

3次元画像復元のための流体方程式による正則化手法

田村進一* 中島義和† 竹内昭伸‡ 岡崎耕三† 鳥井清司§

*大阪大学医学部バイオメディカル研究センター機能画像診断学部 565 大阪府吹田市山田丘 2-2

†福井大学工学部電子工学科 910 福井市文京 3-9-1

‡鳥取大学工学部電気電子工学科 680 鳥取市湖山町南 4-101

§京都大学農学部総合水利研究実験場 645-00 京都府舞鶴市長浜

あらまし

従来の時空間微分オプティカルフロー法は、対象の滑らかさ拘束を利用している。これは対象に依存しない一般的な性質を利用している。しかしながら、その対象に固有な知識を利用することができればより有効である。本稿では、Navier-Stokes 方程式を正則化の拘束として導入し、2次元画像データから3次元流速場を復元する手法を提案する。また、そのシミュレーションによる検討を行うとともに、窯業流実画像データに適用して速度場の3次元復元を行った。

和文キーワード 正則化 オプティカルフロー 速度場 流れの可視化 流体 ナビエストークス方程式

Regularization for 3D Image Recovery by Using Fluid Flow Motion Equation

Shinichi Tamura * Yoshikazu Nakajima † Akinobu Takeuchi † Kozo Okazaki †
Kiyoshi Torii §

*Division of Functional Diagnostic Imaging, Bio-medical Research Center, Osaka University Medical School, Yamadaoka 2-2, Suita, Osaka, 565, JAPAN

†Faculty of Engineering, Fukui University, Bunkyo 3-9-1, Fukui, 910, JAPAN

‡Faculty of Engineering, Tottori University, Koyama-Minami 4-101, Tottori, 680, JAPAN

§Faculty of Agriculture, Kyoto University, Nagahama, Maizuru, Kyoto. 645-00. JAPAN

Abstract

Conventional spatio-temporal differentiation algorithm for optical flow uses rather general knowledge for objects, i.e., the smoothness constraint. It will be more effective, however, to use more intrinsic knowledge for specific object. In this paper, we propose an algorithm for recovering 3D flow from 2D measurement data by using fluid flow motion equations of Navier-Stokes equation for a constraint of regularization. We studied the validity of our method by a simulation. We further applied the method to a real image data of ceramic flow and recovered the 3D velocity fields.

英文 key words Regularization Optical flow Velocity field Flow visualization Fluid flow Navier-Stokes equation

1 はじめに

ヒトの視覚には様々な巧妙な仕掛けがあり、数学的には解が不定となる状況下でも対象をうまく認識できることが多い。ただし、ときにはその仕掛けが錯視を生じさせることもある。解が不定となる対象に対して工学的には、正則化手法 [1] が使われる。これは、解が一意的に定まるように何らかの別の拘束式を導入するものである。一般に、2次元画像情報から3次元復元はそのままでは不可能であるが、それに拘束条件を付加することで3次元復元が可能になることが多い。

正則化のため、拘束条件をエネルギー関数として定義し、その最小化を行うことで画像復元を行う手法がしばしば用いられる。この代表例が時空間微分法によるオプティカルフローである。しかしながら、この際に用いられる拘束式は空間的滑らかさなど一般的なものであり、対象の知識を有効に利用したものとはなっていない。

本報告では、拘束式として流体表面の観測データの整合性による拘束式に加え、さらに対象の物理モデル (Navier-Stokes 方程式、連続の式による拘束式) を導入する。物理モデルを使用した場合、滑らかさの拘束条件は自然に入ってくる。本稿では本手法のシミュレーションの検討を行うとともに、窯業流を対象としてその流速場の像復元・3次元復元を行った例を示す。

2 流体方程式

本稿では、密度の時間的、空間的変化のない非圧縮性粘性流体を対象とする。このとき、流体の基礎式 [2] は、連続の式、運動方程式 (Navier-Stokes equation) の2組になる。連続の式は、

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

運動方程式は、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} - g_x - \nu \nabla^2 U = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} - g_y - \nu \nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} - g_z - \nu \nabla^2 W = 0 \quad (2)$$

である。但し、 U, V, W はそれぞれ X 軸、 Y 軸、 Z 軸方向の速度、 P は圧力、 t は時間、 ρ は密度、 ν は動粘性係数、 g_x, g_y, g_z はそれぞれ各軸方向の重力加速度成分である。

3 評価関数

本研究では、時系列的に得られる観測画像データの適合性の評価条件に加え、連続の式、運動方程式による2つの拘束条件を用い、それら3つの拘束条件をエネルギー関数の形で定義した。連続の式による拘束式は、

$$e_C = (U_X + V_Y + W_Z)^2 \quad (3)$$

運動方程式による拘束式は、

$$e_M = (\text{NSE}(U))^2 + (\text{NSE}(V))^2 + (\text{NSE}(W))^2 \quad (4)$$

観測データによる拘束式は、

$$e_D = \alpha_U (U - U_{data})^2 + \alpha_V (V - V_{data})^2 + \alpha_W (W - W_{data})^2 \quad (5)$$

とした。但し、NSEは運動方程式(2)式、 U_{data}, V_{data} など、 W_{data} は観測データ、 $\alpha_U, \alpha_V, \alpha_W$ は観測データの有無(1 or 0)を表す。

よって、全体の評価関数は、

$$F = e_M + \lambda_1 e_C + \lambda_2 e_D \quad (6)$$

となる。但し、 λ_1, λ_2 は重み係数である。

4 解析

エネルギー関数の最小化は、オイラーの微分方程式 (Euler equation) で求められることが知られている。

$$\iiint F(U, V, W, U_X, U_Y, U_Z, V_X, V_Y, V_Z, W_X, W_Y, W_Z, P_X, P_Y, P_Z, U_{XX}, U_{YY}, U_{ZZ}, V_{XX}, V_{YY}, V_{ZZ}, W_{XX}, W_{YY}, W_{ZZ}) dX dY dZ \quad (7)$$

(7)式で表される評価関数 F のオイラーの微分方程式は、

$$F_U - \frac{\partial F_{U_X}}{\partial X} - \frac{\partial F_{U_Y}}{\partial Y} - \frac{\partial F_{U_Z}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 F_{U_{XX}}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_{U_{YY}}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_{U_{ZZ}}}{\partial Z^2} = 0$$

$$F_V - \frac{\partial F_{V_X}}{\partial X} - \frac{\partial F_{V_Y}}{\partial Y} - \frac{\partial F_{V_Z}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 F_{V_{XX}}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_{V_{YY}}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_{V_{ZZ}}}{\partial Z^2} = 0$$

$$F_W - \frac{\partial F_{W_X}}{\partial X} - \frac{\partial F_{W_Y}}{\partial Y} - \frac{\partial F_{W_Z}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 F_{W_{XX}}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_{W_{YY}}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_{W_{ZZ}}}{\partial Z^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial F_{P_X}}{\partial X} + \frac{\partial F_{P_Y}}{\partial Y} + \frac{\partial F_{P_Z}}{\partial Z} = 0 \quad (9)$$

となる。この連立方程式をニュートン・ラフソン法 (Newton-Rapson method) により解くことになる。

5 アルゴリズム

実際の計算では、直方体空間を考え、その内部を離散化して計算した。離散化した流速場での点 (i, j, k) の流速及び圧力を $(U_{i,j,k}, V_{i,j,k}, W_{i,j,k}, P_{i,j,k})$ とすると、オイラーの微分方程式は、

$$\Gamma_m(U_{i,j,k}, V_{i,j,k}, W_{i,j,k}, a_{m0}, \dots, a_{mn}) = 0 \quad (10)$$

$$2 \text{ 次元: } (m, n) = (3, 12)$$

$$3 \text{ 次元: } (m, n) = (4, 23)$$

となる。但し、 m は方程式の数、 n は計算中にてでくる係数の数である。

3次元画像では Γ_m は $m = 1 \sim 4$ の4式、 a は各 Γ_m につ

いて $n=0\sim 23$ の 24 個である。 a は周囲各点の流速，圧力，前時間の流速および時間間隔の関数になっており， Γ_m は a を係数として U, V, W, P の非線形連立方程式となっている。付録に $\Gamma_m=0$ と a の計算式を示す。

(10) 式をニュートン・ラプソン法を用いて解くことによりエネルギーの最小点を求める。

6 シミュレーション

アルゴリズムにシミュレーションデータを入力して，見えない部分の推定ができるかどうかを検討する。数値シミュレーションには流線（流面）過渡法を用いた。考察の対象とした流速場は図 1 に示す様に壁がステップ状に変化する場の変化後の流れである。ステップのある壁の反対側の境界条件は， $X=0$ における壁面なしの自由流の場合を考えている。図 2 において塗りつぶしてある部分が数値シミュレーションデータおよび境界条件を与えている部分である。表面 $A B C D$ の初期値には，図 3 に示すあらかじめ行った 2 次元数値シミュレーションで得られたデータを入力し，側面 $B C G F$ および底面 $E F G H$ は流速を 0 とした（図 2 参照）。図 3 において流速はベクトル量として表示している。なお，以下の全てのシミュレーションおよび実験では，粘性は場所・時間によらず均一とした。

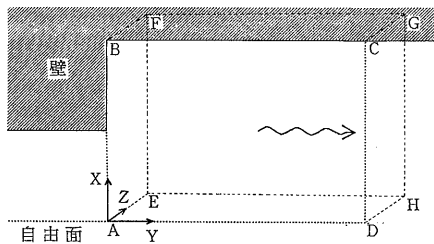


図1 片側壁-自由面流速場シミュレーション

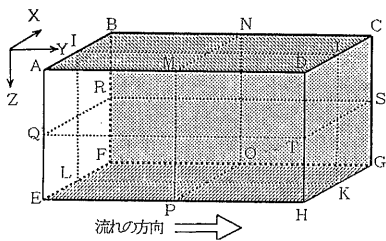


図2 数値シミュレーションデータ入力面

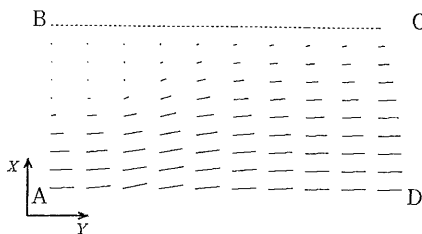


図3 表面 $A B C D$ の初期値速度データ

図 3 の表面流初期値データを入力し，見えない部分（流体内部流）の推定を行った結果を図 4.1，図 4.2，図 4.3，図 4.4 に示す。図 4.1 に示した表面流 $[A B C D]$ の推定結果において，壁の影響による回り込みが確認できる。内部水平面流 $[Q R S T]$ （図 4.2）でも同様の回り込みが見られる。

また，内部縦断面流 $[I J K L]$ の結果（図 4.3）で，やや下向きの速度が見られる。これは，開口上部（表層部）では流速が大きく側面および底面付近では流速が 0 に近いために，開口上部から閉口部（流体内部）に向かう回り込みが発生したと思われる。内部横断面流 $[M N O P]$ の結果（図 4.4）でも下向きの速度が確認できる。また，壁の影響による水平方向への回り込みも発生している。

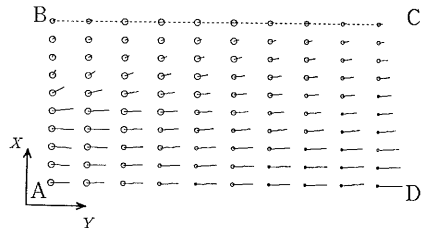


図4.1 シミュレーション結果(表面流 $[A B C D]$)

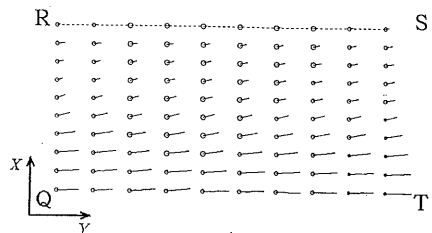


図4.2 シミュレーション結果(内部水平面流 $[Q R S T]$)

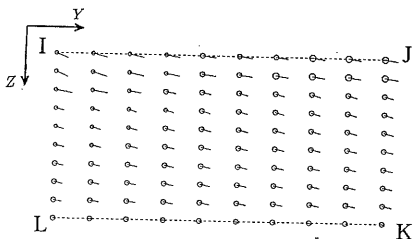


図4.3 シミュレーション結果(内部縦断面流 $[I J K L]$)

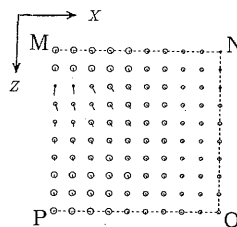


図4.4 シミュレーション結果(内部横断面流 $[M N O P]$)

また，図 5 に示すように，初期値データの一部を欠落させて本アルゴリズムに入力し，流速の欠落部分の推定（2

次元)を行った。結果を図6に示す。

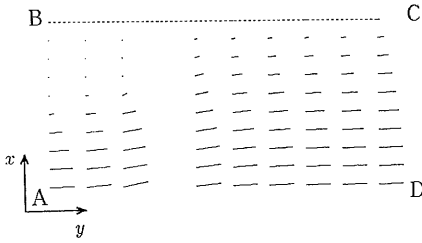


図5 表面A B C Dの初期値速度データ

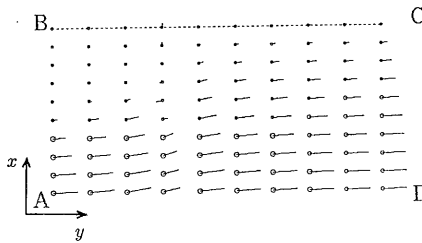


図6 欠落データによるシミュレーション結果

結果より、全体としての推定はほぼできているが、欠落部分で数値シミュレーションの結果得られたデータとの違いも見られる。これは、欠落したデータが10/100でありデータ全体における欠落の割合がかなり大きいこと、データの欠落部分が集中していること、シミュレーションに不備があり、欠落部分における入力データを観測可能で0としてしまったことなどが原因と考えられる。

7 実画像に対する適用

本アルゴリズムを窯業流画像データに適用した。画像データには、釜内部画像(図7)を用いた。流体は縦溝型の流路を奥方向に向かって流れており、画像ではこれが無限遠点に向かって奥方向へ流れているように見える。2本の破線は左右の流壁で手書きにより書き加えたものである。

流速場、特に表面流を計測・可視化する研究は[3]~[5]のように各種の手法が提案されている。本稿では、まずHorn等[6]の時空間微分法によるオプティカルフローの計算によって表面流の速度データを求め、それを3次元空間に座標変換後、5のアルゴリズムを適用して3次元速度場の推定をおこなった。

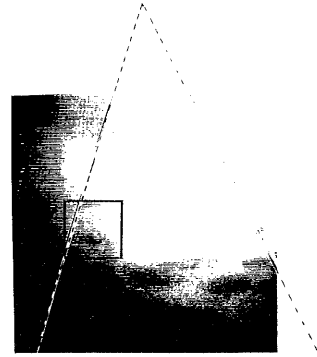


図7 画像データ

7.1 時空間微分法オプティカルフロー

オプティカルフローは、動きの滑らかさを拘束条件とする数値計算によって求めることができる。図7の黒枠内正方領域において、求めたオプティカルフローの結果を図8に示す。まず、観測画像データを80×80画素で切りとり、時空間微分法によるオプティカルフローを計算した。表面流[A B C D]の初期値には、以下に述べる座標変換後、それをさらに10×10でサンプリングした値を用いた。

図において[A' B' C' D']は[ABCD]それぞれの関係を示明するために記した。

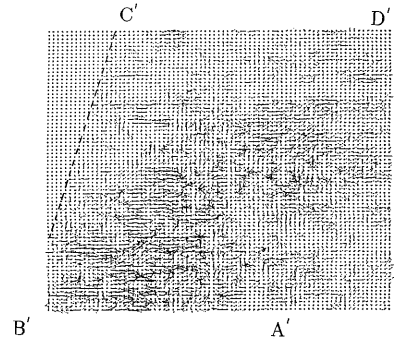


図8 オプティカルフローの計算結果

7.2 座標変換

画像座標 (x, y) と視点座標系 (x_e, y_e, z_e) の関係を図9に、視点座標系とWorld座標系 (X, Y, Z) の関係を図10に示す。流路はY軸の方向に延びており、視点座標系は流路より h の高さにおいて β の角度で見おろし、Y軸とは α だけ回転した姿勢となっている。画像座標からWorld座標系への変換は、視点座標系を介して(11)式で表される。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_e & y_e & z_e & 1 \end{pmatrix} C \\ &= \begin{pmatrix} x \cdot y_{\infty} L & y \cdot y_{\infty} L & y_{\infty} L & 1 \\ f \cdot (y_{\infty} - y) & f \cdot (y_{\infty} - y) & y_{\infty} - y & 1 \end{pmatrix} C \end{aligned} \quad (11)$$

但し、 f はレンズの焦点距離である。 C は(12)式で与えられる。

$$C = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

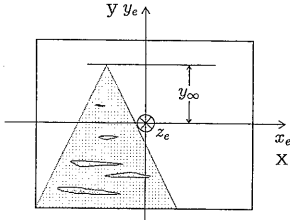


図9 画像座標と視点座標系

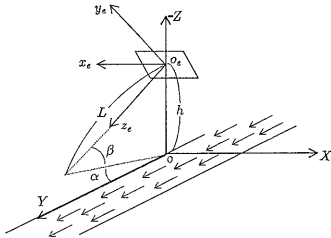


図10 視点座標系とWorld座標系

7.3 推定結果

得られた表面流の画像データオプティカルフローと境界条件を5のアルゴリズムに適用した。図11は対象とする流れ場の直方体領域を表し、 $10 \times 10 \times 10$ の離散系で計算している。図12は7.1で求めたオプティカルフローを7.2により座標変換した表面流の観測データである。この2次元オプティカルフローによる U, V を(2)式の流体運動方程式に代入し、 Z 軸方向の速度 W を求め、 (U, V, W) を初期値とした。ここでは、表面流に比較的近い値を示すと思われる表面から3層目までにこの初期値を与えている。計算結果を図13.1、図13.2、図13.3、図13.4に示す。これらは誤差の最小化により得た推定結果であり、表面流[ABCD]と内部流(内部水平面流[QRST], 内部縦断面流[IJKL], 内部横断面流[MNOP])を示している(図11参照)。○の大きさは圧力の大きさを表している。

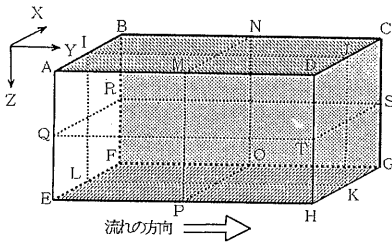


図11 流れ場座標系
観測面・境界面を斜線部で示す

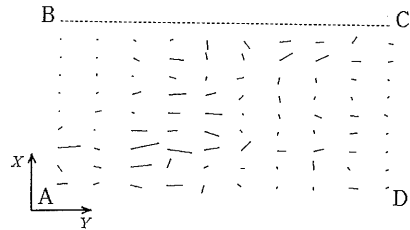


図12 表面流の観測データ

まず、表面流[ABCD]の結果(図13.1)では速度分布の差が大きく滑らかさに欠けている部分もあるが、これは空間的サンプリングの間隔が大きいためと思われる。内部水平面流[QRST](図13.2)では表面流の影響が見られる。また、表面流、内部水平面流ともに渦の存在を示唆する部分が見られる。内部縦断面[IJKL]および内部横断面[MNOP](図13.3、図13.4)において、やや下向き

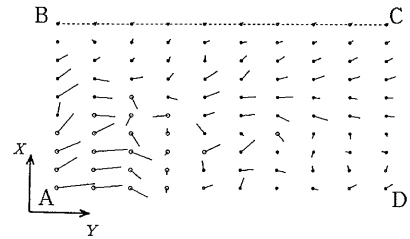


図13.1 結果(表面流[ABCD])

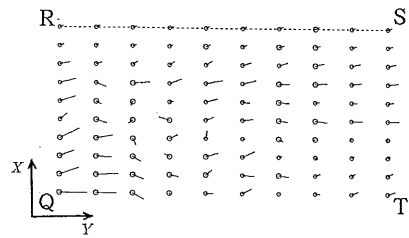


図13.2 結果(内部水平面流[QRST])

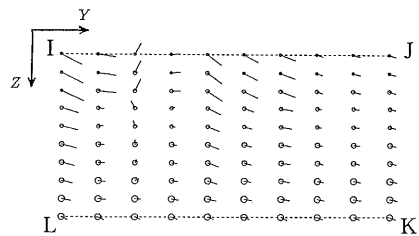


図13.3 結果(内部縦断面流[IJKL])

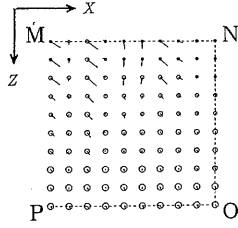


図13.4 結果(内部横断面流[MNO P])

8 まとめ

従来の対象に依存しない知識を用いる正則化手法に対して、本稿では対象に関する物理モデルを用いる正則化手法を提案した。そして、シミュレーションによる検討と、窯業流画像データへの適用を行った。複雑な系であるので結果の検討は、まだ十分に行えていない。

今後の研究としては、DSA (Digital Subtraction Angiography) 投影画像や、MRI (核磁気共鳴) 画像からの血流の3D復元、両眼立体視画像を用いた流体の3D復元アルゴリズム等への拡張を目指している。

参考文献

- [1]. 坂上勝彦, 横矢直和: "弛緩法と正則化", 情報処理, Vol.30, No.9, pp.1047-1057(1989).
- [2]. 伊藤, 本田: "大学講義流体力学", 丸善 (1981).
- [3]. 村田 滋, 串山 正, 木瀬 洋, 前田 貴史: "1枚の流跡線画像における流れ方向自動判定法", 日本機械学会論文集 (B), 56,524, pp.1043-1048(1990-4).
- [4]. 西野 耕一, 笠木 伸英, 平田 賢, 佐田 豊: "画像処理に基づく流れの3次元計測に関する研究", 日本機械学会論文集 (B), 55,510, pp.404-411(1989-2).
- [5]. 木村 一郎, 河野 吉晴, 高森 年: "時空間相関に基づく流れ場の3次元速度ベクトル", 計測自動制御学会論文集, 27,5, pp.497-502(1991-5).
- [6]. B.K.P.Horn and B.G.Schunck, "Determining optical flow", Artif. Intell., 17, pp.185-204(1981).

付録

以下の U , V , W に関しては添字 i,j,k は省略した。

$$\begin{aligned} & \Gamma_i(U_{i,j,k}, V_{i,j,k}, W_{i,j,k}, P_{i,j,k}, a_{1,1}, \dots, a_{1,23}) \\ &= a_{1,0} + a_{1,1}U^3 + a_{1,2}V^3 + a_{1,3}W^3 + a_{1,4}U^2V + a_{1,5}U^2W \\ &+ a_{1,6}V^2U + a_{1,7}V^2W + a_{1,8}W^2U + a_{1,9}W^2V + a_{1,10}UVW \\ &+ a_{1,11}U^2 + a_{1,12}V^2 + a_{1,13}W^2 + a_{1,14}UV + a_{1,15}UW + a_{1,16}VW \\ &+ a_{1,17}UP + a_{1,18}VP + a_{1,19}WP + a_{1,20}U + a_{1,21}V + a_{1,22}W + a_{1,23}P = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= \frac{1}{\Delta t}(-V_{i+1}V_{(i)} - W_{i+1}W_{(i)} + V_{j+1}U_{(i)} + W_{k+1}U_{(i)}) \\ &+ \frac{1}{\rho}(V_{i+1} \cdot P_{j+1} - V_{j+1} \cdot P_{i+1} + W_{i+1} \cdot P_{k+1} - W_{k+1} \cdot P_{i+1}) \\ &- g_y \cdot V_{i+1} + g_x \cdot V_{j+1} - g_x \cdot W_{i+1} + g_x \cdot W_{k+1} \\ &- \frac{g_z}{\Delta t}(\bar{U} - \bar{U}_{(i)} + U_{(i)}) \\ &- 2\nu(U_{i+1}^2 - U_{j+1}^2 - U_{k+1}^2 + U_{j+1}U_{i+1,j+1} - U_{j+1}U_{i+1} + U_{k+1}U_{i+1,k+1} - U_{k+1}U_{i+1} \\ &+ U_{i+1}U_{i-1} - V_{i+1}U_{i+1} + V_{j+1}U_{j+1} - V_{k+1}U_{k+1} + V_{i+1}U_{i+1,j+1} \\ &- V_{i+1}U_{j+1} + V_{k+1}U_{j+1,k+1} - V_{k+1}U_{j+1} + U_{j+1}V_{j-1} - W_{i+1}U_{i+1} \\ &- W_{j+1}W_{j+1} + W_{k+1}U_{k+1} + W_{i+1}U_{i+1,k+1} - W_{i+1}U_{k+1} + W_{j+1}U_{j+1,k+1} \\ &- W_{j+1}U_{k+1} + W_{k+1}U_{k-1}) \\ &- 6\nu(U_{i+1}\bar{U} + U_{j+1}\bar{V} + U_{k+1}\bar{W} + \frac{1}{\rho}(P_{i+1} + P_{j+1} + P_{k+1} + P_{i-1}) \\ &- \frac{1}{\rho}(P_{i+1} + \bar{P}) - V_{j+1}\bar{U} - W_{k+1}\bar{V} + V_{i+1}\bar{V} + W_{i+1}\bar{W}) \\ &+ \nu^2(U_{i+2} + U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+1,k+1} + U_{i+1,k-1} + U_{i-2} \\ &+ U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} + U_{i-1,k+1} + U_{i-1,k-1} + U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1} \\ &+ U_{j+2} + U_{j+1,k+1} + U_{j+1,k-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1} + U_{j-2} \\ &+ U_{j-1,k+1} + U_{j-1,k-1} + U_{i+1,k+1} + U_{i-1,k+1} + U_{j+1,k+1} + U_{j-1,k+1} \\ &+ U_{k+2} + U_{i+1,k-1} + U_{i-1,k-1} + U_{j+1,k-1} + U_{j-1,k-1} + U_{k-2} - 36\bar{U}) \\ &- \lambda_1(U_{i+1} + U_{i-1} + V_{i+1,j+1} - V_{j+1} - V_{i+1} + W_{i+1,k+1} - W_{i+1} - W_{k+1}) - \lambda_2 a_{1,0} d_x \\ a_{1,1} &= 1 \\ a_{1,2} &= 1 \\ a_{1,3} &= 1 \\ a_{1,4} &= -5 \\ a_{1,5} &= -5 \\ a_{1,6} &= 1 \\ a_{1,7} &= 1 \\ a_{1,8} &= 1 \\ a_{1,9} &= 1 \\ a_{1,10} &= -6 \\ a_{1,11} &= -U_{i-1} + U_{i+1} + V_{i+1} + V_{j+1} + W_{i+1} + W_{k+1} + \frac{1}{\Delta t} - 6\nu + \lambda_2 a_x \\ a_{1,12} &= -U_{j-1} + U_{j+1} - V_{i+1} - V_{j+1} - \frac{1}{\Delta t} - 6\nu \\ a_{1,13} &= -U_{k-1} + U_{k+1} - W_{i+1} - W_{k+1} - \frac{1}{\Delta t} - 6\nu \\ a_{1,14} &= -2U_{i+1,j+1} + 4U_{i+1} + 4U_{j+1} - 2V_{i+1} + 2V_{j+1} + W_{j+1} + W_{k+1} + 2\frac{1}{\Delta t} \\ a_{1,15} &= -2U_{i+1,k+1} + 4U_{i+1} + 4U_{k+1} + V_{j+1} + V_{k+1} - 2W_{i+1} + 2W_{k+1} + 2\frac{1}{\Delta t} \\ a_{1,16} &= -2U_{j+1,k+1} + 4U_{j+1} + 4U_{k+1} - V_{i+1} - V_{k+1} - W_{i+1} - W_{j+1} \\ a_{1,17} &= \frac{2}{\rho} \\ a_{1,18} &= -\frac{1}{\rho} \\ a_{1,19} &= -\frac{1}{\rho} \\ a_{1,20} &= -U_{i+1}^2 + V_{i+1}^2 + W_{i+1}^2 - U_{i+1}V_{j+1} - U_{j+1}V_{i+1} - U_{i+1}W_{k+1} - U_{k+1}W_{i+1} \\ &+ \frac{1}{\Delta t}(-U_{i+1} + U_{(i)}) + U_{(i)} - V_{j+1} - W_{k+1} + 6\nu \\ &- \frac{1}{\rho}(P_{i+1} + P_{i-1}) + 42\nu^2 - 6\nu(-\bar{U} - \bar{V} - \bar{W} - U_{i+1} + V_{j+1} + W_{k+1}) \\ &- 2\nu(2U_{j+1} + 2U_{k+1} - U_{i-1} - U_{i+1} - U_{i+1,j+1} - U_{i+1,k+1} + V_{i+1} \\ &- 2V_{j+1} + V_{k+1} + W_{i+1} + W_{j+1} - 2W_{k+1}) + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 a_x d_x \\ a_{1,21} &= -U_{j+1}U_{i+1} + V_{j+1}V_{i+1} + W_{j+1}W_{i+1} - 2U_{j+1}V_{j+1} - U_{j+1}W_{k+1} - U_{k+1}W_{j+1} \\ &+ \frac{1}{\Delta t}(-U_{j+1} + U_{(j)}) + 2U_{(j)} + V_{i+1} - \frac{1}{\rho}(P_{i+1,j+1} - 2P_{i+1}) \\ &- g_y + g_x \\ &- 6\nu(+\bar{U} - \bar{V} - U_{j+1} - V_{i+1}) - 2\nu(-U_{j-1} - U_{i+1,j+1} - U_{j+1,k+1} + U_{i+1} + U_{j+1} + U_{k+1}) - \lambda_1 \\ a_{1,22} &= -U_{k+1}U_{i+1} + V_{k+1}V_{i+1} + W_{k+1}W_{i+1} - U_{j+1}V_{k+1} - U_{k+1}V_{j+1} - 2U_{k+1}W_{k+1} \\ &+ \frac{1}{\Delta t}(-U_{k+1} + U_{(k)}) + 2U_{(k)} + W_{i+1} + W_{(i)} - \frac{1}{\rho}(P_{i+1,k+1} - 2P_{i+1}) \\ &- g_x + g_x \\ &- 6\nu(+\bar{U} - \bar{W} - U_{k+1} - W_{i+1}) \\ &- 2\nu(-U_{k-1} - U_{i+1,k+1} - U_{j+1,k+1} + U_{i+1} + U_{j+1} + U_{k+1}) - \lambda_1 \\ a_{1,23} &= \frac{1}{\rho}(-V_{i+1} + V_{j+1} - W_{i+1} + W_{k+1} - 7\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_2(U_{i,j,k}, V_{i,j,k}, W_{i,j,k}, P_{i,j,k}, a_2, \dots, a_2) \\ &= a_{2,0} + a_{2,1}U^3 + a_{2,2}V^3 + a_{2,3}W^3 + a_{2,4}U^2V + a_{2,5}U^2W \\ &+ a_{2,6}V^2U + a_{2,7}V^2W + a_{2,8}W^2U + a_{2,9}W^2V + a_{2,10}UVW \\ &+ a_{2,11}U^2 + a_{2,12}V^2 + a_{2,13}W^2 + a_{2,14}UV + a_{2,15}UW + a_{2,16}VW \\ &+ a_{2,17}UP + a_{2,18}VP + a_{2,19}WP + a_{2,20}U + a_{2,21}V + a_{2,22}W + a_{2,23}P = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2,0} &= \frac{1}{\Delta t}(-U_{i+1}U_{(i)} - W_{i+1}W_{(i)} + U_{i+1}V_{(i)} + W_{k+1}V_{(i)}) \\ &+ \frac{1}{\rho}(U_{j+1} \cdot P_{i+1} - U_{i+1} \cdot P_{j+1} + W_{j+1} \cdot P_{k+1} + W_{k+1} \cdot P_{j+1}) \\ &- g_x \cdot U_{j+1} + g_y \cdot U_{i+1} - g_x \cdot W_{j+1} - g_y \cdot W_{k+1} \\ &- \frac{g_z}{\Delta t}(V - \bar{V}_{(i)} + V_{(i)}) \\ &- 2\nu(V_{i+1}^2 - V_{i+2}^2 - V_{i+1}^2 + V_{i+1}V_{i+2,j+1} - V_{i+1}V_{j+1} + V_{k+1}V_{j+1,k+1} - V_{k+1}V_{j+1} + V_{j+1}V_{j-1}) \\ &+ U_{i+1}V_{i+1} - U_{j+1}V_{j+1} - U_{k+1}V_{k+1} + U_{j+1}V_{i+2,j+1} - U_{j+1}V_{i+1} + U_{k+1}V_{i+1,k+1} \\ &- U_{k+1}V_{i+1} + U_{i+1}V_{i-1} - W_{i+1}V_{i+1} - W_{j+1}V_{j+1} + W_{k+1}V_{k+1} + W_{j+1}V_{j+1,k+1} \\ &- W_{j+1}V_{i+1} - W_{i+1}V_{i+1,k+1} - W_{i+1}V_{k+1} + W_{k+1}W_{k-1}) \\ &- 6\nu(W_{i+1}\bar{U} + V_{j+1}\bar{V} + V_{k+1}\bar{W} + \frac{1}{\rho}(P_{j+1} + P_{k+1} + P_{i-1} + P_{k+1} + P_{k-1})) \\ &- \frac{1}{\rho}(P_{j+1} + \bar{P}) + U_{j+1}\bar{U} - U_{i+1}\bar{V} - W_{k+1}\bar{V} + W_{j+1}\bar{W}) \\ &+ \nu^2(V_{i+2} + V_{i+2,j+1} + V_{i+1,j+1} + V_{i+1,k+1} + V_{i+1,k-1} + V_{i-1,j+1} - V_{i-1,j-1} \\ &+ V_{i-1,k+1} + V_{i-1,j-1} + V_{i-1,k+1} + V_{i-1,k-1} + V_{i+1,j+1} + V_{i-1,j+1} \\ &+ V_{j+2} + V_{j+1,k+1} + V_{j+1,k-1} + V_{i+1,j-1} + V_{i-1,j-1} + V_{j-2} \\ &+ V_{j-1,k+1} + V_{j-1,k-1} + V_{i+1,k+1} + V_{i+1,k-1} + V_{j+1,k+1} + V_{j-1,k+1} + V_{k+2} \\ &+ V_{i+1,k-1} + V_{i-1,k-1} + V_{j+1,k-1} + V_{j-1,k-1} + V_{k-2} - 36V) \\ &- \lambda_1(V_{j+1} + V_{j-1} + U_{i+1,j+1} - U_{i+1} - U_{j+1} + W_{j+1,k+1} - W_{j+1} - W_{k+1}) - \lambda_2\alpha_w d_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= 1 \\ a_{2,2} &= 1 \\ a_{2,3} &= 1 \\ a_{2,4} &= 1 \\ a_{2,5} &= 1 \\ a_{2,6} &= -5 \\ a_{2,7} &= -5 \\ a_{2,8} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2,9} &= 1 \\ a_{2,10} &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2,11} &= -U_{i+1} - U_{j+1} - V_{i-1} + V_{i+1} - \frac{1}{\Delta t} - 6\nu \\ a_{2,12} &= +U_{i+1} + U_{j+1} - V_{j-1} + V_{j+1} + W_{j+1} + W_{k+1} + \frac{1}{\Delta t} - 6\nu + \lambda_2\alpha_w \\ a_{2,13} &= -V_{k-1} + V_{k+1} - W_{j+1} - W_{k+1} - \frac{1}{\Delta t} - 6\nu \\ a_{2,14} &= -2V_{i+1,j+1} + 4V_{i+1} + 4V_{j+1} - 2U_{j+1} + 2U_{i+1} + W_{j+1} + W_{k+1} + 2\frac{1}{\Delta t} \\ a_{2,15} &= -2V_{i+1,k+1} + 4V_{i+1} + 4V_{k+1} - U_{j+1} - U_{k+1} - W_{i+1} - W_{j+1} \\ a_{2,16} &= -2V_{j+1,k+1} + 4V_{j+1} + 4V_{k+1} + U_{i+1} + U_{k+1} - 2W_{j+1} + 2W_{k+1} + 2\frac{1}{\Delta t} \\ a_{2,17} &= -\frac{1}{\rho} \\ a_{2,18} &= \frac{2}{\rho} \\ a_{2,19} &= -\frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2,20} &= +U_{j+1}U_{i+1} - V_{j+1}V_{i+1} + W_{j+1}W_{i+1} - 2V_{i+1}U_{i+1} - V_{i+1}W_{k+1} - V_{k+1}W_{i+1} \\ &+ \frac{1}{\Delta t}(-V_{i+1} + V_{(i)})_{i+1} - 2W_{(i)} + U_{(i)} + U_{j+1}) - \frac{1}{\rho}(P_{i+1,j+1} - 2P_{j+1}) \\ &- g_x + g_y \\ &- 6\nu(-\bar{U} + \bar{V} - U_{j+1} - V_{i+1}) - 2\nu(-V_{i-1} - V_{i+1,j+1} - V_{i+1,k+1} + V_{i+1} + V_{j+1} + V_{k+1}) - \lambda_1 \\ a_{2,21} &= U_{j+1}^2 - V_{j+1}^2 + W_{j+1}^2 - V_{j+1}U_{i+1} - V_{i+1}U_{j+1} - V_{j+1}W_{k+1} - V_{k+1}W_{j+1} \\ &+ \frac{1}{\Delta t}(-V_{i+1} + V_{(i)})_{i+1} - V_{(i)} - U_{i+1} - W_{k+1} + 6\nu) \\ &- \frac{1}{\rho}(P_{j+1} + P_{j-1}) + 42\nu^2 - 6\nu(-\bar{U} - \bar{V} - \bar{W} + U_{i+1} - V_{j+1} + W_{k+1}) \\ &- 2\nu(2V_{i+1} + 2V_{k+1} - V_{j+1} - V_{j-1} - V_{i+1,j+1} - V_{j+1,k+1} + U_{j+1} \\ &- 2U_{i+1} + U_{k+1} + W_{i+1} + W_{j+1} - 2W_{k+1}) + 2\lambda_1 - 2\lambda_2\alpha_w d_w \\ a_{2,22} &= +U_{j+1}U_{k+1} - V_{j+1}V_{k+1} + W_{j+1}W_{k+1} - V_{k+1}U_{i+1} - V_{i+1}U_{k+1} - 2V_{k+1}W_{k+1} \\ &+ \frac{1}{\Delta t}(-V_{k+1} + V_{(k)})_{k+1} - 2V_{(k)} + W_{j+1} + W_{(k)}) - \frac{1}{\rho}(P_{j+1,k+1} - 2P_{k+1}) \\ &- g_x + g_y \\ &- 6\nu(+\bar{V} - \bar{W} - V_{k+1} - W_{j+1}) - 2\nu(-V_{k-1} - V_{i+1,k+1} - V_{j+1,k+1} + V_{i+1} + V_{j+1} + V_{k+1}) - \lambda_1 \\ a_{2,23} &= \frac{1}{\rho}(-U_{j+1} + U_{i+1} - W_{j+1} + W_{k+1} - 7\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_3(U_{i,j,k}, V_{i,j,k}, W_{i,j,k}, P_{i,j,k}, a_3, \dots, a_3) \\ &= a_{3,0} + a_{3,1}U^3 + a_{3,2}V^3 + a_{3,3}W^3 + a_{3,4}U^2V + a_{3,5}U^2W \\ &+ a_{3,6}V^2U + a_{3,7}V^2W + a_{3,8}W^2U + a_{3,9}W^2V + a_{3,10}UVW \\ &+ a_{3,11}U^2 + a_{3,12}V^2 + a_{3,13}W^2 + a_{3,14}UV + a_{3,15}UW + a_{3,16}VW \\ &+ a_{3,17}UP + a_{3,18}VP + a_{3,19}WP + a_{3,20}U + a_{3,21}V + a_{3,22}W + a_{3,23}P = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,0} &= \frac{1}{\Delta t}(-U_{k+1}U_{(k)} - V_{k+1}V_{(k)} + U_{i+1}W_{(k)} + V_{j+1}W_{(k)}) \\ &+ \frac{1}{\rho}(U_{k+1} \cdot P_{i+1} - U_{i+1} \cdot P_{k+1} + V_{k+1} \cdot P_{j+1} - V_{j+1} \cdot P_{k+1}) \\ &- g_x \cdot U_{k+1} + g_x \cdot U_{i+1} - g_y \cdot V_{k+1} + g_x \cdot V_{j+1} \\ &- \frac{g_z}{\Delta t}(W - \bar{W}_{(k)} + W_{(k)}) \\ &- 2\nu(W_{k+1}^2 - W_{k+1}^2 - W_{j+1}^2 + W_{j+1}W_{j+1,k+1} - W_{j+1}W_{k+1} + W_{i+1}W_{i+1,k+1} - W_{i+1}W_{k+1} \\ &+ W_{k+1}W_{k-1} - V_{i+1}W_{i+1} + V_{j+1}W_{j+1} - V_{k+1}W_{k+1} + V_{i+1}W_{i+1,j+1} \\ &- V_{i+1}W_{j+1} + V_{k+1}W_{j+1,k+1} - V_{k+1}W_{j+1} + V_{j+1}W_{j-1} + U_{i+1}W_{i+1} \\ &- U_{i+1}W_{j+1} - U_{k+1}W_{k+1} + U_{j+1}W_{i+1,j+1} - U_{j+1}W_{i+1} + U_{k+1}W_{i+1,k+1} \\ &- U_{k+1}W_{i+1} + U_{i+1}W_{i-1}) \\ &- 6\nu(W_{i+1}\bar{U} + W_{j+1}\bar{V} + W_{k+1}\bar{W} + \frac{1}{\rho}(P_{k+2} + P_{i+1} + P_{i-1} + P_{j+1} + P_{j-2}) \\ &- \frac{1}{\rho}(P_{k+1} + \bar{P}) + U_{k+1}\bar{U} + V_{k+1}\bar{V} - U_{i+1}\bar{W} - V_{j+1}\bar{W}) \\ &+ \nu^2(W_{i+2} + W_{i+2,j+1} + W_{i+1,j+1} + W_{i+1,k+1} + W_{i+1,k-1} + W_{i-1,j+1} - W_{i-1,j-1} \\ &+ W_{i-1,k+1} + W_{i-1,j-1} + W_{i-1,k+1} + W_{i-1,k-1} + W_{i+1,j+1} + W_{i-1,j+1} + W_{j+2} \\ &+ W_{j+1,k+1} + W_{j+1,k-1} + W_{i+1,j-1} + W_{i-1,j-1} + W_{j-2} + W_{j-1,k+1} + W_{j-1,k-1} \\ &+ W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k+1} + W_{j+1,k+1} + W_{j-1,k+1} + W_{k+2} + W_{i+1,k-1} \\ &+ W_{i-1,k-1} + W_{j+1,k-1} + W_{j-1,k-1} + W_{k-2} - 36W) \\ &- \lambda_2(U_{i+1,k+1} - U_{k+1} - U_{i+1} + V_{j+1,k+1} - V_{k+1} - V_{j+1} + W_{k+1} + W_{k-1}) - \lambda_3\alpha_w d_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,1} &= 1 \\ a_{3,2} &= 1 \\ a_{3,3} &= 1 \\ a_{3,4} &= 1 \\ a_{3,5} &= 1 \\ a_{3,6} &= 1 \\ a_{3,7} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,8} &= -5 \\ a_{3,9} &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,10} &= -6 \\ a_{3,11} &= -U_{i+1} - U_{k+1} - W_{i-1} + W_{k+1} - \frac{1}{\Delta t} - 6\nu \end{aligned}$$

$$a_{3,12} = -V_{j+1} - V_{k+1} - W_{j-1} + W_{j+1} - \frac{1}{\Delta t} - 6\nu$$

$$a_{3,13} = +U_{i+1} + U_{k+1} + V_{j+1} + V_{k+1} - W_{k-1} + W_{k+1} + \frac{1}{\Delta t} - 6\nu + \lambda_2\alpha_w$$

$$a_{3,14} = -2W_{i+1,j+1} + 4W_{i+1} + 4W_{j+1} - U_{j+1} - U_{k+1} - V_{i+1} - V_{k+1}$$

$$a_{3,15} = -2W_{i+1,k+1} + 4W_{i+1} + 4W_{k+1} + V_{i+1} + V_{j+1} + 2U_{i+1} - 2U_{k+1} + 2\frac{1}{\Delta t}$$

$$a_{3,16} = -2W_{j+1,k+1} + 4W_{j+1} + 4W_{k+1} + U_{i+1} + U_{j+1} + 2V_{j+1} - 2V_{k+1} + 2\frac{1}{\Delta t}$$

$$a_{3,17} = -\frac{1}{\rho}$$

$$a_{3,18} = -\frac{1}{\rho}$$

$$a_{3,19} = \frac{2}{\rho}$$

$$\begin{aligned} a_{3,20} &= +U_{k+1}U_{i+1} + V_{k+1}V_{i+1} - W_{k+1}W_{i+1} - 2W_{i+1}U_{i+1} - W_{i+1}V_{j+1} - W_{i+1}V_{j+1} \\ &+ \frac{1}{\Delta t}(-W_{i+1} + W_{(i)})_{i+1} - 2W_{(i)} + U_{(i)} + U_{k+1}) - \frac{1}{\rho}(P_{i+1,k+1} - 2P_{k+1}) \\ &- g_x + g_x \\ &- 6\nu(-\bar{U} + \bar{V} - W_{k+1} - W_{i+1}) \\ &- 2\nu(-W_{i-1} - W_{i+1,j+1} - W_{i+1,k+1} + W_{i+1} + W_{j+1} + W_{k+1}) - \lambda_1 \end{aligned}$$

$$a_{3,21} = +U_{k+1}U_{j+1} + V_{k+1}V_{j+1} - W_{k+1}W_{j+1} - W_{j+1}U_{i+1} - W_{i+1}U_{j+1} - 2W_{j+1}V_{j+1}$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}(-W_{j+1} + W_{(j)})_{j+1} - 2W_{(j)} + V_{i+1} + V_{(j)}) - \frac{1}{\rho}(P_{i+1,k+1} - 2P_{k+1})$$

$$- g_y + g_x$$

$$- 6\nu(-\bar{V} + \bar{W} - V_{k+1} - W_{j+1})$$

$$- 2\nu(-W_{j-1} - W_{i+1,j+1} - W_{j+1,k+1} + W_{i+1} + W_{j+1} + W_{k+1}) - \lambda_1$$

$$a_{3,22} = -W_{i+1}^2 + U_{k+1}^2 + V_{k+1}^2 - W_{k+1}U_{i+1} - W_{i+1}U_{k+1} - W_{k+1}V_{j+1} - W_{j+1}V_{k+1}$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}(-W_{k+1} + W_{(k)})_{k+1} - W_{(k)} - U_{i+1} - V_{j+1} + 6\nu)$$

$$- \frac{1}{\rho}(P_{k+1} + P_{k-1}) + 42\nu^2 - 6\nu(-\bar{U} - \bar{V} - \bar{W} + U_{i+1} + V_{j+1} + W_{k+1})$$

$$- 2\nu(2W_{i+1} + 2W_{j+1} - W_{k+1} - W_{k-1} - W_{i+1,k+1} - W_{j+1,k+1}$$

$$- 2U_{i+1} + U_{j+1} + U_{k+1} + V_{i+1} - 2V_{j+1} + V_{k+1})$$

$$+ 2\lambda_1 - 2\lambda_2\alpha_w d_w$$

$$a_{3,23} = \frac{1}{\rho}(-U_{k+1} + U_{i+1} - V_{k+1} + V_{j+1} - 7\nu)$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma_4(U_{i,j,k}, V_{i,j,k}, W_{i,j,k}, P_{i,j,k}, a_{i_0}, \dots, a_{i_6}) \\
&= a_{4,0} + a_{4,1}U^3 + a_{4,2}V^3 + a_{4,3}W^3 + a_{4,4}U^2V + a_{4,5}U^2W \\
&+ a_{4,6}V^2U + a_{4,7}V^2W + a_{4,8}W^2U + a_{4,9}W^2V + a_{4,10}UVW \\
&+ a_{4,11}U^2 + a_{4,12}V^2 + a_{4,13}W^2 + a_{4,14}UV + a_{4,15}UW + a_{4,16}VW \\
&+ a_{4,17}UP + a_{4,18}VP + a_{4,19}WP + a_{4,20}U + a_{4,21}V + a_{4,22}W + a_{4,23}P = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,0} &= \frac{1}{\Delta t}(U_{i+1} - U_{(i_0)+1} + U_{(i_1)} + V_{j+1} - V_{(i_0)j+1} + V_{(i_1)} + W_{k+1} - W_{(i_0)k+1} + W_{(i_1)}) \\
&+ U_{i+1}^2 + V_{j+1}^2 + W_{k+1}^2 + 2V_{i+1}U_{j+1} + 2W_{i+1}U_{k+1} + 2V_{k+1}W_{j+1} \\
&+ \left(\frac{6}{\rho}\right)P \\
&- 6\nu \left(1/6(U_{i+2} + U_{j+1} + U_{j-1} + U_{k+1} + U_{k-1}) - U_{i+1} - \bar{U}\right) \\
&+ 1/6(V_{i+1} + V_{i-1} + V_{j+2} + V_{k+1} + V_{k-1}) - V_{j+1} - \bar{V} \\
&+ 1/6(W_{i+1} + W_{i-1} + W_{j+1} + W_{j-1} + W_{k+2}) - W_{k+1} - \bar{W}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,1} &= 0 \\
a_{4,2} &= 0 \\
a_{4,3} &= 0 \\
a_{4,4} &= 0 \\
a_{4,5} &= 0 \\
a_{4,6} &= 0 \\
a_{4,7} &= 0 \\
a_{4,8} &= 0 \\
a_{4,9} &= 0 \\
a_{4,10} &= 0 \\
a_{4,11} &= -1 \\
a_{4,12} &= -1 \\
a_{4,13} &= -1 \\
a_{4,14} &= 4 \\
a_{4,15} &= 4 \\
a_{4,16} &= 4 \\
a_{4,17} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,18} &= 0 \\
a_{4,19} &= 0 \\
a_{4,20} &= -U_{i+1} - 3V_{i+1} - 3W_{i+1} + U_{i-1} + V_{i+1,j+1} - V_{j+1} + W_{i+1,k+1} - W_{k+1} - \frac{1}{\Delta t} - 7\nu \\
a_{4,21} &= -3U_{i+1} - V_{i+1} - 3W_{i+1} + U_{i+1,j+1} - U_{i+1} + V_{j+1} + W_{j+1,k+1} - W_{k+1} - \frac{1}{\Delta t} - 7\nu \\
a_{4,22} &= -3U_{i+1} - 3V_{i+1} - W_{i+1} + U_{i+1,k+1} - U_{i+1} + V_{j+1,k+1} - V_{j+1} + W_{k-1} - \frac{1}{\Delta t} - 7\nu \\
a_{4,23} &= -\frac{6}{\rho}
\end{aligned}$$

ただし, 点 (i, j, k) で $U \in U = U_{i,j,k}$ とする

$$U_i = \frac{1}{\Delta t}(U_{(i)} - U_{(i_0)}) = \frac{1}{\Delta t}(U - U_{(i_0)})$$

$$U_x = U_{i+1} - U$$

$$U_y = U_{j+1} - U$$

$$U_z = U_{k+1} - U$$

$$U_{xx} = U_{i+1} - 2U + U_{i-1}$$

$$U_{yy} = U_{j+1} - 2U + U_{j-1}$$

$$U_{zz} = U_{k+1} - 2U + U_{k-1}$$

$$U_{xy} = U_{i+1,j+1} - U_{j+1} - U_{i+1} + U$$

$$U_{xz} = U_{i+1,k+1} - U_{k+1} - U_{i+1} + U$$

$$U_{yz} = U_{j+1,k+1} - U_{k+1} - U_{j+1} + U$$

$$U_{tx} = \frac{1}{\Delta t}(U_{i+1} - U_{(i_0)k+1} - U + U_{(i_0)})$$

$$U_{ty} = \frac{1}{\Delta t}(U_{j+1} - U_{(i_0)j+1} - U + U_{(i_0)})$$

$$U_{tz} = \frac{1}{\Delta t}(U_{k+1} - U_{(i_0)k+1} - U + U_{(i_0)})$$

$$\nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U = 6(\bar{U} - U)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{6}(U_{i+1} + U_{i-1} + U_{j+1} + U_{j-1} + U_{k+1} + U_{k-1})$$