続き

本手法の手続きは、以下の流れに従う。

4.1 得点データ行列 E の作成

まず初めに、学習者の各テスト項目に対する得点データのとり得る最大値を1、最小値を0となるように正規化し、その正規化されたデータを成分とする得点データ行列 E を作成する。

得点データ行列 E は、垂直添字集合に学習者集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ を、水平添字集合にテスト項目集合 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ を持つ。

$$E = [e_{ki}] \quad (0 \leq e_{ki} \leq 1, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq m) \quad (7)$$

E の成分 e_{ki} は学習者 s_k のテスト項目 t_i に対する得点を表す。

4.2 ファジィ擬順序関係行列 R_k の算出

一般に、学習者 s_k がテスト項目 t_i に対して低い得点 e_{ki} を示し、 t_j に対して高い得点 e_{kj} を示している場合、学習者 s_k にとっては t_i に含まれている学習課題の達成が t_j に含まれている学習課題を達成することよりも困難であるといえる。

このようなとき、本稿では学習者 s_k は t_i の達成に t_j の達成を必要条件としていると判断する。このとき、学習者 s_k の T 上のファジィ擬順序関係行列 R_k の成分をファジィ論理の含意の値として考え、記号で $(t_i \Rightarrow t_j)_k$ のように表わす。

$$(t_i \Rightarrow t_j)_k = F(e_{ki}, e_{kj}) \quad (8)$$

ここで、 F は Gödel のファジィ含意関数であり次のように定義される。

$$F(e_{ki}, e_{kj}) = \begin{cases} 1 & (e_{ki} \leq e_{kj}) \\ e_{kj} & (e_{ki} > e_{kj}) \end{cases} \quad (9)$$

各学習者について(8)式により含意を計算し、水平および垂直添字集合にテスト項目集合 T をもつ行列 $R_k (k = 1, 2, \dots, n)$ を求める。

$$R_k = [r_{ij}^k] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n) \quad (10)$$

ただし、

$$r_{ij}^k = F(e_{ki}, e_{kj}) \quad (11)$$

定理 1 R_k はファジィ擬順序関係行列である。

(証明) 省略

4.3 学習者の類別化

各学習者のテスト項目の難易度順序が異なる場合、学習者集団全体におけるテスト項目集合上の達成順序関係の決定方法としては、例えば、全体の平均を求める方法等が考えられる。この場合、非常に特殊な特性を持つ少数の学習者の影響を受けたまま判断を下している可能性があり、各学習者の特性を正確に反映していない。このようにして得られた分析結果をもとに教授法の変更を行うことや学習者

集団の特性として捉えるよりも、異なる特性を持つグループが存在する場合にはその存在を浮き彫りにし、各グループごとの特性を明らかにする方が望ましい。

従って本手法では、 R_k を基にほぼ同様な観測結果を有する学習者のクラスターを得て、各クラスターごとにそのクラスターを代表するようなファジィ擬順序関係を決定する。

得点データ行列 E ではなく学習者個人別のファジィ擬順序関係 R_k の成分を基にしてクラスタリングを行うのは、獲得得点の学習者間の偏差の小ささを類似の尺度と考えるのではなく、擬順序関係の相違を類似の尺度として考えているためである。

本手法では Gitman のモード探索法 (mode seeking technique) [1] を用いてクラスター C_p を得る。モード探索法の詳細は省略する。

4.4 ファジィ擬順序関係行列 G_p の算出

同種同質な u_p 人の学習者で構成された C_p に所属する R_k の交わりで得られる行列 G_p を求める。

$$G_p = [g_{ij}^k] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, 1 \leq p \leq q) \quad (12)$$

ただし、

$$g_{ij}^k = \min_k r_{ij}^k \quad k \in C_p \quad (13)$$

定理 2 G_p はファジィ擬順序関係行列である。
(証明) 省略

4.5 ファジィ擬順序関係行列 A の算出

学習者集団全体の特性は次の行列 A によって表わす。

$$A = [a_{ij}] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m) \quad (14)$$

ただし、

$$a_{ij} = F\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{ki}, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{kj}\right) \quad (15)$$

A はファジィ擬順序関係行列である。

なお厳密には等しいものではないが、Airasian & Bart の順序理論や IRS 分析によって得られる結果は、 A を求めることと対応付けられる。

4.6 達成順序の分析

任意のしきい値 α によって R_k, G_p, A を 2 値化し、クリスプな擬順序関係行列 B_k, B_p^G, B^A を作成する。

$$B_k = [b_{ij}^k] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n) \quad (16)$$

$$B_p^G = [b_{ij}^p] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, p \in C_p) \quad (17)$$

$$B^A = [b_{ij}^A] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m) \quad (18)$$

テスト項目をノード、擬順序関係をアークとして有向グラフで表現する。このとき、サイクルが存在する場合はノードを縮約し、さらに推移的リダクション [4] と呼ばれる操作を行い、冗長なアークを取り除き、各ノード間の可到達関係を最も少ないアーク数で表現する。なお、推移的に冗長なアークとは、サイクルのない有向グラフからそのアークを取り除いた部分グラフが元のグラフの持つ可到達性を保つようなアークを指す。以下、本稿では B_k, B_p^G, B^A の有向グラフ表現に対して推移的リダクションを施したグラフをリダクショングラフと呼ぶ。

なお、IRS 分析等で描かれるグラフと共通性を持たせるため、 B_k, B_p^G, B^A の成分 b_{ij} が 1 であるとき、 t_j から t_i へのアークを描く。

リダクショングラフの構造上の特徴から、学習者の学習課題に対する達成状況を判断する。考慮すべき構造には以下の 2 点が挙げられる。

1. 入次数および出次数

リダクショングラフのノード t_i の入次数は t_i を達成するために必要とするノード数を表わす。入次数の高いノードは応用的なテスト項

目であると呼ぶ。逆に入次数の低いノードは初歩的なテスト項目であると呼ぶ。

また、出次数は t_i の達成を必要条件とするノード数を表わす。出次数の高いノードは基礎的なテスト項目であると呼ぶ。逆に出次数の低いノードは発展的なテスト項目であると呼ぶ。

なお、基礎的でかつ応用的なテスト項目や発展的でかつ初歩的なテスト項目という組み合わせは矛盾ではなく有り得る [6]。

2つのグラフ G_a, G_b の i 番目のノードをそれぞれ t_i^a, t_i^b とする。入次数と出次数に注目したときの G_a, G_b の構造上の相違を表わす指標として、入次数と出次数をそれぞれ軸とした2次元平面での対応するノード t_i^a, t_i^b 間のユークリッド距離 $d(t_i^a, t_i^b)$ を用いる。 t_i^a と t_i^b の相違度 D_i ($0 \leq D_i \leq 1$) は (19) 式によって求める。

$$D_i = \frac{d(t_i^a, t_i^b)}{(m-1)\sqrt{2}} \quad (19)$$

また、 G_a と G_b の全体としての相違度 D ($0 \leq D \leq 1$) は (20) 式によって求める。

$$D = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m D_i \quad (20)$$

D_i および D はその値が1のとき相違度が最大で0のとき相違度が最小を表わす。

2. サイクル構造

しきい値 α の時にサイクル構造があるのは、サイクルを形成しているテスト項目同士が α のレベルで等価であることを表わしている。

α を高い値に設定するほど、サイクル構造が得られにくくなる。

5. 適用例

コンピュータ・プログラミング言語の一つである LISP に関するテストを実施した。なお、テスト項目数 $m = 8$ 、学習者数 $n = 18$ である。テストの結果、図1に示すように得点データ行列 E が得られた。

E をもとにファジィ擬順序関係行列 R_k を作成

した。

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
s_1	0.75	0.75	0.50	0.20	1.00	0.60	0.33	1.00
s_2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.60	1.00	1.00
s_3	1.00	1.00	0.50	1.00	0.60	0.00	1.00	1.00
s_4	0.75	0.50	1.00	1.00	0.60	0.60	1.00	1.00
s_5	1.00	0.75	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
s_6	0.75	1.00	0.50	0.00	0.60	0.00	0.33	0.00
s_7	1.00	0.75	0.00	0.00	0.60	0.00	0.00	0.00
s_8	1.00	1.00	1.00	0.20	1.00	0.00	0.33	0.00
s_9	0.75	0.75	0.50	1.00	0.00	0.00	1.00	1.00
s_{10}	1.00	1.00	1.00	0.60	1.00	1.00	1.00	1.00
s_{11}	0.75	0.75	1.00	1.00	0.60	0.60	0.33	0.00
s_{12}	1.00	0.25	1.00	1.00	0.60	0.60	1.00	1.00
s_{13}	1.00	1.00	0.50	0.60	0.60	0.60	1.00	1.00
s_{14}	1.00	1.00	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
s_{15}	1.00	1.00	1.00	1.00	0.60	0.60	1.00	1.00
s_{16}	0.75	1.00	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
s_{17}	1.00	0.75	0.50	1.00	1.00	0.60	0.66	1.00
s_{18}	1.00	0.25	1.00	0.60	0.60	1.00	1.00	1.00

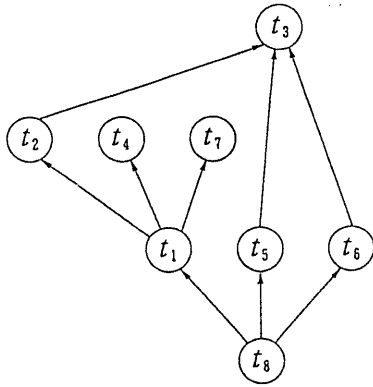
図1 得点データ行列 E

次に、 R_k をもとに Gitman のモード探索法によりクラスターを抽出する。この例では4つのクラスターが抽出された。学習者 s_k のクラスターへの所属は図2に示す。

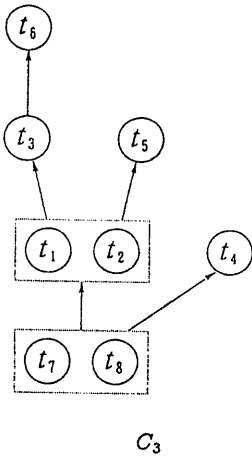
C_1	s_1	s_5	s_{13}	s_{14}	s_{16}	s_{17}
C_2	s_4	s_{11}	s_{12}	s_{18}		
C_3	s_2	s_3	s_9	s_{10}	s_{15}	
C_4	s_6	s_7	s_8			

図2 学習者のクラスターへの所属

クラスターごとにクラスターを代表するファジィ擬順序関係行列 G_p を求め、これらの行列をリダクショングラフで表現した。図3は C_1 と C_3 の場合である。グラフからクラスターに所属する学習者がどのような達成順序を示したかを読み取ることができる。例えば、クラスター C_1 に属する学習者は t_3 を達成するためには t_4, t_7 を除くすべてのテスト項目の達成を必要条件としていることが読み取れる。しかし、 C_3 では t_3 を達成するためには t_6, t_5, t_4 を除くテスト項目を必要としている、等である。また各ノードの次数を見ると、例えば C_1 では初歩的なテスト項目が多いことが伺える (図5)。



C₁



C₃

図3 リダクショングラフ (クラスター)

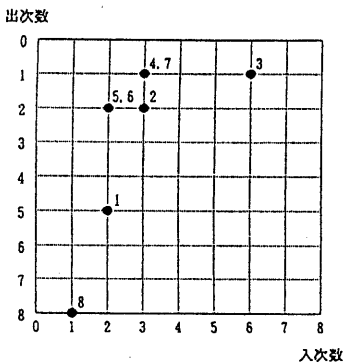


図4 クラスター C₁における項目の特性

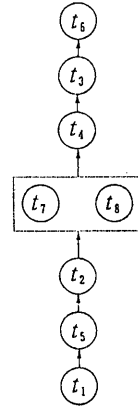


図5 リダクショングラフ (集団全体)

また、学習者の全体的な傾向を表わすファジィ擬順序関係行列 A をもとめ、そのリダクショングラフ表現を図5に表わす。

各ノードの次数を見ると (図6参照)、初歩的かつ基礎的なテスト項目から応用的かつ発展的なテスト項目へとほぼ直線的に並んでいる。

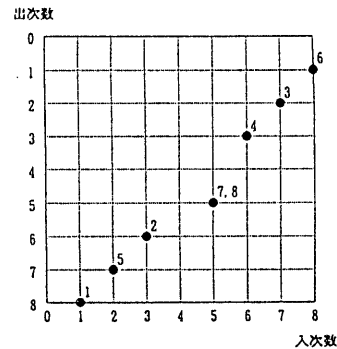


図6 集団全体における項目の特性

IRS 分析と FIRS 分析の比較を (19) 式の D_i および (20) 式の D によって行った。以下は D の結果である。

$$\text{IRS} - C_1 \quad D = 0.27$$

$$\text{IRS} - C_2 \quad D = 0.43$$

$$\text{IRS} - C_3 \quad D = 0.36$$

$$\text{IRS} - C_4 \quad D = 0.32$$

$$\text{IRS} - A \quad D = 0.25$$

IRS グラフ (図7) と A のグラフ表現 (以下、単に A と呼ぶ) は、各項目においては D_2 と D_5 以

外は相違度が比較的低く、全体としても相違度という観点からは IRS 分析と FIRS 分析の結果が似通っているといえる。

それに対し、IRS グラフと各クラスターを代表したグラフ（以下、それぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 と呼ぶ）の相違度は、 C_1 との場合を除いて比較的相違度が高い。

また、サイクル構造は IRS 分析では t_4, t_7, t_8 がサイクルを形成しているのに対し、A では t_4, t_8 がサイクルを形成している。 t_7 は A では IRS 分析の場合と異なり、サイクル要素からはずれているが、それでも t_4, t_8 の直下のレベルに存在している。しかし、各クラスターとのサイクル構造の比較では C_3 以外はほとんど共通性が無い。

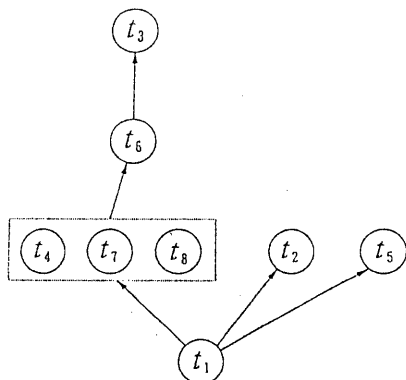


図7 IRS グラフ

集団全体に対する分析に関しては IRS 分析と FIRS 分析はほぼ同様な結果が得られるが、IRS 分析とクラスターごとの FIRS 分析結果は異なる結果が得られていることがわかる。分析対象である学習者集団の特性が未知である場合、特性ごとに小集団に分類し、特に異質である小集団が見つかったならば他とは異なる独自の指導内容を考案する必要があることが示唆される。教師は学習者個人、クラスター、集団全体の3つの単位でのテスト項目間の達成順序情報を得ることができ、以後の指導の基礎資料とすることができる。

5. おわりに

本稿では学習者各個人のテスト項目への多値的反応パターンから、ファジィ含意関数によって個人ごとのテスト項目間のファジィな達成順序関係、すなわちテスト項目集合上のファジィ擬順序関係を算出し、さらにファジィ擬順序関係を基にクラスタリング手法を用いて学習者の類別化を行い、クラスターごとにファジィ擬順序関係を得るテスト項目の特性解析法を提案した。

本手法は学習者の特性に応じた教育的指導に役立たせることが期待できる。

参考文献

- [1] Airasian, P.W. and Bart, W.M.: "A New and Useful Measurement Model", *Educational Technology*, pp.56-60 May, (1973).
- [2] 竹谷誠: "教育評価に利用するテスト項目関連構造分析", *電子通信学会論文誌*, Vol.J62-D, No.7, pp.451-458, (1979).
- [3] 水本雅晴: "ファジィ理論とその応用", サイエンス社, (1988).
- [4] Aho, A.V., Garey, M.R. and Ullman, J.D.: "The Transitive Reduction of a Directed Graph", *SIAM J. Comput.*, Vol.1, No.2, pp.131-137, (1972).
- [5] Gitman, I. and Levine, M.D.: "An Algorithm for Detecting Unimodal Fuzzy Sets and Its Application as a Clustering Techniques", *IEEE Transaction on Computer*, C-19, 7, (1970).
- [6] 新藤茂, 赤堀侃司: "項目協同関連構造 (Item Co-Relational Structure) によるテストの特性解析", *日本教育工学雑誌*, 12(2), pp.37-49, (1988).