

## 幾何データおよび地理データを用いた「問題解決とプログラミング」の教育

森棟 隆一<sup>1)</sup> 蓮沼 賢<sup>1)</sup> 川崎 宣昭<sup>2)</sup> 川口 修治<sup>3)</sup>  
山崎 謙介<sup>1,3)</sup> 平山 征二郎<sup>4)</sup>

1) 東京学芸大学大学院教育学研究科 2) 筑波大学附属高等学校  
3) 東京学芸大学教育学部 4) 住商エレクトロニクス株式会社

[概要]本稿では幾何データを利用した幾何的最適配置問題の解決を例にしてデータ構造とアルゴリズムを学ぶ教材を提案する．一般に幾何学的なデータ処理を含む問題の解決は困難であるが、C++のクラスライブラリであるLEDAを利用することで数値誤差や位相構造の誤判定から逃れることができ、問題の解決を容易にし、さらにはプログラミング教材として教材化も可能になる．問題解決の手順を詳細化し、副問題の解決を通して計算幾何学の基礎を学ぶ教材を提案する．

[キーワード] 情報教育 幾何および地理データ処理 計算幾何学 LEDA

An educational module of Problem-solving and Programming for IT education:  
With examples of geometric and geographic data processing

Ryuichi MORIMUNE<sup>1)</sup> Satoshi HASUNUMA<sup>1)</sup> Nobuaki KAWASAKI<sup>2)</sup>  
Syuji KAWAGUCHI<sup>3)</sup> Kensuke YAMAZAKI<sup>1,3)</sup> Seiji HIRAYAMA<sup>4)</sup>

- 1) Graduate School of Education, Tokyo Gakugei University
- 2) Attached High School of Tsukuba University
- 3) Dept of Education, Tokyo Gakugei University
- 4) Sumisyo Electronics Co., Ltd

[Abstract]We propose an educational module for problem-solving and programming for IT education. The specific domain of data is in geometric and geographic fields. Optimization of facility location has been dealt with for understanding algorithms of computational geometry and optimization. The LEDA (Library of Efficient Data types and Algorithms) has been utilized for developing the educational modules. The strategy of the education system is featured in that problem are resolved into smaller or sub-problems which are more easily accessible and more resolvable.

[Keywords] IT education, Geometrical and Geographical Data Processing,  
Computational Geometry, LEDA

## 1 . はじめに

近年,カーナビゲーションシステムや ITS(Intelligent Transportation System)などに代表される地理情報システム (GIS : Geographic Information System) の普及に伴い,地理データあるいは幾何データを用いた情報の処理はますます重要になってきている . しかしながらこれら进行处理の際に切っても切り離せない幾何学的なデータ処理を含む問題は,一般にアルゴリズムとプログラミングの間のギャップが大きく,解決は困難であることが多い .

そこで本稿では,様々なデータ構造や誤差なし計算を平易に実現できる C++のクラスライブラリ LEDA を用いて,空間オブジェクト (施設など) の最適配置問題を例にして,問題解決の方略を示した . さらにその問題解決の手順を副問題へと分割し,計算幾何学を理解するためのプログラミングを教材例として提案する .

## 2 . 幾何情報処理の難しさ

幾何学的な問題を計算機で処理する際の難しさは“ 当たり前のことが当たり前のこととして成り立たない ” ことがあり,以下のような問題を引き起こす .

- ・ 数値誤差による位相構造の誤判定
- ・ 予期しない縮退による処理の破綻

最初の例としては,「 2 本の直線の交点はもちろん両方の直線上にあるが,この当たり前のことが計算機上では常に成り立つとは限らない . 」 [1] などである . また「 位相構造の縮退の有無を判定するためには数値計算が必要だが,そこに誤差が入り込む . さらに小さな数値誤差による位相の誤判定が生じるのは縮退が生じているときか,それに近い状況のときである . 」 [2] とあるようにこの 2 つの問題は互いに絡み合って生じる . これらの問題点を解消するには, 当たり前のことが当たり前のこととして扱える,す

なわち幾何的性質を優先した位相優先法があるが,アルゴリズムは難解でコード化は容易ではない . 別の問題解消の方法としては,誤差なし計算ができるデータタイプを用意することであり,本稿で紹介する LEDA (レダ,またはリーダーと読む) は有理数型のデータタイプや任意の長さをもつ整数型を用意することで数値誤差の問題を解決している . また位相構造が縮退するような場合でも,処理が破綻しない関数が用意されている .

## 3 . LEDA とその特長

LEDA (Library of Efficient Data types and Algorithms の略) はドイツのマックスプランク研究所で開発された C++のクラスライブラリで,アルゴリズムとプログラムの差を縮め,複雑なアルゴリズムも簡単に実装できることを目標に開発された . LEDA の特長をいくつか挙げると,

- ・ 豊富なデータ構造と制御構造が用意されているため,アルゴリズム記述との差が少なく,分かりやすいプログラムが書ける .
- ・ 制限桁数なしの整数型や,有理数型が扱えるので,計算誤差による影響を最小限にできる .
- ・ 点,線,面などのデータ型が用意されるなど,幾何オブジェクトの表現が豊富で,数値データの入出力の扱いと同様にして,計算結果を視覚的に表示することが容易である .

## 4 . なぜ最適配置問題か

本稿ではプログラミング教育の教材として幾何データ処理を扱い,その例としては施設の最適配置問題を取り上げているが,それは以下のような理由からである .

- ・ 結果を可視化でき,楽しい教材であること (動機付けという点からも有効である)

- ・ バグがあると、すぐにわかること  
(これも可視化できることによる恩恵である)
- ・ 現実世界に即した問題であること
- ・ 計算幾何学の基礎となる多くの問題を含んでいること
- ・ すでに学んだ(であろう)ソートなどのアルゴリズムを実際に応用できる場面が多数あること
- ・ 時代の要請により幾何学的なデータ処理を扱う機会が増えていること

## 5. 最適配置問題解決の方略と教材化

ここでは Voronoi 図を利用して施設の最適配置を決定する方略を示し、詳細化の過程を教材化する。

### 5.1 Voronoi 図とは

平面上に指定された  $n$  個の異なる点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  の集合を  $S$  とする。2 点  $P, Q$  の距離を  $d(P, Q)$  で表す。平面上の点  $P$  で、 $S$  に属する点のうち、最も近いものが  $P_i$  であるという性質を持つものをすべて集めてできる領域を  $V(P_i)$  とおく。すなわち

$$V(P_i) = \{P \mid d(P, P_i) < d(P, P_j), i \neq j\}$$

である。ここで  $V(P_i)$  を点  $P_i$  の Voronoi 領域という。平面全体は  $n$  個の Voronoi 領域に分割される。この Voronoi 領域の集合全体を集合  $S$  に対する Voronoi 図という (Fig.1)。

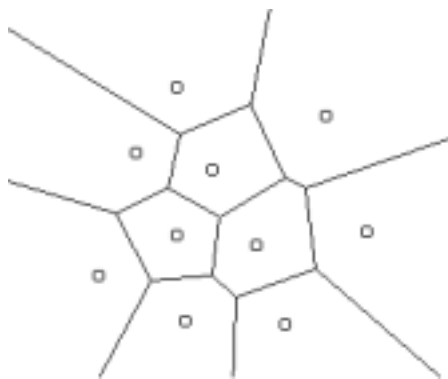


Fig.1 Voronoi 図の例

### 5.2 最適配置問題とは

例えば、「ある市における選挙投票所を考えたとき、その地域の住民は必ずしも最も近い投票所で投票を行っているわけではない。これは行政上の便宜上の都合であったりする。Fig.1 の Voronoi 図の母点を選挙投票所としたとき、次の図 (Fig.2) で斜線部分は、最も近い投票所へ行けない地域の分布を表したものである。このような領域に住む住民の数をできるだけ少なくするには投票所をどのように配置したらよいか。」などの問題がある。

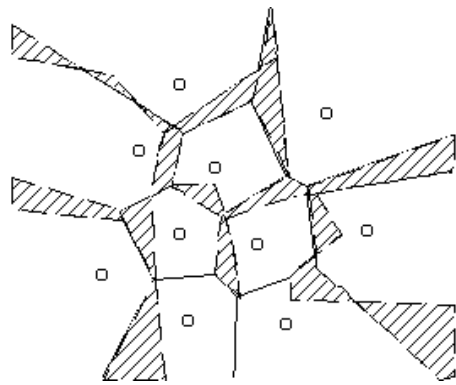


Fig.2 投票所 ( ) を母点とした Voronoi 図と実際の投票区の食い違い (斜線部分)

### 5.3 地理的最適配置問題解決の方略

母点  $P_i$  に対する Voronoi 領域を  $V(P_i)$ 、母点  $P_i$  を利用する実際の利用者の地域を  $A(P_i)$  とする。コスト関数を (Voronoi 図と実際の投票区との食い違いの面積)  $\times$  (そこでの人口密度) すなわち

$$f = \int_S |V_i \cap A_j| d\mu$$

( $\mu$  は共通部分  $V_i \cap A_j$  における重み)

としてコスト  $f$  を極小にするように Voronoi 母点を移動させ、(局所)最適配置を求める。簡単のためここでは  $\mu$  が一定の一様分布として考え、食い違い部分の面積を極小にする母点(投票所)の配置を考える問題を定式化する。とこ

ろが,この問題はコスト関数を ( Voronoi 図と実際の投票区との共通部分の面積 ) × ( そこの人口密度 ) すなわち

$$g = \int_S |V_i \cap A_i| d\mu$$

と書き換えることで次のように換言できる . 「コスト  $g$  を極大にするように Voronoi 母点を移動させ, ( 局所 ) 最適配置を求める .」

#### 5.4 副問題への分割と教材化の例

一般に問題解決は Fig.3 のような 4 つのフェーズで表現できる .

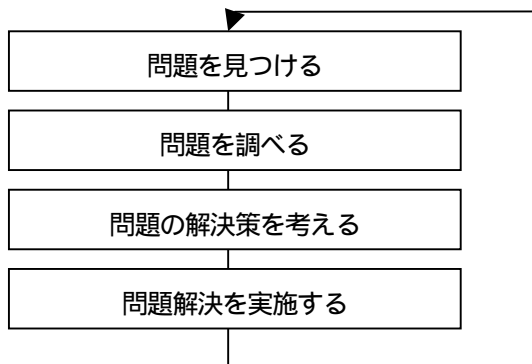


Fig.3 問題解決の過程

大岩[4]は「よいプログラムを作るにはそれが何のためのプログラムかはっきりさせてから文章化し,目的の詳細化を繰り返していく」と述べている。よいプログラミング作成へと導くには問題解決の過程をきちんと辿ることが重要である。そこで,最適配置を求めていく過程を詳細化し,副目標を立て,副問題を設定した。以下はその教材例である。なお詳細化を行う際には,各問題が計算幾何学の基礎となる考え方を含むようにすることを心がけた。これら詳細化を行った副問題は初等・中等教育段階では達成されるべき主要な課題としても取り上げることができるであろう。筆者ら[5]は別報にて, Voronoi 図の作成について取り上げた。また以下に示した例題が計算幾何学のどのような内

容を含んでいるか,LEDA に用意されている関数を利用するとどの程度簡単に記述できるかもあわせて述べる。

[地理的最適配置を求める課題の詳細化例]

詳細化の第 1 段階は与えられた点集合から Voronoi 図を生成することである。以下は Voronoi 図を構成するための副問題である。

[副問題 ]

$n$  個の点から Voronoi 図を構成するプログラムを作成しなさい。

[副々問題 -1]

3 つの点から Voronoi 図を構成するプログラムを作成しなさい。

[副々問題 -2]

-1 で作成した Voronoi 図に 1 点を追加して Voronoi 図を更新しなさい。

別報[5]では,効率の悪い Voronoi 図作成の方法を示した。初等・中等教育段階では素朴な方法で提示することは教育的には意味があると考えているが,高等教育段階では計算量についても留意する必要があるであろう。それは計算幾何学においても計算量という概念を用いてアルゴリズムの良し悪しを判定するからである。Voronoi 図を構成するプログラムで効率が良いのは逐次添加法や分割統治法(再帰二分法とも言う)といわれており,平均  $O(n \log n)$  の手間で計算ができるという。上で示した副々問題 -1,2 は副問題を逐次添加法によって Voronoi 図を構成しようと目指した詳細化である。LEDA では Voronoi 図の計算は関数  $Voronoi()$  が用意されており,平均  $O(n \log n)$  の手間で計算できる。

詳細化の第 2 段階は副問題 で求めた Voronoi 領域と現実の領域との交わりを求めることである。それを示したのが以下の副問題である。

[副問題 ]

各母点の Voronoi 領域の境界と現実の境界との共通部分を描画しなさい。

[副々問題 -1]

各母点の Voronoi 領域の境界と現実の境界をなす  $m$  個の端点をリストに格納し、 $x$  座標の小さいものから順に並べなさい。

[副々々問題 -1- ]

Voronoi 領域をなす点のリストに対してその点集合の凸包を求めなさい

副問題 は主に平面走査法に関わる問題である。平面走査法は幾何的問題に特有のアルゴリズムであり、平面上に与えられた対象物に対して  $y$  軸に平行な仮想的な走査線を左から右に移動させ検査を行い、対象物と走査線の位置関係から交点の情報などを報告するアルゴリズムである (Fig.4)。

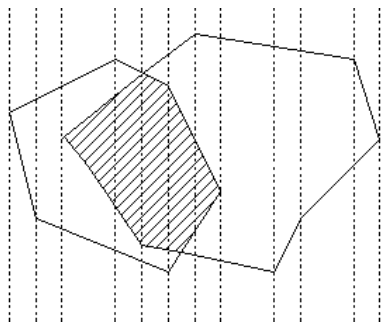


Fig.4 平面走査法によって多角形の交わりを求める

実は副々々問題 -1- の問題であるが、LEDA には CONVEX\_HULL\_S() としてすでに関数が用意されている。深いレベルの詳細化の実現は LEDA が請け負ってくれるので、問題解決の本線から外れることなく考えを進めていけるのは LEDA の強みである。多くの幾

何学的な問題は凸包構成問題に帰着させることができるので、凸包は計算幾何学を理解する上では必要不可欠な概念である。しかし凸包について学ばせるべきことは非常に多いので、別の機会に学ばせることが適当と考えた。

以下の副問題 は前問 で求めた共通部分の面積を求める問題である。

[副問題 ]

各母点の Voronoi 領域の境界と現実の境界との共通部分の面積を求めなさい。

[副々問題 -1]

$y$  軸に垂直な直線で  $m+1$  個の領域に分割し、それぞれの領域での共通部分の面積 (台形になる) を求め、合計しなさい。

副問題 -1 はすでに副問題 -1 で平面走査法を行った際に領域は台形に分割されている。(Fig.4 の斜線部分は  $y$  軸に平行な直線によって 5 つの台形に分割されているのがわかる。) これとは別の方法で多角形の面積を求めることもできる。多角形をなす点のリストが反時計回りに読み込まれていれば、その多角形の面積は重みつき面積として求められる。LEDA では重みつき面積は Polygon.area() という関数で用意されている。

そして最後に共通部分の面積が極大になるように母点の配置を求めて処理が完了する。

[副問題 ]

各母点に着目し、微小な移動をさせたとき、最も食い違いの面積の減少する方向と変化量を求めなさい。

母点を移動すると Voronoi 図が更新されるので現実の境界との共通部分も更新される。副問題 ~ までの手順を繰り返し行い、コスト関数を評価する。コストの値が閾値以下になったら処理を停止させる。停止したときの点配置が局所最適解の場所となる。

## 6. まとめ

LEDA の用意する豊富なデータ型, データ構造や制御構造のおかげで, コード化する際の計算誤差や位相の誤判定といった困難を避けられるのは, プログラマにとって作業を容易にし, 問題解決の本質を見失わずに済む. それにより本稿で示したような複雑なアルゴリズムも実装が可能になる. やはりアルゴリズムの理解には, プログラムを実装し実行してみることが必要である. また幾何的なプログラミングのよさとしては, バグのあるプログラムは当然, 可視化機能が作動せず, 間違いだとすぐにわかること, また正しく実装され, 結果が可視化されれば誤りを見つけやすくなることである. プログラミング教育では人間が命令して要求どおりに計算機を動かす能力を身に付けさせなければならないが, 本稿で扱った幾何学的な問題解決を含むプログラミング教育の教材例はその能力のみならず, プログラミングの面白さまで伝えることのできる教材になったのではないかと考えている.

## 7. 謝辞

本研究にあたり, 北陸先端科学技術大学院大学の浅野哲夫先生には LEDA を紹介していただき, いろいろとご指導をいただきました.

## 8. 参考文献等

- [1] 浅野哲夫・小保方幸次, LEDA ではじめるプログラミング セミナー資料 住商エレクトロニクス 2001
- [2] 杉原厚吉, FORTRAN 計算幾何プログラミング 岩波書店 1998
- [3] 岡部篤行・鈴木敦夫, 最適配置の数理 朝倉書店 1992
- [4] 大岩 元, 初等・中等教育におけるコンピューター 情報処理学会研究会報告書 1988-CE-1 コンピュータと教育 1988

- [5] 森棟 隆一・蓮沼 賢・平井祐佳里・川崎宣昭・山崎謙介, 情報教育における「問題解決とプログラミング」の一例題 ~ Voronoi 図を用いた最適施設配置問題 ~ 情報処理学会研究会報告 2001-CE-59 pp.61-67 コンピュータと教育 2001