

単一カメラによる回転物体の形状計測と カメラキャリブレーションについて

高橋 章 石井郁夫 牧野秀夫

新潟大学工学部情報工学科

〒950-21 新潟市五十嵐 2 の町 8050

あらまし 本稿では、1台のカメラを用いて回転台上の物体の3次元計測を行う方法について検討する。計測の際に物体の存在範囲を回転軸を中心とする円柱面内に限定すると、回転後の対応点の存在範囲は短い線分上に限定される。この線分上で対応点を探索することによって3次元座標が得られる。カメラキャリブレーションを行うために、カメラの視点と回転台上面が同一平面上に存在するようにカメラの設置位置を拘束し、回転台の円周上に等間隔に4つのマーカーを設置する。これにより、特定の専用物体なしでもカメラキャリブレーションが可能となる。最後に簡単な格子パターンについての計測結果を示す。

和文キーワード ロボットビジョン,単一カメラによる3次元計測,回転物体,カメラキャリブレーション

3-D Measuring of Rotating Objects Using Single Camera and Calibration of Camera Parameters

Akira TAKAHASHI, Ikuo ISHII and Hideo MAKINO

Faculty of Engineering, Niigata University

8050, Ninocho, Igarashi, Niigata 950-21, Japan

Abstract In this paper, a 3-D measuring method of rotating objects on a turntable using single camera is described. When the existent range of objects is inside of cylindrical area round the rotating center, the existent area of corresponding point after rotation is restricted on the short straight line segment. So the corresponding point is explored along this segment, then 3-D position of the point is calculated. For calibration of camera parameters, the camera is set as the focal point and the surface of turntable are on the same plane, and the four markers are set around the circumference of turntable at equal spaces. The calibration parameters can be obtained by this setting without any other supplementary object. Some examples of measurement using simple grid pattern are also presented.

英文 key words Robot vision, 3-D measurement using single camera, rotating object, camera calibration

1. まえがき

3次元形状計測法として複数のカメラを用いたステレオ法がよく知られている。ステレオ法の問題点としては画像間での対応問題が多く扱われているが⁽¹⁾、実際の計測においてはカメラ個体間の性能のばらつきや、計測系の設置精度による影響等の問題を解決する必要がある⁽²⁾。

そこで、回転台上の物体を1台のカメラで計測する方法について検討した。この方法は複数のカメラを用いる方法に比べ、計測系の設定に関わる誤差の要因が少ない、回転角を任意に設定できるため死角を減らすことができる、物体全周の計測が可能であるなどの利点がある。

2. 計測の原理

2.1. 座標系の設定

計測に用いる座標系はカメラ座標系UVNと、ワールド座標系XYZで、左手系で定義する(図1)。以下では点やベクトルの表示に、ワールド座標系では<>、カメラ座標系では()を用いる。ワールド座標系からカメラ座標系及び、カメラ座標系からワールド座標系への座標変換は、同次座標系表現を用いて次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ N \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_5 & t_9 & t_{13} \\ t_2 & t_6 & t_{10} & t_{14} \\ t_3 & t_7 & t_{11} & t_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ N \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

但し $e_x = (t_1, t_5, t_9)$ 、 $e_y = (t_2, t_6, t_{10})$ 、 $e_z = (t_3, t_7, t_{11})$ はそれぞれX、Y、Z軸方向の単位ベクトルで、 $P_w = (t_4, t_8, t_{12})$ はワールド座標系原点である。また、 $e_u = (t_1, t_2, t_3)$ 、 $e_v = (t_5, t_6, t_7)$ 、 $e_n = (t_9, t_{10}, t_{11})$ はそれぞれU、V、N軸方向の単位ベクトルで、 $P_c = (t_{13}, t_{14}, t_{15})$ はカメラ座標系原点である。

ここでカメラは焦点距離がf、視点位置が $P_E = (0, 0, -f)$ 、画像面がUV平面である理想的なピンホールカメラと看做すと、空間中の点 $P = (U_P, V_P, N_P)$ を表わす画像面上の点 $Q = (U_Q, V_Q)$ は次の透視変換で求めることができる。

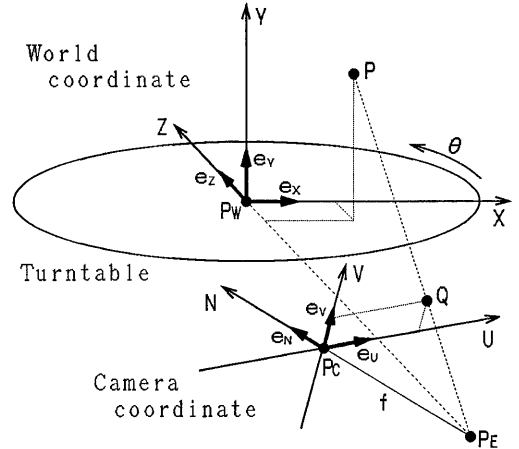


図1 座標系の設定

$$U_Q = \frac{U_P f}{N_P + f}, \quad V_Q = \frac{V_P f}{N_P + f} \quad (3)$$

また、回転台を θ だけ反時計方向に回転させる操作はY軸廻りの回転変換で表わすことができる。点 $P = \langle X_P, Y_P, Z_P \rangle$ の回転後の点を $P' = \langle X_{P'}, Y_{P'}, Z_{P'} \rangle$ とすると、 P' は次式で求められる。

$$\begin{pmatrix} X_{P'} \\ Y_{P'} \\ Z_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} \quad (4)$$

2.2. 3次元座標算出法

回転台上の物体の1点についての対応点探索と3次元座標算出の原理を図2に示す。

空間中の点Pを表わす画像面上の特徴点Qが得られているものとする。このとき、共線条件より点Pは視点 P_E と点Qを通る直線上に存在する。ここで計測対象の物体の存在範囲を回転軸を中心とする半径Rの円柱面内に限定し、円柱面と直線 $P_E Q$ との交点 P_1, P_2 を求めると、点Pの存在範囲は線分 $P_1 P_2$ 上に限定される(付録A参照)。

回転テーブルを θ_0 だけ回転させたときに3点 P, P_1, P_2 がそれぞれ、 P', P_i, P'_2 へ移動するものとする。 P', P_i, P'_2 を表わす画像面上の点をそれぞれ、 Q', Q_i, Q'_2 とすれば、 Q', Q_i, Q'_2 は同一直線上に並ぶ。従って、画像面上の線分 $Q_i Q'_2$ 上で特徴点を探索し、特徴点 Q' が得られたならば、直線 $P_E Q'$ と直線 $P_i P'_2$ との交点を求めることで点 P' の座標が得られる。

線分 $Q_i Q'_2$ 上で複数の対応の候補が見つかった

場合には、更に回転台を回転させることで、第3の画像を利用することができる。

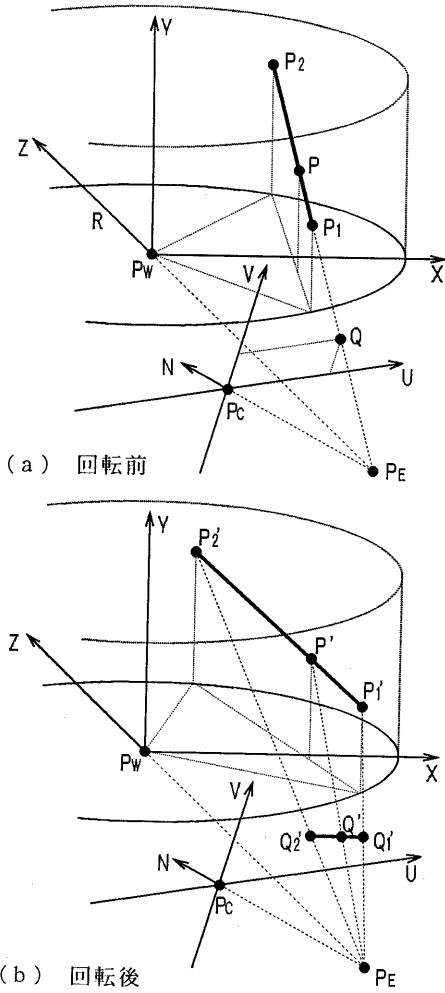
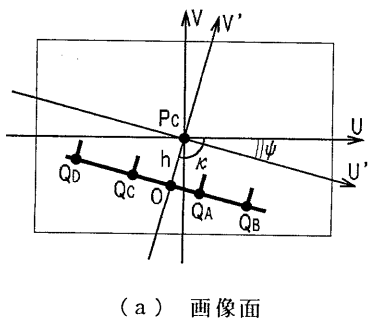


図2 計測の原理



(a) 画像面

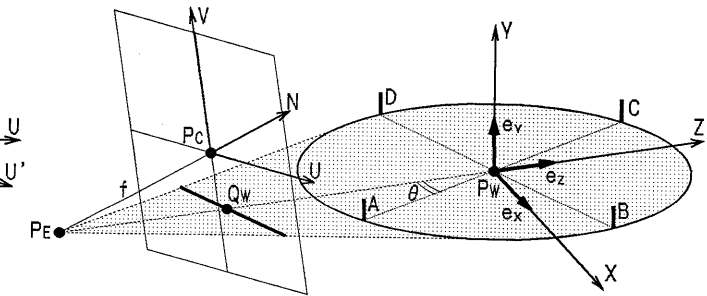


図3 カメラキャリブレーション (b) 計測系の配置

3. カメラキャリブレーション

カメラの視点と回転台の上面が同一平面上に存在するようにカメラの設置位置を拘束すると、回転台上に円周を4等分する位置に設置されたマーカーA, B, C, Dを用いてカメラキャリブレーションが可能となる。拘束条件を満たすためにカメラは画像面上で回転台上面が一直線となるよう設置すればよい。キャリブレーションの概要図を図3に示す。ここで求めるパラメータは焦点距離 f 、回転台の回転角 θ 、各座標系間の変換行列である。尚、画像の歪は無視できるものと仮定し、画像原点とアスペクト比は予め求めておくものとする⁽³⁾。

3.1. 焦点距離の算出

回転台上面を表す画像面上の直線について、最小2乗法を用いて次式で示すHesseの標準形で表わす直線に回帰する⁽⁴⁾。

$$U \cos \kappa + V \sin \kappa = h, \quad N=0 \quad (5)$$

但し h は点 P_c から直線までの距離であり、 κ は直線の法線と U 軸とのなす角である。この直線が U 軸と平行になるように N 軸廻りに ϕ だけ回転変換を行う。画像面上の点 (U, V) の回転後の点を (U', V') とすると、変換式は、

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad (6)$$

と表わされる。但し ϕ は次のように定める。

$$\phi = \begin{cases} \kappa - \frac{\pi}{2} & : \kappa \geq 0 \\ \kappa + \frac{\pi}{2} & : \kappa < 0 \end{cases} \quad (7)$$

各マーカーを表す画像面上の点をそれぞれ Q_A, Q_B, Q_C, Q_D とし、回転変換前の座標をそれぞれ

$(U_A, V_A), (U_B, V_B), (U_C, V_C), (U_D, V_D)$ とし回転変換後の座標をそれぞれ $(U'_A, h), (U'_B, h), (U'_C, h), (U'_D, h)$ とする。ここで視点 P_E から式(5)の直線までの距離を f' とすると、 f' についての6次方程式が定まる(付録B参照)。

$$k_6 f'^6 + k_5 f'^5 + k_4 f'^4 + k_3 f'^3 + k_2 f'^2 + k_1 f' + k_0 = 0 \quad (8)$$

但し

$$\begin{aligned} a_1 &= U'_A U'_B U'_C - U'_B U'_C U'_D + U'_C U'_D U'_A - U'_D U'_A U'_B \\ a_2 &= U'_A U'_B + U'_B U'_C + U'_C U'_D + U'_D U'_A - U'_A U'_C - U'_B U'_D \\ a_3 &= (U'_D - U'_A)(U'_B - U'_C) \\ a_4 &= (U'_A - U'_B)(U'_C - U'_D) \end{aligned} \quad (9)$$

としたとき、係数 $k_1 \sim k_6$ は、

$$\begin{aligned} k_6 &= U'_A - U'_B + U'_C - U'_D \\ k_5 &= a_3 - a_4 \\ k_4 &= a_1 + a_2 k_6 \\ k_3 &= (U'_A U'_B + U'_C U'_D) a_3 - (U'_D U'_A + U'_B U'_C) a_4 \\ k_2 &= a_1 a_2 + U'_A U'_B U'_C U'_D k_6 \\ k_1 &= U'_A U'_B U'_C U'_D k_5 \\ k_0 &= U'_A U'_B U'_C U'_D a_1 \end{aligned} \quad (10)$$

である。式(8)をNewton法で解いて f' を求めると、焦点距離 f は次式で定められる。

$$f = [f'^2 - h^2]^{1/2} \quad (11)$$

3.2. 回転角の算出

f' が定まると、回転変換後の各マーカーの画像面上の座標を用いて回転角 θ が求められる。

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{(f'^2 + U'_B U'_D)(U'_A - U'_C)}{(f'^2 + U'_A U'_C)(U'_B - U'_D)} \right\} \quad (12)$$

3.3. 変換行列の算出

XZ平面上に視点 P_E と式(5)の直線が存在することより、XZ平面の式は、

$$U \cos \kappa + V \sin \kappa - \frac{h}{f} (N + f) = 0 \quad (13)$$

となり、その法線ベクトルとして e_r の各要素が、

$$t_2 = \frac{\cos \kappa}{b_1}, \quad t_6 = \frac{\sin \kappa}{b_1}, \quad t_{10} = -\frac{h}{fb_1} \quad (14)$$

と定まる。但し

$$b_1 = \pm [1 + \frac{h^2}{f^2}]^{1/2} \quad (15)$$

であり、 b_1 の符号は $t_6 \geq 0$ となるように選ぶ。

また、 f', θ と回転変換後の各マーカーの画像面上の座標より点 $Q_w = (U_w, V_w)$ をN軸廻りに ϕ だけ回転したときの座標 (U'_w, h) について、

$$U'_w = \frac{(c_1 - c_2)f'}{2(c_3 - c_4)} \quad (16)$$

となる(付録C参照)。但し

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(U'_B + U'_D)f' - 2U'_B U'_D \tan \theta}{2f' \tan \theta + U'_B + U'_D} \\ c_2 &= \frac{(U'_A + U'_C)f' \tan \theta + 2U'_A U'_C}{(U'_A + U'_C) \tan \theta - 2f'} \\ c_3 &= \frac{(U'_A U'_C - f'^2) \tan \theta - (U'_A + U'_C)f'}{(U'_A + U'_C) \tan \theta - 2f'} \\ c_4 &= \frac{U'_B U'_D - f'^2 + (U'_B + U'_D)f' \tan \theta}{2f' \tan \theta + U'_B + U'_D} \end{aligned} \quad (17)$$

Q_w が定まると、Z軸が直線 $P_E Q_w$ と一致することより、その方向ベクトルとして e_z の各要素が、

$$t_3 = \frac{U_w}{b_2}, \quad t_7 = \frac{V_w}{b_2}, \quad t_{11} = \frac{f}{b_2} \quad (18)$$

と定まる。但し b_2 は次式より求める。

$$b_2 = [U_w^2 + V_w^2 + f^2]^{1/2} \quad (19)$$

e_y と e_z が定めれば、 e_x はその外積として求められるので、 e_x の各要素は次のように定まる。

$$\begin{aligned} t_1 &= t_6 t_{11} - t_7 t_{10}, \quad t_5 = t_3 t_{10} - t_2 t_{11}, \\ t_9 &= t_2 t_7 - t_3 t_6 \end{aligned} \quad (20)$$

最後に点 P_w の各要素が、

$$t_{12} = \frac{t_9 d_1 + t_1 d_2}{d_3} \cos \theta - \frac{t_9 d_2 - t_1 d_1}{d_3} \sin \theta - f$$

$$t_4 = \frac{U_w}{f} (f + t_{12}), \quad t_8 = \frac{V_w}{f} (f + t_{12}) \quad (21)$$

と定まる(付録D参照)。但し

$$d_1 = U_B - U_D, \quad d_2 = U_A - U_C, \quad d_3 = U_A - U_B + U_C - U_D \quad (22)$$

尚、点 P_C の各要素は次式より求められる。

$$\begin{aligned} t_{13} &= -(t_1 t_4 + t_5 t_8 + t_9 t_{12}) \\ t_{14} &= -(t_2 t_4 + t_6 t_8 + t_{10} t_{12}) \\ t_{15} &= -(t_3 t_4 + t_7 t_8 + t_{11} t_{12}) \end{aligned} \quad (23)$$

キャリブレーションの精度は、得られた変換行列を用いて画像面上のマーカー座標の理論値を求め、実際の計測値と比較してずれを求めて評価する。実際の測定では、複数の回転角の画像についてキャリブレーションを行い、ずれが最小となるパラメータを選択する。

4. 計測結果

キャリブレーションは、回転台の回転角が $5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ の場合のパラメータより最適値を求めた。その結果得られた変換行

列を用いて、任意の回転角におけるマーカー座標の理論値と計測値のずれを求めた結果、最大でも1画素程度であることを確認した。

また、回転台を $5.0^\circ \pm 0.05^\circ$ ずつ回転させて、回転角の差を測定する操作を一回転分行った結果、平均 5.09° 、標準偏差 0.14° を得た。

次に、 $\theta_a = 5^\circ$ として、 50 ± 0.05 mm間隔の格子点について3次元座標を計測し、2点間の距離を求める操作を10回行った結果、水平方向の格子間では平均 50.57 mm、標準偏差 0.20 mm、垂直方向の格子間では平均 49.83 mm、標準偏差 0.36 mmを得た。その際の探索範囲の線分の長さは、 640×400 画素の画面において、およそ45画素であった。尚、回転台の直径は40cmである。

5. 考察

マーカー座標のずれは主にレンズの歪の影響によるものと考えられる。また、テーブル回転角の算出精度については、回転角によって、画像上でマーカーが重なったり、非常に接近してしまう場合があり、その時の算出値の誤差が大きかった。3次元座標算出について、水平方向と垂直方向で値が異なるのは、アスペクト比の誤差によるものと思われる。

6. まとめ

1台のカメラを用いて回転台上の物体を計測する方法について、物体の存在範囲を回転軸を中心とする円柱面内に限定することで、回転後の画像における対応点探索の範囲が線分上に限定されることを用いた計測の原理を示した。また、カメラの視点と回転台上面が同一平面上に存在するようにカメラの位置を拘束すると、カメラキャリブレーションが可能であることを示した。

座標の算出法、キャリブレーション法の何れも、算出精度の向上を図る必要がある。また、より複雑な対象について計測する際の探索範囲上での対応問題や、滑らかな曲面のように対応点が生じない部分の計測法について検討を行う必要がある。

文 献

- (1) Ardeshir Goshtasby: "Stereo Correspondence by Selective Search", 情報学コンピュータビジョン研報, 61-4(1989)

(2) 高橋裕信, 富田文明: "ステレオカメラのセルフキャリブレーション", 情報学コンピュータビジョン研報, 63-5(1989)

(3) Reimar K.L. and Roger Y.T.: "Techniques for Calibration of the Scale Factor and Image Center for High Accuracy 3-D Machine Vision Metrology", IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., 10, 5, pp.713-720(1988)

(4) 小野寺康浩, 金谷健一: "計算射影幾何学によるカメラキャリブレーション", 情報学コンピュータビジョン, 68-1(1990)

付録A: 探索範囲の線分の両端点の算出

回転軸を中心とする半径Rの円柱面は,

$$X^2 + Z^2 = R^2, Y \geq 0 \quad (A1)$$

である。視点 $P_E = \langle X_E, Y_E, Z_E \rangle$ と、画像面上の特徴点 $Q = \langle X_Q, Y_Q, Z_Q \rangle$ を通る直線 $P_E Q$ は,

$$\frac{X - X_E}{g_x} = \frac{Y - Y_E}{g_y} = \frac{Z - Z_E}{g_z} \quad (A2)$$

但し $\langle g_x, g_y, g_z \rangle$ は直線 $P_E Q$ の方向ベクトルであり,

$$\begin{aligned} g_x &= X_Q - X_E = U_Q t_1 + V_Q t_5 + f t_9 \\ g_y &= Y_Q - Y_E = U_Q t_2 + V_Q t_6 + f t_{10} \\ g_z &= Z_Q - Z_E = U_Q t_3 + V_Q t_7 + f t_{11} \end{aligned} \quad (A3)$$

式(A2)中の X, Z を Y で表わし、式(A1)に代入して2次方程式を解くと,

$$Y = \frac{m_2 \pm [R^2 g_y^2 m_1 - m_3^2]^{1/2}}{m_1} \quad (A4)$$

但し

$$\begin{aligned} m_1 &= U_Q^2 + V_Q^2 + f^2 - (U_Q t_2 + V_Q t_6 + f t_{10})^2 \\ m_2 &= V_Q f \{ t_8 t_{10} + t_6 (t_{12} + f) \} - f_2 \{ t_2 t_4 + t_6 t_8 \} \\ m_3 &= U_Q^2 t_2 \{ t_8 t_{10} - t_6 (t_{12} + f) \} \\ &\quad - V_Q t_6 \{ t_4 t_{10} - t_2 (t_{12} + f) \} \\ &\quad - U_Q V_Q \{ t_2 t_4 t_{10} - t_6 t_8 t_{10} - (t_2^2 - t_6^2) (t_{12} + f) \} \\ &\quad + U_Q f \{ t_2 t_4 t_6 - (t_2^2 - t_{10}^2) t_8 - t_6 t_{10} (t_{12} + f) \} \\ &\quad + V_Q f \{ (t_6^2 - t_{10}^2) t_4 - t_2 t_6 t_8 + t_2 t_{10} (t_{12} + f) \} \\ &\quad + f_2 t_{10} (t_4 t_6 - t_2 t_8) \end{aligned} \quad (A5)$$

式(A4)の解を Y_{P1}, Y_{P2} ($Y_{P1} \leq Y_{P2}$)として、式(A2)に代入すると2点 $P_1 = \langle X_{P1}, Y_{P1}, Z_{P1} \rangle$, $P_2 = \langle X_{P2}, Y_{P2}, Z_{P2} \rangle$ が定まる。

付録B: 視点から回転台上面を表わす画像面上の直線までの距離についての6次方程式の導出

視点 P_E と各マーカー、各マーカーを表わす画

像面上の点は全て XZ 平面上にあり，図 B1 のような関係にある．ここで，点 O は式 (6) の回転変換後に $U' = 0$ となる点である．今，次式を満たす角 δ_o ， δ_A ， δ_B ， δ_C ， δ_D を定める．

$$\begin{aligned} \tan \delta_o &= \frac{U_w'}{f'}, \quad \tan \delta_A = \frac{U_A'}{f'}, \quad \tan \delta_B = \frac{U_B'}{f'} \\ \tan \delta_C &= \frac{U_C'}{f'}, \quad \tan \delta_D = \frac{U_D'}{f'} \end{aligned} \quad (B1)$$

ここで，視点 P_E とマーカー A の関係を見ると，

$$\tan(\delta_A - \delta_o) = \frac{R \sin \theta}{\ell - R \cos \theta} \quad (B2)$$

左辺に加法定理を適用すると，

$$\begin{aligned} \tan(\delta_A - \delta_o) &= \frac{\tan \delta_A - \tan \delta_o}{1 + \tan \delta_A \tan \delta_o} \\ &= \frac{U_A' - f' \tan \delta_o}{f' + U_A' \tan \delta_o} \end{aligned} \quad (B3)$$

式 (B2)，(B3) より $\tan \delta_o$ について解くと，

$$\tan \delta_o = \frac{f' R \sin \theta - U_A' (\ell - R \cos \theta)}{f' (\ell - R \cos \theta) + U_A' R \sin \theta} \quad (B4)$$

他のマーカーについても同様にして，

$$\tan \delta_o = \frac{f' R \cos \theta - U_B' (\ell + R \sin \theta)}{f' (\ell + R \sin \theta) + U_B' R \cos \theta} \quad (B5)$$

$$\tan \delta_o = -\frac{f' R \sin \theta + U_C' (\ell + R \cos \theta)}{f' (\ell + R \cos \theta) - U_C' R \sin \theta} \quad (B6)$$

$$\tan \delta_o = -\frac{f' R \cos \theta + U_D' (\ell - R \sin \theta)}{f' (\ell - R \sin \theta) - U_D' R \cos \theta} \quad (B7)$$

式 (B4)～(B7) より $\tan \delta_o$ ， ℓ ， $R \cos \theta$ ， $R \sin \theta$ を消去し， f' を U_A' ， U_B' ， U_C' ， U_D' だけで表わすと，式 (8) の 6 次方程式が得られる．

付録 C : ワールド座標原点を表わす画像面上の特徴点の算出

式 (B4) の左辺に式 (B1) 中の $\tan \delta_o$ を代入し，変形すると，

$$\frac{R}{\ell} = \frac{(U_A' - U_w') f'}{(f'^2 + U_A' U_w') \sin \theta + (U_A' - U_w') f' \cos \theta} \quad (C1)$$

式 (B5)～(B7) についても同様にして，

$$\frac{R}{\ell} = \frac{(U_B' - U_w') f'}{(f'^2 + U_B' U_w') \cos \theta - (U_B' - U_w') f' \sin \theta} \quad (C2)$$

$$\frac{R}{\ell} = \frac{-(U_C' - U_w') f'}{(f'^2 + U_C' U_w') \sin \theta + (U_C' - U_w') f' \cos \theta} \quad (C3)$$

$$\frac{R}{\ell} = \frac{-(U_D' - U_w') f'}{(f'^2 + U_D' U_w') \cos \theta - (U_D' - U_w') f' \sin \theta} \quad (C4)$$

式 (C1) と式 (C3)，式 (C2) と式 (C4) を連立すると， U_w' についての 2 次方程式が 2 つ定まる．それらより $U_w'^2$ の項を消去すると式 (16) が得られる．

付録 D : ワールド座標系原点の算出

視点 P_E と画像面上の点 Q を通る直線は，

$$\frac{U}{U_Q} = \frac{V}{V_Q} = \frac{N+f}{f} \quad (D1)$$

これを変形して，

$$\begin{aligned} fU - U_Q N &= U_Q f \\ fV - V_Q N &= V_Q f \end{aligned} \quad (D2)$$

空間中の点 P について，式 (1) よりカメラ座標をもとめ，式 (D2) に代入すると，

$$\begin{cases} (X_P t_1 + Y_P t_2 + Z_P t_3 + t_4) f \\ -U_Q (X_P t_1 + Y_P t_2 + Z_P t_3 + t_4) \end{cases} = U_Q f \quad (D3)$$

ここで， $r_c = R \cos \theta$ ， $r_s = R \sin \theta$ と表わすと，各マーカーの座標は， $A = \langle r_s, 0, -r_c \rangle$ ， $B = \langle r_c, 0, r_s \rangle$ ， $C = \langle -r_s, 0, r_c \rangle$ ， $D = \langle -r_c, 0, -r_s \rangle$ であるから，

$$\begin{aligned} f(r_s t_1 - r_c t_3 + t_4) - U_A(r_s t_1 - r_c t_3 + t_4) &= U_A f \\ f(r_c t_1 + r_s t_3 + t_4) - U_B(r_c t_1 + r_s t_3 + t_4) &= U_B f \\ f(r_s t_1 - r_c t_3 - t_4) - U_C(r_s t_1 - r_c t_3 - t_4) &= -U_C f \\ f(r_c t_1 + r_s t_3 - t_4) - U_D(r_c t_1 + r_s t_3 - t_4) &= -U_D f \end{aligned} \quad (D4)$$

連立方程式 (D4) を t_{12} について解くと式 (21) が得られる．

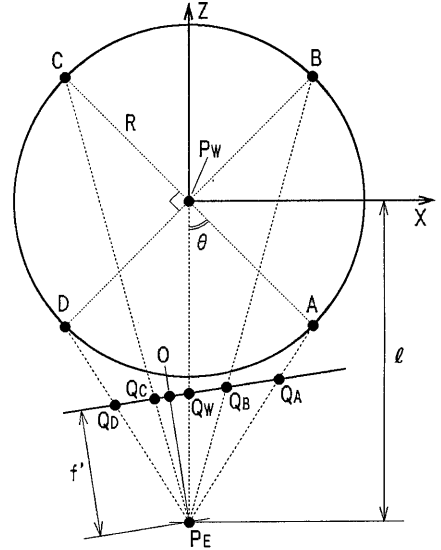


図 B1 XZ 平面上のマーカーの配置