折線近似による接続の表示

村上 洋平†　宮田 昌近‡

† 金沢工業大学大学院システム設計工学専攻 〒921-8501 石川県野々市町扇が丘 7-1
‡ 金沢工業大学基礎教育部 〒921-8501 石川県野々市町扇が丘 7-1
E-mail: ‡ m-miyata@neptune.kanazawa-it.ac.jp

あらまし　簡単な例について詳しく説明した後これを一般化すれば，本質を直観的に理解させ易いと思われる．また，内容を絞ることによって理解できたか否かを評価し易い．ここではリーマン幾何における測地線の概念をまず球面で説明し，これを一般化することを例として，簡単な例から始めることの有効性を主張する．

キーワード　教材，座標曲線，接ベクトル，接続

Segment-Chain Approximation of Connection

Youhei MURAKAMI†　Masachika MIYATA‡

{ †, ‡ } Kanazawa Institute of Technology　7-1 Ohgigaoka, Nonoichi, Ishikawa, 921-8501 Japan
E-mail: ‡ m-miyata@neptune.kanazawa-it.ac.jp

Abstract　It seems effective to explain simple examples in detail before teaching general theory.　This paper shows such a example to teach what geodesic is, starting from that on sphere.

Keyword　Educational material, Coordinate curves, Tangent vector, Connection

1. まえがき

大学の大衆化が進んだ現在，正確さ・厳密さは多少犠牲にしても本質を分かり易く理解させる教材の検討が重要である．このためには

(1) なるべく簡単な具体例を用いて

(2) 記憶に残り易い式や図を示す

ことが有効であると思われる．簡単な例を理解することによって本格的に学ぶ動機付けを行うことができれば所期の目的を達したと考えてよい．

提案についても具体例を示すことが主張とも合致するので，本稿では２次元の曲面上の２点を結ぶ最短経路である測地線の概念を理解させるための教材を示す[1]．簡単のため，本文は教材に記載するような表現をそのまま用いる．

2. 予備考察

簡単な例として球面上の２点を結ぶ測地線を考える．これは２点と球の中心を含む平面と球面の共通部分である大円上にあることはよく知られている．しかし，単なる例にすぎない球面以外の滑らかな曲面にも同様に適用できる説明でなければ意味がない．この点に留意し，次の曲面について説明する．

３次元ユークリッド空間内の点を (x, y, z) とし

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{N}u\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}v\right)$$

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{N}u\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}v\right)$$

$$z = \sin\left(\frac{\pi}{N}u\right)$$

で表わされる図１の曲面 S を考える（図は $N = 16$）．

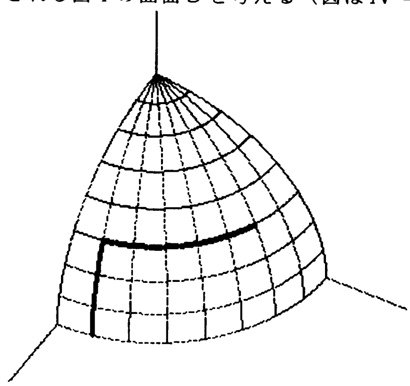

図１．曲面 S 上の経路

u，vの座標曲線をそれぞれ経線，緯線とよび，以下ではuが整数のときの緯線と，vが整数のときの経線を考え，これらの座標曲線の交点を格子点とよぶ．

S上の点(u, v)の位置ベクトルを$\boldsymbol{p}(u, v)$とする．

例えば

$$\boldsymbol{p}(3,1)=\left(\cos\frac{3\pi}{N}\cos\frac{\pi}{N},\ \cos\frac{3\pi}{N}\sin\frac{\pi}{N},\ \sin\frac{3\pi}{N}\right)$$

である．点$(3, 1)$で接するようにSを平面上において経線に沿って平面上を転がすと，平面上に転写される経線は直線となる．また，緯線に沿って転がすと転写される緯線は円弧となる．図１の太い曲線を平面上に転写したときの概略の形は，図２のように格子点を通る座標曲線で囲まれる部分を台形で近似して平面上に並べることによって想像できる．

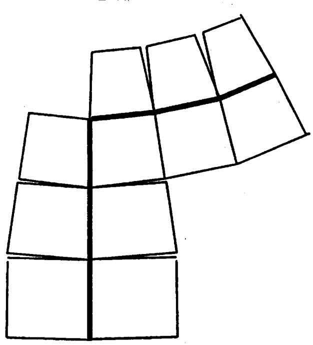

図２．平面上への近似展開

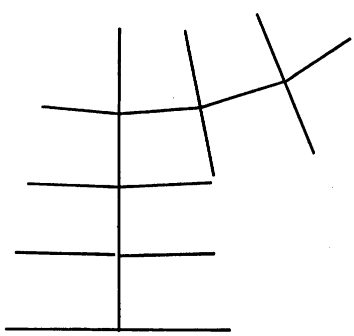

図３．座標曲線の折線近似

図２は微分幾何の式と対応させにくいが，太い曲線の近傍の座標曲線も表示されているため，もとの曲面の曲がり具合を台形の隙間から直感的に理解できる．このため図１の太い曲線を正確に転写した場合にも近傍の座標曲線を転写し，さらに格子点間を直線で結んで座標曲線を省略した図３のような折線近似を考える．図の左右に枝分かれした座標曲線にさらに上下に枝分かれする座標曲線を付加すると，図２の台形の隙間に対応したズレを表示できる．

3. 座標曲線の近似

転写の様子を式で表わすために，まず曲面S上の点(a, b)におけるベクトル

$$\boldsymbol{p}_u(a, b)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{p}(a+h, b)-\boldsymbol{p}(a, b)}{h}$$

$$\boldsymbol{p}_v(a, b)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{p}(a, b+h)-\boldsymbol{p}(a, b)}{h}$$

を計算すると

$$\boldsymbol{p}_u(a,b)=\frac{\pi}{N}\left(-\sin\frac{\pi a}{N}\cos\frac{\pi b}{N},-\sin\frac{\pi a}{N}\sin\frac{\pi b}{N},\cos\frac{\pi a}{N}\right)$$

$$\boldsymbol{p}_v(a,b)=\frac{\pi}{N}\cos\frac{\pi a}{N}\left(-\sin\frac{\pi b}{N},\ \cos\frac{\pi b}{N},\ 0\right)$$

となる．$\boldsymbol{p}_u(a,b)$は$v=b$の経線に接するベクトルでこの経線を含む平面内にあり，$\boldsymbol{p}_v(a,b)$は$u=a$の緯線に接するベクトルでこの緯線を含む平面内にある．始点を(u,v)に置いたベクトル$\boldsymbol{p}_u(u,v)$，$\boldsymbol{p}_v(u,v)$を含む平面を点(u,v)における接平面という．平面に転写するということは，接平面の向きを揃えてつなぎ合わせることを意味するが，つなぎあわせ方を正しく理解するための「曲線に沿った平行移動」の意味は説明が分かりにくい．そこで本質は損なっていないと思われる次のような説明を提案する．

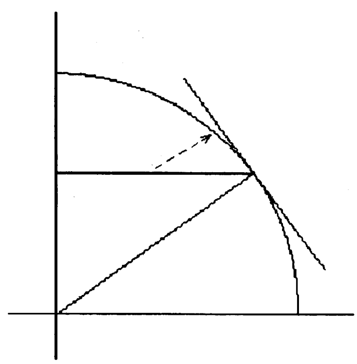

図４．緯線の接平面への射影（断面図）

点 $(3,1)$ における $\boldsymbol{p}_u(3,1)$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{p}_v(3,1)$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ とする．転写される平面のどの点でも $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ の大きさ，方向は一定にしなければならない．$\boldsymbol{p}(3,1)$ から $\boldsymbol{p}_u(3,1)$ の方向に向かう直線はこの点を通る大円の射影であり，緯線の接平面への射影はこの直線に接する楕円である．図４から分かるように，接点における楕円の曲率は緯線の曲率の $\sin(\pi u/N)$ 倍であり，この値は緯線上では一定であるから緯線に沿って転写すると射影は円弧となる．

一般の場合は上記のように曲率が一定になることは期待できないので，次のように扱う．$\boldsymbol{p}(u,v)$ を転写した点を $\boldsymbol{q}(u,v)$ として，点 $\boldsymbol{q}(a,b)$ の近傍で

$$\boldsymbol{q}(a,b+v)=\boldsymbol{q}(a,b)+\boldsymbol{q}_v(a,b)v+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{vv}(a,b)v^2$$

と２次の近似を行うと

$$\boldsymbol{q}_v(a,b)=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{q}(a,b+1)-\boldsymbol{q}(a,b-1)\}$$

$$\boldsymbol{q}_{vv}(a,b)=\{\boldsymbol{q}(a,b+1)-\boldsymbol{q}(a,b)\}-\{\boldsymbol{q}(a,b)-\boldsymbol{q}(a,b-1)\}$$

が得られる（$\boldsymbol{q}_{uu}$ は $\boldsymbol{q}_u$ の偏導関数）．したがって図５のように格子点の射影を結ぶ線分を描いておけば，滑らかな座標曲線だけでなく接ベクトルやその微分も容易に想像できる．目標として設定した測地線の意味も，図５の平行四辺形が線分になる場合として説明できる．

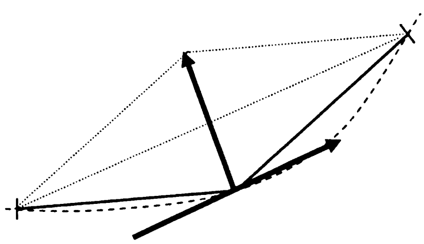

図５．２次の近似ベクトル

格子点 (u,v) に対して $\boldsymbol{q}(u,v)$ を正確に求めようとすると計算量が膨大になる．このため (u,v) の接平面に $\boldsymbol{p}(u\pm1/2,v\pm1/2)$ を射影した四辺形を用いて接続方向の辺を共有するように平面上に並べていく近似を考える．図２と似ているが，格子点を転写する位置が求まれば直接格子点間を線分でつなぎ，四辺形は表示しない．曲線が滑らかであれば（図１の場合十分に N を大きくすれば）誤差は小さく，少なくとも

$$\boldsymbol{p}(a+1,b)=\boldsymbol{p}(a,b)+\boldsymbol{p}_u(a,b)$$

$$\boldsymbol{p}(a,b+1)=\boldsymbol{p}(a,b)+\boldsymbol{p}_v(a,b)$$

のような格子点で直交する事態は避けられる．

なお，座標曲線そのものの式でなく，座標曲線（の射影成分）が満たすべき微分方程式（の近似式）が与えられたときは，修正オイラー法を用いればよい[3]．例えば図５の $\boldsymbol{q}(a,b+1)$ の位置は $\boldsymbol{q}(a,b)$ から $\boldsymbol{q}_v(a,b)$ の方向に $1/2$ 進み，そこから $\boldsymbol{q}_v(a,b+1)$ の方向に $1/2$ 進んだ点で近似される．

4. 補足

前記の「転写」は専門用語ではない．微分幾何では，まず「曲線に沿った平行移動」の意味を定義し，１次独立なベクトルを曲面上の各点に平行移動した平行ベクトル場によって曲がり具合を説明する．参考までに前記の説明と通常の説明の対応を以下に述べる．

前節では座標曲線しか考えなかったが，一般の曲線では t をパラメータとした $\boldsymbol{p}(u(t),v(t))$ のような形で考えねばならない．一般の接ベクトル

$$X=\xi^1\boldsymbol{e}_1+\xi^2\boldsymbol{e}_2$$

の $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{p}_u=\dfrac{\partial}{\partial u}$，$\boldsymbol{p}_v=\dfrac{\partial}{\partial v}$ の１次結合で表わされる微分作用素として扱われる．曲線 $\boldsymbol{p}(u(t),v(t))$ の各点で接ベクトル $X(t)$ が与えられているとき，$X'(t)$ の接平面成分を共変微分といい，共変微分がつねに 0 であるとき $X(t)$ は $\boldsymbol{p}(u(t),v(t))$ に沿って平行であるという．

前節のように $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を平面上に並べた図を想定しなくても，各接平面でどのように表わされるかが分かればよく，図で表わすときは (u,v) を２次元ユークリッド空間の点と考え，そこでの $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ から $\boldsymbol{p}_u$，$\boldsymbol{p}_v$ を想像することになる．

$\boldsymbol{q}(u,v)$ は転写される平面上の位置ベクトルであるが微分幾何では用いられない．$\boldsymbol{p}_u$，$\boldsymbol{p}_v$ は接平面内にあるので，$\boldsymbol{q}_u=\boldsymbol{p}_u$，$\boldsymbol{q}_v=\boldsymbol{p}_v$ である．$\boldsymbol{p}_u$，$\boldsymbol{p}_v$ の長さや角度は内積によって定められる．図１の場合

$$\langle\boldsymbol{p}_u,\boldsymbol{p}_u\rangle=\left(\frac{\pi}{N}\right)^2$$

$$\langle\boldsymbol{p}_v,\boldsymbol{p}_v\rangle=\left(\frac{\pi}{N}\cos\frac{\pi u}{N}\right)^2$$

$$\langle\boldsymbol{p}_u,\boldsymbol{p}_v\rangle=0$$

である．

微分幾何では接ベクトル場に対応し微分形式がよく用いられる．例えば１次微分形式 $\varphi = fdu + gdv$ と接ベクトル場 $X = \xi \dfrac{\partial}{\partial u} + \eta \dfrac{\partial}{\partial v}$ の積は

$$\langle \varphi, X \rangle = f\xi + g\eta$$

で定義される．形だけでは分かりにくいが

$$\left\langle du, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = 1 \neq du \frac{\partial}{\partial u}$$

である．接ベクトルは作用素として表わされているが使いたい性質はベクトル本来の方向と大きさであることが

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,\ \ \xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$
$$= \xi \frac{\partial f}{\partial u} + \eta \frac{\partial f}{\partial v}$$

からも推察される．

前節の最後に「微分方程式（の近似式）が与えられたとき」は接続形式が与えられたときを想定している．曲面上で接ベクトル Y を X だけ移動したときの接ベクトルを $Y + \nabla_X Y$ で表わしたとき，∇ が接続であるということは所定の条件を満たす線形作用素であることを意味している．線形であるから１次独立な接ベクトルに対して，これを変換する係数を示せばよい．１次独立な接ベクトルとして $\boldsymbol{p}_u$，$\boldsymbol{p}_v$ を用いると，図５のような曲がり具合が分かり易い．

5. むすび

簡単な例について詳しく説明し，その後で一般の場合について述べる教材の具体例を示した．最初の例はなるべく「これは理解できた」という具体的な目標（本稿では測地線）があることが望ましい．

文　献

[1] 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何，裳華房，東京，1977 (1995 改訂 23 版).

[2] 志賀浩二，ベクトル解析３０講，朝倉書店，東京，1989.

[3] 川崎晴久，C&FORTRAN による数値解析の基礎，pp.209-214，共立出版，東京，1993.