

画像処理におけるメディアンフィルタ特性の解析

An Analysis of Median Filtering Properties
for Image Processing

鳥生 隆 後藤 俊行 山本 栄一郎

Takashi Toriu Toshiyuki Goto Eiichiro Yamamoto

(株式会社 富士通研究所)

(FUJITU LABORATORIES LTD.)

Abstract— This paper describes a method to analyze the statistical properties of median filtering. The formula is derived from the co-occurrence matrix and the differential histogram of the median filtered image, and can estimate the effect of the noise reduction processing in an image with white noise. It is shown that the theoretical results are consistent with the experimental results.

Key words — Median filter, noise reduction, image processing, edge detection, co-occurrence matrix, differential histogram.

1. まえがき

メディアンフィルタはJ.W.Tukey¹⁾によって提案されて以来、デジタル信号処理における信号平滑化の手段として音声²⁾³⁾や画像⁴⁾⁵⁾の前処理に利用されるようになった。特に、画像処理では、メディアンフィルタがステップ状の信号を保持しインパルス性の雑音を除去することからそれを輪郭抽出の前処理(エッジ検出)として幅広く活用している。

しかし、画像の輪郭は対象の品質によって抽出条件が変化するため、メディアンフィルタの利用に際しては、対象画像に対するメディアンフィルタの処理効果を適切に評価し、メディアンフィルタのサイズやエッジ検出の閾値等のパラメータを最適化する必要がある。

こうした各種パラメータの決定は、これまで試行錯誤的に行われていたが、最適解あるいは画像に対する正当な効果を見出しづらいため、近年では理論面からの研究も推進されるようになった。

この研究成果としてフィルタの特性を決定論的⁶⁾⁷⁾あるいは確率的⁸⁾⁹⁾な手法によって説明した報告があるが、い

れも、輪郭抽出に対するパラメータの最適化を説明するにいたっていない。

このような背景を踏まえ、筆者らは画像中のエッジを検出できる割合(有効検出確率)を定義することで、対象画像の品質、メディアンフィルタのサイズとエッジ検出の閾値の関係をとらえ、それによって各種パラメータの最適解を算出する手法を提案する。

以下本稿では基本的な考え方を紹介した後、理論的解析結果ならびに実験結果について述べる。

2. 基本的考え方

一般に画像の輪郭はメディアンフィルタによる雑音除去、微分フィルタによるエッジ群の抽出、エッジ群の統合等の処理を経て抽出される。図1はこれら一連の処理における各種パラメータを表したものであるが、メディアンフィルタでは形状とサイズ、エッジ検出では形状、サイズおよび閾値、統合では統合係数等がパラメータとなる。統合係数はエッジ群から輪郭を生成する際に必要となるエッジの

存在確率を意味するものであり統合方式ごとに固有の値が設定される。これに対しメディアンフィルタとエッジ検出は相補的な関係にあり、パラメータの最適解はパラメータ間の関係式として求められる。

そこで筆者らは図2に示す論理に従ってメディアンフィルタとエッジ検出のパラメータを最適化する方法を考案した。ここでは、まず画像の品質を分散で表現し、これによりメディアンフィルタ処理後の画像の同時生起行列、差分統計量を推定することで有効検出確率を算出する。つぎに有効検出確率と統合係数をもとにしてメディアンフィルタの形状、サイズおよびエッジ検出の閾値の関係を求めるとともに、その関係式よりパラメータの最適解を算出する。

なお、今回の検討は一律な濃度を持つ画像の中に対象物

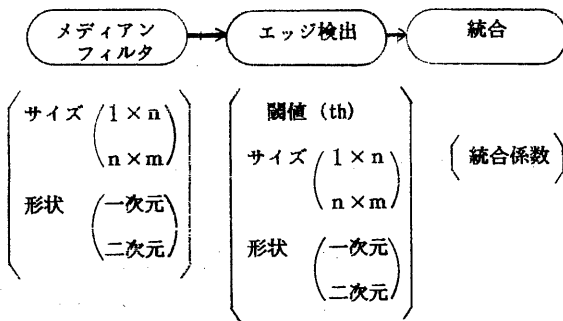


図 1 輪郭抽出パラメータ

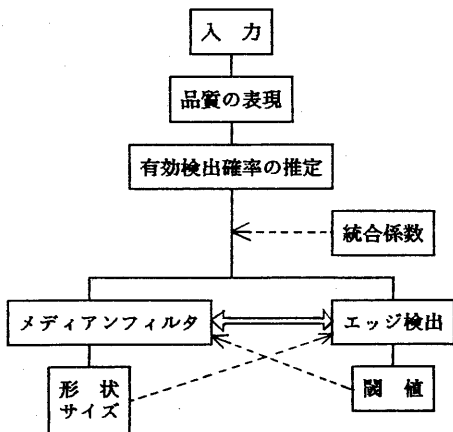


図 2 パラメータの最適化

が孤立して存在していることを前提とし、画像中の雑音は白色雑音を、またエッジは対象物の最外側にあると仮定した。

3. 理論的解析

3.1 解析の手順

本解析の基本はメディアンフィルタを通した後の画像に対して、その中に存在するエッジが検出できる確率を推定することにあるが、最初に、画像に対するメディアンフィルタの効果を推定する理論式を導き、その後、その式よりメディアンフィルタとエッジ検出の各種パラメータ間の関係をとらえることで有効検出確率を算出する。

ところで、メディアンフィルタはエッジ検出の前処理として位置付けられるものであり、メディアンフィルタの処理効果を推定するにあたっては、特にエッジ検出との関連を表現できる式の導出が好ましい。そのためここでは、まずメディアンフィルタ処理後の画像に対して異なる二つの画素の濃度の関係を表現する同時生起行列を求め、つぎに同時生起行列をもとに濃度差(微分フィルタの出力)の分布を統計的に表現する差分統計量を導く。

3.2 同時生起行列

白色雑音をもつ画像中の各画素濃度の確率密度関数を $P(\mu)$ と定義する。このとき、メディアンフィルタ処理後の画像において、異なる二つの画素の一方の濃度が μ と $\mu + d$ 間の値をとり、他方が ν と $\nu + d$ 間の値をとる確率は次のようにして求められる。

メディアンフィルタの総画素数を $2n+1$ とし、注目する二つの画素上にそれぞれメディアンフィルタの中心を置いた時に重畳しない部分の面積を $2k$ とする。またこの二つのメディアンフィルタの出力がそれぞれ μ と $\mu + d$ 、 ν と $\nu + d$ 間の値をとる確率を $P_c(\mu, \nu; n, k) d \mu d \nu$ とする。この確率は $P(\mu)$ に従って分布する $2n+1$ 個の確率変数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n+k}, \mu_{2n+k+1}, \dots, \mu_{2n+1}$ のうち $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots,$

…、 μ_{2n+k} の中央値が ν と $\nu + d$ の間の値をとる確率を算出することによって求まる。このとき同時確率密度を表現する同時生起行列 $P_c(\mu, \nu; n, k)$ は、 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ のいずれかが二つのフィルタに共通した出力となる場合 (case I) とそれ以外の場合 (case II) とに分けられ、それぞれの確率密度関数を $P_c^I(\mu; n, k)$ および $P_c^{II}(\mu, \nu; n, k)$ で表現したとき、

$$P_c(\mu, \nu; n, k) = P_c^I(\mu; n, k) \delta(\mu - \nu) + P_c^{II}(\mu, \nu; n, k) \quad (1)$$

となる。

CASE I

$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ 、 $\{\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_{2n+1}\}$ 、 $\{\mu_{2n+2}, \mu_{2n+3}, \dots, \mu_{2n+k+1}\}$ のそれぞれの変数の組において、変数が μ 未満 ($-\infty \sim \mu$)、 μ に等しい (μ)、 μ を越す ($\mu \sim \infty$) 値となる個数を表 1 のように設定したとき、その確率密度は、

$$\frac{k!}{q_1! r_1!} \times \frac{(2n-k+1)!}{q_1! r_1!} \times \frac{k!}{q_1! r_1!} \times P(\mu) \times \left(\int_{-\infty}^{\mu} P(\lambda) d\lambda \right)^{q_1+q_2+q_3} \times \left(\int_{\mu}^{\infty} P(\lambda) d\lambda \right)^{r_1+r_2+r_3} \quad (2)$$

表 1 変数の個数 (case 1)

	$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$	$\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_{2n+1}$	$\mu_{2n+2}, \mu_{2n+3}, \dots, \mu_{2n+k+1}$
$-\infty \sim \mu$	q_1	q_2	q_3
μ	0	1	0
$\mu \sim \infty$	r_1	r_2	r_3

表 2 変数の個数 (case 2)

	$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$	$\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_{2n+1}$	$\mu_{2n+1}, \mu_{2n+2}, \dots, \mu_{2n+k+1}$
$-\infty \sim \mu$	q_1	q_2	q_3
μ	s_1	s_2	s_3
$\mu \sim \nu$	t_1	t_2	t_3
ν	u_1	u_2	u_3
$\nu \sim \infty$	r_1	r_2	r_3

となる。ただし、

$$q_1 + r_1 = k \quad q_3 + r_3 = k$$

$$q_2 + r_2 + 1 = 2n - k + 1 \quad (3)$$

である。この時、 μ が二つのフィルタの中央値となるのは、

$$q_1 + q_2 = n \quad r_2 + r_3 = n \quad (4)$$

の場合である。したがって、 $P_c(\mu; n, k)$ は (2) 式において条件式 (3)、(4) を満足するすべての負でない整数 $q_1 \sim q_3, r_1 \sim r_3$ についての和をとることによって求まる。

$$P_c^I(\mu; n, k) = (k!)^2 (2n+k-1)! P(\mu) \times \sum_{\substack{q_3 \geq 0, r_1 \geq 0 \\ q_3 + r_1 = k}} \frac{1}{(q_3!)^2} \times \frac{1}{(r_1!)^2} \times \frac{1}{(n-q_3)!} \times \frac{1}{(n-r_1)!} \times \left(\int_{-\infty}^{\mu} P(\lambda) d\lambda \right)^{n+q_3} \times \left(\int_{\mu}^{\infty} P(\lambda) d\lambda \right)^{n+r_1} \quad (5)$$

CASE II

$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ 、 $\{\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_{2n+1}\}$ 、 $\{\mu_{2n+2}, \mu_{2n+3}, \dots, \mu_{2n+k+1}\}$ のそれぞれの変数の組において、変数が μ 未満、 μ に等しい、 μ と ν の間、 ν に等しい、 ν を越す値となる個数を表 2 のように設定した時の確率密度は

$$\frac{k!}{q_1! s_1! t_1! u_1! r_1!} \times \frac{(2n-k+1)!}{q_2! s_2! t_2! u_2! r_2!} \times \frac{k!}{q_3! s_3! t_3! u_3! r_3!} \times P(\mu) P(\nu) \times \left(\int_{-\infty}^{\mu} P(\lambda) d\lambda \right)^{q_1+q_2+q_3} \times \left(\int_{\mu}^{\nu} P(\lambda) d\lambda \right)^{t_1+t_2+t_3} \times \left(\int_{\nu}^{\infty} P(\lambda) d\lambda \right)^{r_1+r_2+r_3} \quad (6)$$

となる。ただし、

$$q_1 + s_1 + t_1 + u_1 + r_1 = k$$

$$q_2 + s_2 + t_2 + u_2 + r_2 = 2n - k + 1$$

$$q_3 + s_3 + t_3 + u_3 + r_3 = k \quad (7)$$

である。μがμ₁, μ₂, ..., μ_{2n₁}、νがμ_{k+1}, μ_{k+2}, ..., μ_{2n_k}の中央値であるためには、

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= n & u_1 &= 0 \\ s_1 + s_2 &= 1 & u_2 + u_3 &= 1 \\ s_3 &= 0 & r_2 + r_3 &= n \end{aligned} \quad (8)$$

でなければならない。したがって、Pc(μ, ν; n, k)は条件式(7)、(8)を満足するすべての負でない整数q₁ ~ q₃、s₁ ~ s₃、t₁ ~ t₃、u₁ ~ u₃、r₁ ~ r₃についての和をとることによって求まる。

$$\begin{aligned} Pc(\mu, \nu; n, k) &= (k)! (2n-k+1)! P(\mu) P(\nu) \\ &\times \sum_{\substack{0 \leq t_1+t_2+t_3 \leq k-1 \\ q_3 \geq 0, r_1 \geq 0 \\ q_3+r_1=k}} \frac{1}{t_1! t_2! t_3! r_1! q_3!} \times \\ &\frac{1}{(k-t_3-q_3)! (k-t_1-r_1)! (n-k+t_3+q_3+1)! (n-k+t_1+s_1+1)!} \\ &\times \left(\int_0^\mu P(\lambda) d\lambda \right)^{n-q_3} \times \left(\int_\nu^\mu P(\lambda) d\lambda \right)^{t_1+t_2+t_3} \times \left(\int_\nu^\infty P(\lambda) d\lambda \right)^{n+s_1} \end{aligned} \quad (9)$$

3. 3 差分統計量の推定

メディアンフィルタ処理後の画像において、互いに近接する2点の濃度差がλとλ+dλ間の値をとる確率Pd(λ)

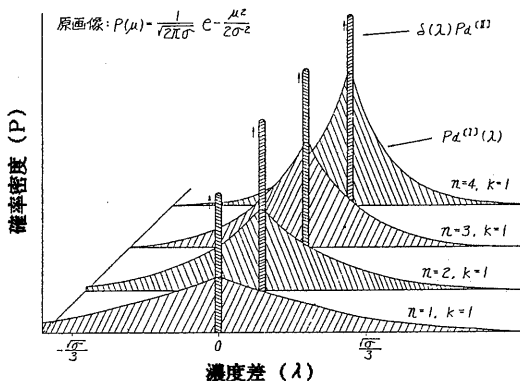


図3 差分統計量

; n, k) は、Pc(μ, ν; n, k)をμν平面上の直線ν-μ=λ上で積分することで得られる。すなわち、濃度差がλである確率密度を表現する差分統計量は、

$$Pd(\lambda; n, k) = \int_{-\infty}^{\infty} Pc(\mu, \mu + \lambda) d\mu \quad (10)$$

である。この(10)式は同時生起行列が二つの部分から構成されていることに対応して二つの部分の和で表される。

$$Pd(\lambda; n, k) = P^I d(n, k) \delta(\lambda) + P^{II} d(\lambda; n, k) \quad (11)$$

ここで

$$\begin{aligned} P^I d(n, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} Pc(\mu; n, k) d\mu \\ P^{II} d(\lambda; n, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} Pc(\mu, \mu + \lambda; n, k) d\mu \end{aligned} \quad (12)$$

である。

図3は画像の濃度を正規分布とし、メディアンフィルタの形状を3×1~9×1に設定した時の隣接2点間の差分統計量である。図3において、原点で突出している部分はδ関数を表現しているが、この特異性はメディアンフィルタに特有のものであって、メディアンフィルタ処理後の画像は隣接する二点が同じ濃度を持つ傾向があることを示している。

3. 3 有効検出確率の推定

有効検出確率はメディアンフィルタ処理後の画像に対して水平または垂直方向に微分フィルタ処理をほどこしたときに、走査開始点から輪郭までのすべての画素における微分値が閾値以下である確率を計算すれば求まる。例えば、微分された画像の画素値の分布が画素毎に独立であるとし、微分フィルタの形状を-1 1、-1 0 1に設定したときの

有効検出確率 $P_a(th, n, l, k)$ は次式で求まる。

$$P_a(th, n, l, k) = \left(\int_{-\infty}^{th} P_d(\lambda; n, k) d\lambda \right)^l \quad (13)$$

ここで、 $2n+1$ はメディアンフィルタの総画素数、 l は走査開始点から輪郭までの距離、 $2k$ は $-1 \ 0 \ 1$ の微分フィルタを用いる場合は隣接2点に、 $-1 \ 0 \ 1$ の微分フィルタを用いる場合は2画素はなれた2点にそれぞれメディアンフィルタの中心を置いたときの重畳しない部分の画素数である。

有効検出確率は th, n, l, k に依存するとともに、処理前の画像の濃度の確率密度関数 $P(\mu)$ に依存する。 $P(\mu)$ が正規分布 $N(m, \sigma)$ である時は、有効検出確率は th, n, l, k, σ の関数となるが、これを $P_a(th, n, l, k, \sigma)$ で表すと

$$P_a(c \cdot th, n, l, k, c \cdot \sigma) = P_a(th, n, l, k, \sigma) \quad (14)$$

となる性質がある。この性質は理論のスケール不変性から導かれるが、これにより処理前の画像の濃度が正規分布の場合には、一種類の σ の値に対してのみ有効検出確率を算出するだけで式 (14) より他の σ に対する有効検出確率も直ちに算出できる。

4. パラメータの最適化

4.1 パラメータ間の関係

統合係数 Pr と微分フィルタの走査開始点から輪郭までの画素数の最大値 l_0 が与えられると、エッジの統合を可能とする条件は、

$$Pr \leq P_a(th, n, l_0, k) \quad (15)$$

となる。

メディアンフィルタと微分フィルタの各種パラメータは、この条件を満足する範囲で設定しなければならない。

4.2 最適閾値の推定

メディアンフィルタの形状、サイズが設定されている時

は、式 (11) を満たす th の最小値が最適閾値となる。すなわち、メディアンフィルタのサイズを $n=n_0$ とし、微分フィルタの形状によって定まる k の値を k_0 とすれば、最適閾値は、

$$Pr = P_a(th_{opt}, n_0, l_0, k_0) \quad (16)$$

を満足する th_{opt} になる。

図4は濃度が正規分布を示している画像に対し、メディアンフィルタの形状を 3×1 、微分フィルタの形状を $-1 \ 1$ に設定した時の有効検出確率とエッジ検出の閾値の関係を示したものである。式 (16) を満たす th_{opt} はこの図を利用することにより求まる。

4.3 最適サイズの推定

輪郭抽出の対象となる物体と背景との濃度差の最小値が既知である場合、すなわち、画像中の輪郭点における濃度の微分値の取り得る範囲が既知である場合は、エッジ検出の閾値は輪郭点における微分値以下の値 th_0 に設定しな

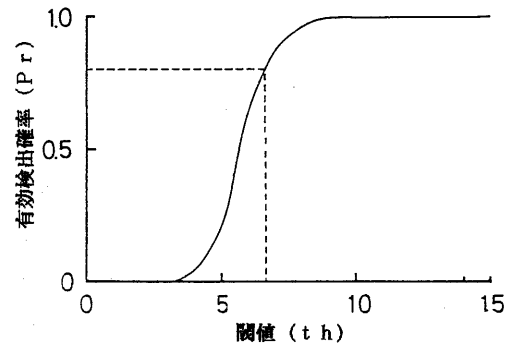


図4 最適閾値の推定方法

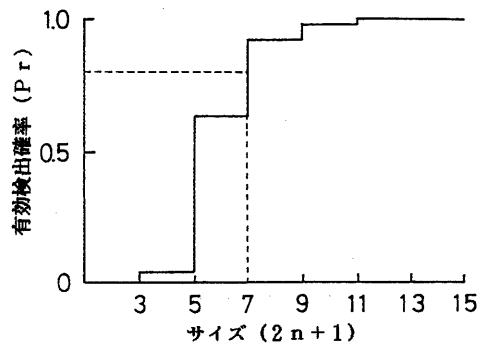


図5 最適サイズの推定方法

ればならない。

この時、メディアンフィルタの形状およびサイズは、

$$Pr \leq Pa (th_0, n, l_0, k) \quad (17)$$

を満たす範囲で設定される。

図5は微分フィルタの形状が-11である場合に、有効検出確率と一次元メディアンフィルタのサイズとの関係を示したものであり、最適サイズ n_{opt} は式(17)を満たす最小の n として推定される。

5. 実験

5.1 実験データ

実験データとしては白地の上質紙をテレビカメラで観測した画像(256×256×8ビット)を用いた。図6は実験データの濃度分布であるが、本データは平均濃度248.3、標準偏差3.4であり、ほぼ正規分布の濃度分布を持つ。

図7はデータの自己相関関数であるが、画素間の濃度の相関が小さいことを示している。

5.2 差分統計量

図8は一次元メディアンフィルタ3×1~7×1による処理後の差分統計量である。図8(a)は水平方向、図8(b)は垂直方向にフィルタを走査したときの隣接した二画素間の値である。ここで理論値は原画像の濃度分布から式(11)、(12)を用いて算出したものであるが、濃度レ

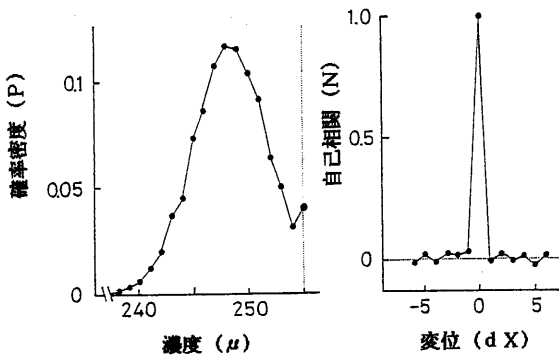
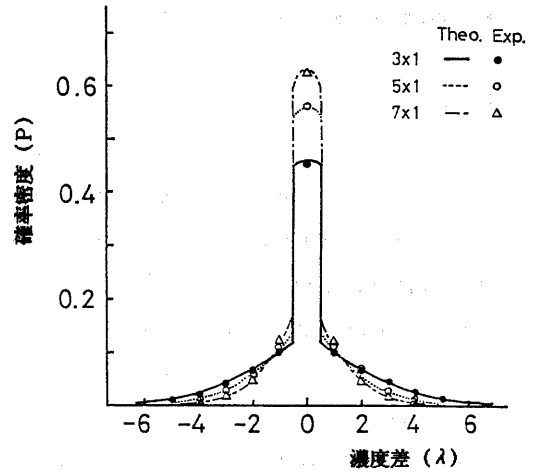
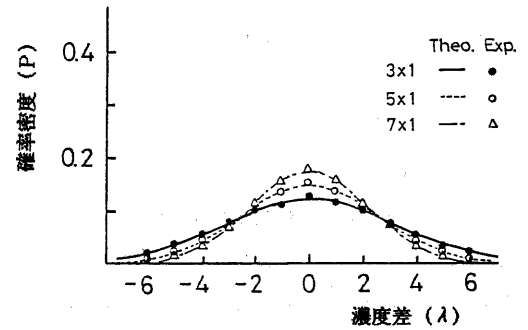


図6 原画像の濃度分布

図7 原画像の自己相関



(a) 水平方向



(b) 垂直方向

図8 メディアンフィルタ処理後の差分統計量(一次元)

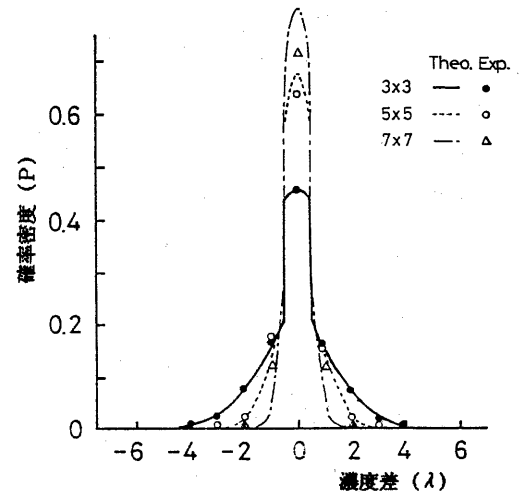
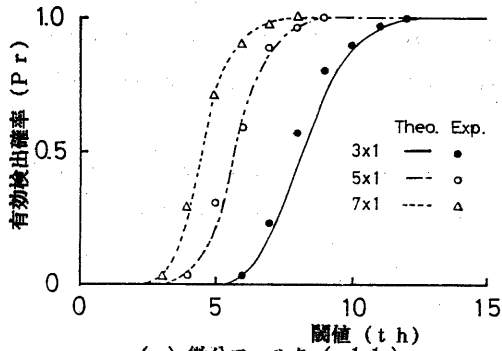
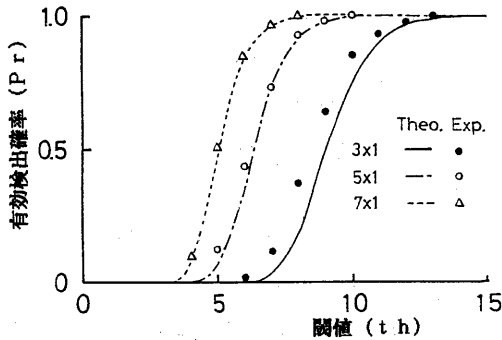


図9 メディアンフィルタ処理後の差分統計量(二次元)

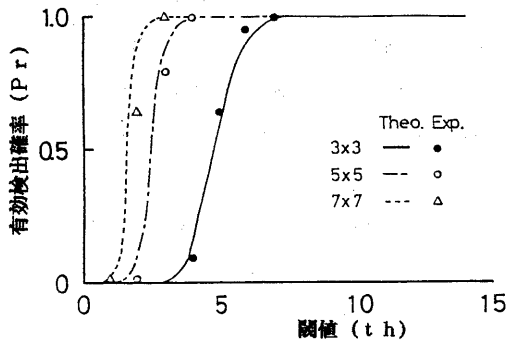


(a) 微分フィルタ (-1 1)

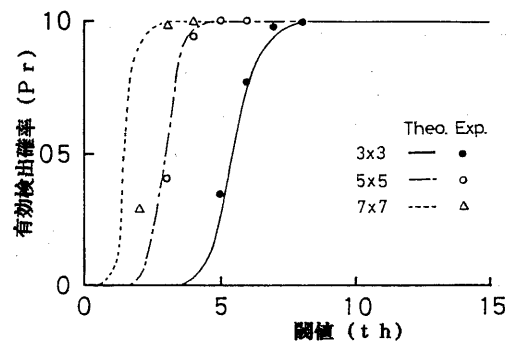


(b) 微分フィルタ (-1 0 1)

図10 有効検出確率と閾値の関係 (一次元)



(a) 微分フィルタ (-1 1)



(b) 微分フィルタ (-1 0 1)

図11 有効検出確率と閾値の関係 (二次元)

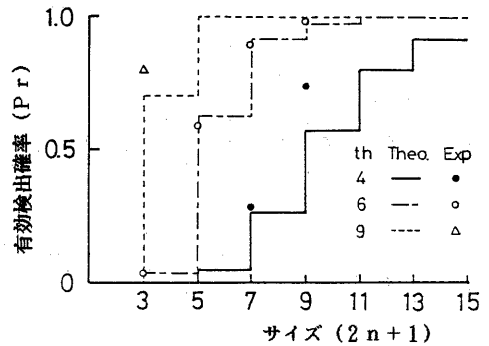
ベルがデジタル化されていることを考慮し、理論値を幅1で平均化してある。

図9は二次元メディアンフィルタ $3 \times 3 \sim 7 \times 7$ の差分統計量である。

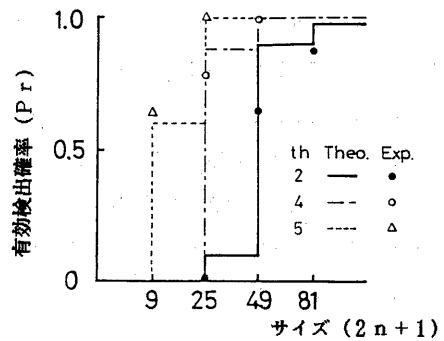
5.3 有効検出確率

図10と図11は微分フィルタを $-1 1$ 、 $-1 0 1$ に設定したときに、一次元および二次元メディアンフィルタのサイズ変化に伴うエッジ検出の閾値に対する有効検出確率である。

一方、図12はエッジ検出の閾値を変化させたときのメディアンフィルタのサイズに対する有効検出確率である。



(a) メディアンフィルタ (一次元)



(b) メディアンフィルタ (二次元)

図12 有効検出確率とサイズの関係

表3は微分フィルタの形状を $-1 0 1$ に設定したときの最適パラメータに関し、実験値と理論値を比較したものである。表3 (a)はメディアンフィルタのサイズを $3 \times 1 \sim 7 \times 1$ としたときの最適閾値、また、表3 (b)はエッ

ジ検出の閾値を4~8としたときの最適サイズである。

これらの結果より、理論値および実験値は比較的良好であり、輪郭抽出における最適パラメータの設定に本方法が有効であることを確認した。

表3 最適パラメータ

(a) 最適閾値

サイズ	3×1		5×1		7×1	
	理論	実験	理論	実験	理論	実験
0.9	10.3	10.1	7.3	7.2	5.9	6.0
0.8	9.4	9.1	6.7	6.7	5.3	5.4
0.7	9.0	8.6	6.2	6.4	4.9	4.9

(b) 最適サイズ

閾値	4		6		8	
	理論	実験	理論	実験	理論	実験
0.9	13	11	7	7	5	5
0.8	11	11	7	7	5	5
0.7	11	9	7	7	5	5

5. むすび

本稿では原画像の濃度分布からメディアンフィルタ処理後の画像の差分統計量を推定する理論式を導出した。さらに、有効検出確率と統合係数によりメディアンフィルタのサイズとエッジ検出の閾値を最適化する方法を提案した。

また、実験により、差分統計量および有効検出確率を推定する理論式の正当性を検証するとともに、最適パラメータの推定に本方法が有効であることを確認した。

謝辞

日頃御指導いただく棚橋部長、吉田室長に深謝する。

参考文献

1) T. W. Tukey, "Nonlinear (nonsuperposable) methods for smoothing data", in Conf. Rec., 1974

1) T. W. Tukey, "Nonlinear (nonsuperposable) methods for smoothing data", in Conf. Rec., 1974 EASCON, p. 673.

2) L. R. Rabiner, M. R. Sambur, and C. E. Schmidt, "Applications of a nonlinear smoothing algorithm to speech processing", IEEE Trans., vol. ASSP-23, pp. 552-557, 1975.

3) N. S. Jayant, "Average- and median-based smoothing techniques for improving digital speech quality in the presence of transmission error", IEEE Trans., vol. COM-24, pp. 1043-1045, 1976.

4) W. K. Pratt, "Digital image processing", New York, NY, Wiley-Interscience, 1978.

5) B. R. Frieden, "A new restoring algorithm for the preferential enhancement of edge gradients", J. Opt. Soc. Amer., vol. 66, pp. 280-283, 1976.

6) N. C. Gallaghe and G. L. Wise, "A theoretical analysis of the properties of median filter", IEEE Trans. vol. ASSP-6, pp. 1136-1141, 1981.

7) S. G. Tyan, "Median filtering: deterministic properties", Topics in Applied Physics, vol. 43, pp. 197-217, 1981.

8) B. I. Justusson, "Median filtering: statical Properties", Topics in Applied Physics, vol. 43, pp. 161-196, 1981.

9) G. J. Yang and T. S. Huang, "The effect of median filtering on edge location estimation", Computer Graphics and Image Processing, Vol. 15, pp. 224-245, 1981.