コンピュータビジョン 81－5
（1993. 1. 21）

高度情報処理の展望

広島大学　総合科学部
磯道義典

内容

Perspective for High-Grade Information Processing

Hiroshima University
Integrated Atrs & Sciences
ISOMICHI Yoshinori

Contents

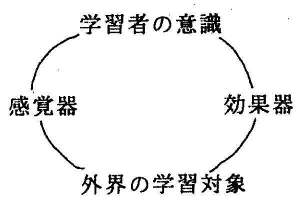
外界とのやり取りの大切さ

高度な情報処理を行わせるためには全てをプログラムで指示するなどと言うやり方は現実的でない。機械にも相当部分を自習してもらう必要がある。所謂自己組織化や学習機能が必要であると言うことである。これまでの機械は計算機と言われるように本質的に計算を行う為の機械であった。数の計算や記号の処理は人間にしか出来ないから一見高級そうに見られた時代もある。しかしこれらの作業を人が行う場合は相当無理をして実行している。人間に自然に備わった能力では無いが故に意識を集中してしか実施出来ない。人間が他の動物を凌駕したキーポイントは確かにこの点にあるがしかしこの能力はコンピュータでもやれるし寧ろコンピュータが最も得意とするところである。

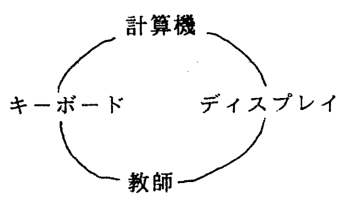
人間の作業の中には意識して実施されるものと無意識下で実施されるものとがある。計算や記号操作は意識下でしかもシーケンシャルにしか行いえない。しかし自動車の運転、パターンの認識や言葉を喋る様な作業は他の意識的作業をしながらでも実行出来る。無論時々時分割的に注意をそちらに向けてやる事は必須であるが相当部分を無意識下での作業として実施しているように思われる。

計算や記号操作は学校でデスクワークとして習うことの出来るものであるが自動車の運転、パターンの認識、言語の操作は実地に訓練する以外に習い覚える方法は無いようである。また後者の修得にはより長い訓練の時間を必要とするように思われる。

人間のより根源的な能力の修得には感覚作用（観測）と行動作用（アクション）の両方が必要でしかもこれらが学ぶ者の意識と外界の他者とを含めてループを形成していないとならないように思われる。



このReceptorとActuatorの連鎖を現在の研究で利用する事は甚だ困難であるがしかし唯一これを簡単に実現する方法がある。これはキーボードとディスプレイを機械の感覚器と効果器に対比させこれにより学習機械の研究を行うことである。



このタイプの連鎖を始めて積極的に利用した研究者は多分ＳＨＲＤＬＵを構成した Winograd であろう。ただ彼の場合にはディスプレイ上には文字ばかりでなく描画も取り入れており学習対象は教師と言うより寧ろ普通の人と言った方が適切かもしれない。後のページで述べる機械による言語学習においては文字だけのディスプレイでも事足りよう。

非演繹の階層

演繹推論はＮＰ完全ではあっても機械には一応可能である。しかしパターン認識や学習となるとはたしてそれらは可能なのであろうか。文字を読み取る機械もあれば学習機械と呼ばれるものも相当多数提案されているが、人間と互角の能力を持っているとはとても思えない。

そこで人間の能力のうちで高級な部類に属すると考えられる種々の能力について考えて見たい。まず発見などの独創能力がある。これは身の周りに存在する種々の出来事のうちのある特定例に対してそれを説明する原理を見つけ出して来るものである。ニュートンはリンゴの落ちるのを見て万有引力を発見したと言われている。外界の例の絞り込みと原理の確立とは密接不可分と言えよう。逆に言えば外界にある特定例を絞り込むことそのものが独創には重要なこととも言える。更に独創の困難な原因はそもそもそこに原理が存在するかどうかも保証の限りではないことである。

一方他国ないしは他メーカでこれこれの発見をしたとか発明をしたとかの知らせを受けてそれを追いかける場合には、少なくともその原理の存在だけは保証されていることになり問題の困難さが大幅に減少していることになる。私はこのような知的活動に追創と名付けようと思う。この追創の場合には原理の存在の保証の上に更にどういう対象についての原理であるかも分かっていることが多い。言わば正の例が与えられた上でその原理の存在も保証されているのである。

一方帰納（Induction）と呼ばれる思考形態がある。これは　１、３、５、・・・と来ればこの一般公式は　２×ｎ－１　と推定するような推測である。この場合には与えられる例は全て正しい例であり言わば正の例と言える。また一般公式も多項式等の簡単なものであることが暗に想定されている。最近の帰納的学習の研究から原理の存在の保証とそれら原理の存在領域がある有限性を持ったものであることが帰納が行えための必須条件であることがわかってきた。

所謂パターンの学習は基本的に正の例によって行われる。我々人間は記述的にはその認識原理の枠を表現出来ないがしかし相当に狭い領域の中においてそれを特定しているものと思われる。当然ここで言う原理は従来我々が持っている概念とは大きく異なる範疇に属する可能性がある。現段階ではニューロの感じと言って良さそうに思われる。

最後に学校で言うところの学習について見ておくと、これは正しい例を提示したうえでその原理を述べることによって現象の全体像を掴ませようとするものである。帰納法的に正の例を示して原理を見出させる形の教育も試みられているようだが忙しい現代の大量の知識を詰め込むには適していないようである。この学習方式でも教え手が悪いと例と原理の因果関係が掴めずしばらく考えて始めてその関係が分かったりするものである。この場合は悪い教師が小さな発見を誘導していることになり良い教育効果を上げているとも言えよう。

以上をまとめて表にすると次のように対比化して表せる。

独創－－－－－－－－印のない例・・・原理の存在保証されず
追創－－－－－－－－正の例・・・・・原理の存在は保証されている
帰納－－－－－－－－正の例・・・・・原理の存在範囲が限定されている
パターン学習－－－正の例・・・・「原理」の特定
「学習」－－－－－－－正の例・・・・・特定された原理も提示

この分類の中で機械にシミュレート可能なものは下位三つではないかと考えている。特に最近の帰納学習の理論は我々に重要な知見を与えたと言わざるをえない。

言語の学習

帰納学習において典型的な対象は正規言語（ｒｌ）や文脈自由言語（ｃｆｌ）である。これらはその性質が良く分かっているとともに各言語の表現が簡潔に出来る点で優れている。我々の使用する言語のモデルを検討する中から生まれたこれらの概念はどれもリカーシブな表現を使って無限の文を生成出来るようになっている。しかし我々の使用する自然言語は決して無限の文を必要とはしていない。ある有限種類の文で事足りる。このことはたとえ句構造言語と言えども表現を経済化するための近似であると考えるべきであろう。特にそのリカーシブ表現には強い人為性が潜んでいると言うべきであろう。

まず正規言語、文脈自由言語や句構造言語の標準形を示しておこう。

正規言語の表現

$A \Rightarrow aB$	$A, B \in N$
$A \Rightarrow a$	$a \in \Sigma$

文脈自由言語（Chomsky標準形）

$A \Rightarrow BC$	$A, B, C \in N$
$A \Rightarrow a$	$a \in \Sigma$

句構造言語（Penttonenの標準形）

$A \Rightarrow BC$	$A, B, C \in N$
$A \Rightarrow a$	$a \in \Sigma$
$AB \Rightarrow AC$	εは空列
$A \Rightarrow \varepsilon$	

各表現においてリカーシブ表現は第一行のタイプのものだけに限定される。無限の文はこのタイプの存在によってのみ表れてくる。

いま単語集合Σはギブンとすれば句概念集合Ｎがある有限数で抑えられるならば上記のどの言語も有限種類しか存在しないことになる。我々の扱う言語はプログラム言語であろうと自然言語であろうと有限の文概念しか持ちえないはずである。我々の頭脳は有限の容量しか持っていないからである。各言語が無限種類存在する理由はいつにかかってそれらの言語を定義する書換え規則の数が任意有限個であることによっている。この場合書き換え規則数の上限は無限大になってしまうからである。

言語が有限種類しか存在しない場合にはその中のある特定の文法から生成される正の例によりその言語を有限時間で特定できる。

形式言語の帰納的学習についての結果を述べておこう。単語集合Σに対する可算言語族Ｃについてその言語族の中のある言語Ｌからの正の文列 s_1 s_2 s_3 s_4 ・・・が与えられたとしよう。この時新しく文 s_i が提示される毎に文法 G_i を推定して行きある有限ステップの後に言語Ｌを与える文法Ｇが推定出来る時この言語族は学習可能であると言う。

正規言語族は正の例からは学習可能でない。［E. M. Gold, 1967］
言語Ｌから正の例が与えられているとしてこのＬを含む他の言語とＬとを正の例によっては区別出来ないからである。

書き換え規則が　$\alpha \Rightarrow \beta$　　α、$\beta \in (\Sigma \cup N)^{+}$ のタイプであってしかも書換え規則の数がある自然数N_0 以下に限定されている言語族（文脈依存言語族の部分族である）は正の例によって学習可能である。［篠原武，1990］

ここでαやβは有限列であるが長さにおいて有界ではないので句概念集合Nが固定されていてもここで定義された言語族は無限族である。

<u>多層学習機構</u>

１９６０年代は学習機械の全盛期であった。所謂パーセプトロンの時代と呼べる。多層の学習機構も多数提案されたがシミュレーションでうまく行ったとの報告はあっても他の研究者がそれを利用できるほどには役立つものではなかった。パーセプトロンの時代は本質的に学習層一層の時代であった。私の提案した浮遊円板法なども学習層一層の学習機構であった。

当時から二層、三層の学習機構を構成するための良い原理の必要性は痛感されていたのであるが誰もそれを見出すことが出来なかった。ルーメルハート等によるバックプロパゲーション法が示されて始めてなあんだこんなことだったのかと納得したわけである。

学習機械 [Learning machine]

<u>1] Perceptron</u> [one layer]

$$y_j^{(n)} \xrightarrow[\underline{w}_j^{(n)}]{} \zeta^{(n)} \xrightarrow[\mathrm{sgn}]{} z^{(n)}$$

$\zeta^{(n)} = \sum_j y_j^{(n)} w_j^{(n)}$　　　　[n:時刻]

$z^{(n)} = \mathrm{sgn}(\zeta^{(n)})$

$w^{(n+1)} = w_j^{(n)} + a \cdot y_j^{(n)} \cdot (r^{(n)} - z^{(n)})$　　　　[$a>0$]　　固定増分訂正法

$\uparrow$

教師情報

(1 or −1)　　　$\sum_j y_j^{(n)} w_j^{(n+1)} = \sum_j y_j^{(n)} w_j^{(n)} + a \cdot \sum_j y_j^{(n)} y_j^{(n)} (r^{(n)} - z^{(n)})$

<u>2] Back-Propagation Method</u> [two iayer]

$$x_i^{(n)} \xrightarrow[\underline{v}_{ij}^{(n)}]{} \eta_j^{(n)} \xrightarrow[h]{} y_j^{(n)} \xrightarrow[\underline{w}_j^{(n)}]{} \zeta^{(n)} \xrightarrow[h]{} z^{(n)}$$

$\eta_j^{(n)} = \sum_i x_i^{(n)} v_{ij}^{(n)}$　　　　$\zeta^{(n)} = \sum_j y_j^{(n)} w_j^{(n)}$　　　　$h'(x) > 0$

$y_j^{(n)} = h(\eta_j^{(n)})$　　　　$z^{(n)} = h(\zeta^{(n)})$

$\beta_j^{(n)} = h'(\eta_j^{(n)})\, w_j^{(n)} \gamma^{(n)}$　　　　$\gamma^{(n)} = h'(\zeta^{(n)})\,(r^{(n)} - z^{(n)})$　　[here back propagation]

$v_{ij}^{(n)} = v_{ij}^{(n)} + a \cdot x_i^{(n)} \beta_j^{(n)}$　　　　$w_j^{(n)} = w_j^{(n)} + a \cdot y_j^{(n)} \gamma^{(n)}$

$h(x) = \tanh(x)$　　　　[例えば]

$h'(x) = dh(x)/dx = 1 - \tanh^2(x) = (1 - h(x))(1 + h(x))$

3] <u>Back-Propagation Method</u> [three layer]

$$s_m^{(n)} \xrightarrow{\underline{u}_{mi}^{(n)}} \xi_i^{(n)} \xrightarrow{h} x_i^{(n)} \xrightarrow{\underline{v}_{ij}^{(n)}} \eta_j^{(n)} \xrightarrow{h} y_j^{(n)} \xrightarrow{\underline{w}_j^{(n)}} \zeta^{(n)} \xrightarrow{h} z^{(n)}$$

$$\xi_i^{(n)} = \sum_m s_m^{(n)} u_{mi}^{(n)} \qquad \eta_j^{(n)} = \sum_i x_i^{(n)} v_{ij}^{(n)} \qquad \zeta^{(n)} = \sum_j y_j^{(n)} w_j^{(n)}$$

$$x_i^{(n)} = h(\xi_i^{(n)}) \qquad y_j^{(n)} = h(\eta_j^{(n)}) \qquad z^{(n)} = h(\zeta^{(n)})$$

$$\alpha_i^{(n)} = \sum_j h'(\xi_i^{(n)}) v_{ij}^{(n)} \beta_j^{(n)} \qquad \beta_j^{(n)} = h'(\eta_j^{(n)}) w_j^{(n)} \gamma^{(n)} \qquad \gamma^{(n)} = h'(\zeta^{(n)})(r^{(n)} - z^{(n)})$$

$$u_{mi}^{(n+1)} = u_{mi}^{(n)} + a \cdot s_m^{(n)} \alpha_i^{(n)} \qquad v_{ij}^{(n+1)} = v_{ij}^{(n)} + a \cdot x_i^{(n)} \beta_j^{(n)} \qquad w_j^{(n+1)} = w_j^{(n)} + a \cdot y_j^{(n)} \gamma^{(n)}$$

$$E = (r - z)^2/2$$

$$\partial E/\partial w_j = \partial E/\partial \zeta \; \partial \zeta/\partial w_j$$

$$\partial \zeta/\partial w_j = (\partial/\partial w_j) \sum_j y_j w_j = y_j$$

$$\partial E/\partial \zeta = \partial E/\partial z \; \partial z/\partial \zeta = -(r - z)\, \partial z/\partial \zeta = -(r - z)\, h'(\zeta) = -\gamma$$

$$\partial E/\partial w_j = -\gamma\, y_j = -(r - z)\, h'(\zeta)\, y_j$$

$$\Delta w_j = -a\, \partial E/\partial w_j = a \gamma\, y_j \qquad [a>0]$$

$$\partial E/\partial v_{ij} = \partial E/\partial \eta_j \; \partial \eta_j/\partial v_{ij}$$

$$\partial \eta_j/\partial v_{ij} = (\partial/\partial v_{ij}) \sum_i x_i v_{ij} = x_i$$

$$\partial E/\partial \eta_j = \partial E/\partial y_j \; \partial y_j/\partial \eta_j = \partial E/\partial y_j\, h'(\eta_j)$$

$$\partial E/\partial y_j = \partial E/\partial \zeta \; \partial \zeta/\partial y_j = \partial E/\partial \zeta \; (\partial/\partial y_j) \sum_j y_j w_j = \partial E/\partial \zeta \; w_j$$

$$\partial E/\partial \eta_j = \underbrace{\partial E/\partial \zeta}_{-\gamma}\; w_j\, h'(\eta_j), \qquad \partial E/\partial \eta_j = -\beta_j$$

$$\Delta v_{ij} = -a\, \partial E/\partial v_{ij} = a \beta_j\, x_i$$

$$\partial E/\partial u_{mi} = \partial E/\partial \xi_i \; \partial \xi_i/\partial u_{mi}$$

$$\partial \xi_i/\partial u_{mi} = (\partial/\partial u_{mi}) \sum_m s_m u_{mi} = s_m$$

$$\partial E/\partial \xi_i = \partial E/\partial x_i \; \partial x_i/\partial \xi_i = \partial E/\partial x_i\, h'(\xi_i)$$

$$\partial E/\partial x_i = \sum_j \partial E/\partial \eta_j \; \partial \eta_j/\partial x_i = \sum_j \partial E/\partial \eta_j \; (\partial/\partial x_i) \sum_i x_i v_{ij} = \sum_j \partial E/\partial \eta_j\, v_{ij}$$

$$\partial E/\partial \xi_i = \sum_j \underbrace{\partial E/\partial \eta_j}_{-\beta_j}\; v_{ij}\, h'(\xi_i), \qquad \partial E/\partial \xi_i = -\alpha_i$$

$$\Delta u_{mi} = -a\, \partial E/\partial u_{mi} = a \alpha_i s_m$$

日本の研究開発体制

情報処理や通信システムの分野において日本の研究成果を眺めて見ると世界のレベルを超えているものは殆ど存在していないのではないだろうか。私が気の付いたものはＨＤＴＶくらいである。特にソフトウエアやマイクロプロセッサ、ローカルエリアネットワーク等の分野では米国に大きく水を空けられていると言わざるをえないように思われる。計算機言語などべらぼうに多数有るのだけれど一つとして日本で発明された物はない。ＬＳＩは日本のおはこなどと言い触らされているがメモリ以外では何ら見るべきものが無い。ＭＰＵにおいてはアメリカの独壇場であり日本のメーカが作っているのはインテルやモトローラのライセンス生産だけである。ＬＡＮにおいても新しい工夫は全て米国でなされており５年程度の遅れを必死で引き離されないように頑張っているに過ぎない。何故このような後進状態に在るのであろうか。大学のダメさ、大企業の二番手主義など多くの人々の合意する所であろう。しかしこの種の指摘は木を見て森を見ない態度と言えよう。産業界と通産省、教育界と文部省と言った大きなシステムそのものの設計がまずいのである。因みにアメリカのインテルやモトローラは日立や東芝のような大企業ではもともとなかったのである。日本でも戦中戦後まもなくは松下のように成り上がりが可能であった。しかし現在はこうした成り上がりが殆ど不可能な社会体制が出来上がってしまっているように思われる。ベンチャーキャピタルの存在もあろう、行政の規制や研究助成の問題も在る。しかし根本問題はそれらの底に流れる考え方にあると思われる。大企業、資金力のあるものが自らの有利性をイジーに保持しつづけるべく図り、また国や国民もそれを不公正として排除することをしようとしないことにある。ベンチャーや小企業にも優れた方針さえあればどんどん発展して行ける土壌を確保することが必要であろう。不公正な手段によって自らの安定を図ることを許さない思想が大切である。ただ大企業等が自らの旨みを守ることそのことを不公正とは思わない鈍感さそのものも敏感に感じられるように感覚を磨かなければならない。

また業界団体が春闘等でトップ交渉と称して低位一律的賃金を決定するのも自由市場の原則に反しておりそれは結局世界レベルの研究開発を不可能とする（現在の大企業は不公正な競争下で不当な利得を得ていると考えられるので賃金水準が低位にあるとは必ずしも即断出来ない）。

同様のことは大学界にも存在している。大大学が自らの地位を安泰化するために諸々の制度を自己に有利なように作り競争を見せかけのものにして仕舞っている。競争において完全に平等な条件は期待すべきではないが、所々に隔離壁を設けて全くの不平等な競争場を作ることは国全体の学術の水準を高める目的からは大きく反している。隔壁の存在は必要悪としてもそこにはある程度大きな穴が空けられていなければならない。

日本の大学はポストドクトラル等の有給の研究員制度が殆ど存在しない。教授や助教授の人数よりずっと多い人数の研究員がいなくてどうして世界レベルの研究が出来ようか。アメリカなどは国外からこの地位を利用して多数の優秀な研究者を雇って隆盛を極めている。研究にはダイヤモンド効果あってある程度の集積がなければ火勢を維持できないのである。無論研究員の給料は教授や学部長が研究費として稼いで来た中から賄うのが基本であって当然である。

に対して $L^{(n)}$ が $\{x^{(n)}\}$ の分布の最良表現部分空間をなすようにせよ．ただし第 n ステップにおいては $x^{(n)}$ だけを使い，それ以前に表われたサンプルは忘却されているものとする．]

この問題に対して多次元空間に浮ぶ円板を想定して以下のような方式を考える．与えられたサンプル点が円板から離れていればそのサンプル点に近づくように円板を少し動かす形式の修正を適用する．$x^{(n)}$ の $L^{(n)}$ 内成分を $y^{(n)}$，$L^{(n)}$ の直交補空間内成分を $z^{(n)}$ とする．このとき上述の修正方式は以下のように具現化される．

$$L^{(n+1)}=[L^{(n)}\ominus\{y^{(n)}\}]\oplus\{u^{(n)}\} \qquad (1)$$

ただし*，$u^{(n)}=y^{(n)}+a_n b(L^{(n)},\ x^{(n)})z^{(n)}$

ここで式 (1) の [ ] 内は円板を回転するための軸に相当する．それゆえ，これを軸空間と呼ぶことにする．

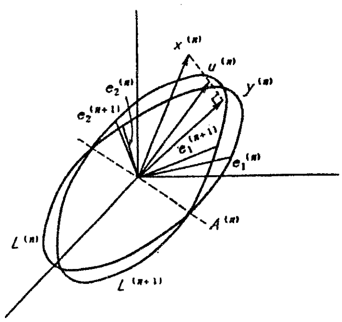


図 1 浮遊円板法の説明図
Fig. 1—Illustrative diagram for floating disk method.

$$A^{(n)}=L^{(n)}\ominus\{y^{(n)}\} \qquad (2)$$

図1は式 (1) のイメージを描きやすくするために三次元空間内の二次元円板として図示したものである．この図では軸空間は一次元である．式 (1) は抽象的には理解しやすいが，$L^{(n)}$ を構成する座標軸が $L^{(n+1)}$ を構成する座標軸へどのように修正されるのかは明りょうでない．それで各ステップにおいて座標軸がどのように修正されるかをみておこう．ベクトル群 $e_1^{(n)}$，$e_2^{(n)}$，…，$e_M^{(n)}$ は $L^{(n)}$ の直交座標系をなしているものとする．図1の三次元での類推から一般的公式を求めよう．まずつぎの事実に着目する．

$$L^{(n)}=A^{(n)}\oplus\{y^{(n)}\}$$
$$L^{(n+1)}=A^{(n)}\oplus\{u^{(n)}\}$$

* $b(L^{(n)}:x^{(n)})$ は $L^{(n)}$ と $x^{(n)}$ に依存したスカラ量，a_n はステップ数 n に依存したスカラ量．また，記号 $\oplus$，$\ominus$ は部分空間どうしの和，差を表わし，スミルノフ：高等数学教程 ⑫ (共立) p. 168 などに詳しい．

これより，$e_k^{(n+1)}$ は $e_k^{(n)}$ の $A^{(n)}$ 内成分を不変に保ち，$e_k^{(n)}$ の $y^{(n)}$ 方向成分を大きさ不変で $u^{(n)}$ 方向に改めればよいであろう．すなわち

$$\left.\begin{aligned} e_k^{(n)}&=\frac{(e_k^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|}\ \frac{y^{(n)}}{|y^{(n)}|}+P_{A^{(n)}}e_k^{(n)} \\ e_k^{(n+1)}&=\frac{(e_k^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|}\ \frac{u^{(n)}}{|u^{(n)}|}+P_{A^{(n)}}e_k^{(n)} \end{aligned}\right\}(*)$$

(ここで $P_{A^{(n)}}$ は部分空間 $A^{(n)}$ への射影作用素)であるから，

$$e_k^{(n+1)}=e_k^{(n)}+\frac{(e_k^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|}\left\{\frac{u^{(n)}}{|u^{(n)}|}-\frac{y^{(n)}}{|y^{(n)}|}\right\} \qquad (3)$$

となる．すべての座標軸 $e_k^{(n+1)}$ が $A^{(n)}\oplus\{u^{(n)}\}$ にのっていることは式 (*) より明らかである．またこれらが直交性を保存していることも以下のようにして確かめられる．

$$\begin{aligned} e_k^{(n+1)}\cdot e_l^{(n+1)}&=e_k^{(n)}\cdot e_l^{(n)} \\ &\quad+\frac{(e_k^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|}\left\{\frac{u^{(n)}}{|u^{(n)}|}-\frac{y^{(n)}}{|y^{(n)}|}\right\}\cdot e_l^{(n)} \\ &\quad+\frac{(e_l^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|}\left\{\frac{u^{(n)}}{|u^{(n)}|}-\frac{y^{(n)}}{|y^{(n)}|}\right\}\cdot e_k^{(n)} \\ &\quad+\frac{(e_k^{(n)}\cdot y^{(n)})(e_l^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|^2}\left|\frac{u^{(n)}}{|u^{(n)}|}-\frac{y^{(n)}}{|y^{(n)}|}\right|^2 \\ &=e_k^{(n)}\cdot e_l^{(n)}+\frac{(e_k^{(n)}\cdot y^{(n)})(u^{(n)}\cdot e_l^{(n)})}{|y^{(n)}|\cdot|u^{(n)}|} \\ &\quad+\frac{(e_l^{(n)}\cdot y^{(n)})(u^{(n)}\cdot e_k^{(n)})}{|y^{(n)}|\cdot|u^{(n)}|} \\ &\quad-2\frac{(e_k^{(n)}\cdot y^{(n)})(e_l^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|^2}\ \frac{(u^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|u^{(n)}|\cdot|y^{(n)}|} \end{aligned}$$

ここで，

$$u^{(n)}=\frac{(u^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|^2}y^{(n)}+\frac{(u^{(n)}\cdot z^{(n)})}{|z^{(n)}|^2}z^{(n)} \qquad (4)$$

と書けること，および $e_k^{(n)}\cdot z^{(n)}=0$ $(k=1,2,\cdots,M)$ が成立することを使えば，

$$e_k^{(n+1)}\cdot e_l^{(n+1)}=e_k^{(n)}\cdot e_l^{(n)} \qquad (5)$$

がえられる．この式 (5) は直交性の保存を表わしている．以上により式 (3) は式 (1) で与えられる修正方式の具体形であることがわかった．そこで，以上を逐次形の計算手順としてまとめるとつぎのようになる．

<u>第0ステップ</u>

$e_k^{(1)}\cdot e_l^{(1)}=\delta_k^l$ となる範囲で適当に $e_k^{(1)}$ $(k=1,2,\cdots,M)$ を与える．

<u>第 n ステップ $(n\geqq 1)$</u>

(1) $y^{(n)}=\sum_{k=1}^{M}(x^{(n)}\cdot e_k^{(n)})e_k^{(n)}$

(2) $z^{(n)}=x^{(n)}-y^{(n)}$

(3) $u^{(n)}=y^{(n)}+a_n b(L^{(n)},\ x^{(n)})z^{(n)}$

(4) $$v^{(n)}=\frac{u^{(n)}}{|u^{(n)}|}-\frac{y^{(n)}}{|y^{(n)}|}$$
$$=\frac{a_n b(L^{(n)},\ x^{(n)})}{|y^{(n)}|\sqrt{1+a_n{}^2b^2r^2}}\cdot\left\{z^{(n)}-\frac{a_n b r^2}{\sqrt{1+a_n{}^2b^2r^2}+1}y^{(n)}\right\}$$

(5) $$e_k{}^{(n+1)}=e_k{}^{(n)}+\frac{(x^{(n)}\cdot e_k{}^{(n)})}{|y^{(n)}|}v^{(n)}$$
$$(k=1,2,\cdots,M)$$

ただし，$r=\dfrac{|z^{(n)}|}{|y^{(n)}|}$

上述のアルゴリズムを表現するにあたって，$x^{(n)}\cdot e_k{}^{(n)}=y^{(n)}\cdot e_k{}^{(n)}$ であることを使った．

次章の証明において必要となるので式 (1) または式 (3) で与えられる修正方式を射影作用素の形で表現しておこう．部分空間 $L^{(n)}$ への射影作用素*を $P^{(n)}$ として

$$P^{(n+1)}=P^{(n)}-\frac{y^{(n)}\otimes y^{(n)}}{|y^{(n)}|^2}+\frac{u^{(n)}\otimes u^{(n)}}{|u^{(n)}|^2} \quad (6)$$

と表わされる．これを以下において証明する．

まず記号 $\otimes$ は直積と呼ばれ，$x\otimes y$ は，$\forall u$ に対して，

$$(x\otimes y)u=(u\cdot y)x$$

で定義される．直積の性質として以下のようなものがあげられる[4]．

1. $(ax+by)\otimes z=a(x\otimes z)+b(y\otimes z)$
2. $(Ax)\otimes(By)=A(x\otimes y)B^*$
3. $(x\otimes y)^*=y\otimes x$
4. $(x\otimes y)(u\otimes v)=(u\cdot y)(x\otimes v)$
5.** $\|x\otimes y\|=|x|\cdot|y|$

(A) まず始めに，$P^{(n)}$ が射影作用素ならば（すなわち，$P^{(n)*}=P^{(n)}$, $P^{(n)}P^{(n)}=P^{(n)}$）$P^{(n+1)}$ もまた射影作用素（すなわち $P^{(n+1)*}=P^{(n+1)}$, $P^{(n+1)}P^{(n+1)}=P^{(n+1)}$）となることをみておこう．$P^{(n+1)*}=P^{(n+1)}$ は式 (6) より明白である．

$$P^{(n+1)}P^{(n+1)}=P^{(n)}P^{(n)}+\frac{(y^{(n)}\otimes y^{(n)})(y^{(n)}\otimes y^{(n)})}{|y^{(n)}|^4}+\frac{(u^{(n)}\otimes u^{(n)})(u^{(n)}\otimes u^{(n)})}{|u^{(n)}|^4}$$
$$-\frac{(y^{(n)}\otimes y^{(n)})(u^{(n)}\otimes u^{(n)})}{|y^{(n)}|^2\cdot|u^{(n)}|^2}-\frac{(u^{(n)}\otimes u^{(n)})(y^{(n)}\otimes y^{(n)})}{|u^{(n)}|^2\cdot|y^{(n)}|^2}$$
$$-\frac{P^{(n)}(y^{(n)}\otimes y^{(n)})}{|y^{(n)}|^2}-\frac{(y^{(n)}\otimes y^{(n)})P^{(n)}}{|y^{(n)}|^2}+\frac{P^{(n)}(u^{(n)}\otimes u^{(n)})}{|u^{(n)}|^2}+\frac{(u^{(n)}\otimes u^{(n)})P^{(n)}}{|u^{(n)}|^2}$$
$$=P^{(n)}+\frac{y^{(n)}\otimes y^{(n)}}{|y^{(n)}|^2}+\frac{u^{(n)}\otimes u^{(n)}}{|u^{(n)}|^2}-2\frac{y^{(n)}\otimes y^{(n)}}{|y^{(n)}|^2}-\frac{(u^{(n)}\cdot y^{(n)})(y^{(n)}\otimes u^{(n)})}{|y^{(n)}|^2\cdot|u^{(n)}|^2}$$
$$-\frac{(y^{(n)}\cdot u^{(n)})(u^{(n)}\otimes y^{(n)})}{|y^{(n)}|^2\cdot|u^{(n)}|^2}+\frac{y^{(n)}\otimes u^{(n)}}{|u^{(n)}|^2}+\frac{u^{(n)}\otimes y^{(n)}}{|u^{(n)}|^2}$$

ここで式 (1) のただし書きと，$y^{(n)}\cdot z^{(n)}=0$ を考慮すれば

$$P^{(n+1)}P^{(n+1)}=P^{(n)}-\frac{y^{(n)}\otimes y^{(n)}}{|y^{(n)}|^2}+\frac{u^{(n)}\otimes u^{(n)}}{|u^{(n)}|^2}=P^{(n+1)}$$

がえられる．

(B) また $L^{(n+1)}$ 内で $u^{(n)}$ に直交する元 x（すなわち $A^{(n)}\ni x$）に対して

$$P^{(n+1)}x=P^{(n)}x$$

が成立する．なぜならば $x\cdot y^{(n)}=0$ であるから．また $u^{(n)}$ に関しては，

$$P^{(n+1)}u^{(n)}=P^{(n)}u^{(n)}-\frac{(u^{(n)}\cdot y^{(n)})}{|y^{(n)}|^2}y^{(n)}+u^{(n)}$$
$$=y^{(n)}-y^{(n)}+u^{(n)}=u^{(n)}$$

が成立する．ここで式 (1) のただし書きと $P^{(n)}z^{(n)}=0$ を使った．よって $P^{(n+1)}$ が式 (1) で与えた部分空間 $L^{(n+1)}$ への射影作用素となっていることが証明された．

3. 浮遊円板法の収束証明

浮遊円板法の収束に関して以下の定理が成立する．

［定理］ **2.** のアルゴリズムにおいて

$$b(L^{(n)},\ x^{(n)})=|y^{(n)}|^2$$

とおいたものは，

(1) $a_n\geqq 0,\ \lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$

(2) x の分布はコンパクトである．すなわち $E[x\otimes x]$ はコンパクト作用素である*．

(3) $E[x\otimes x]$ の固有値（すべて非負）を大きいほうから $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ と番号付けたとき（ただし縮退した固有値もその重複度だけ並べたものとする）

$$\lambda_M>\lambda_{M+1}$$

が成立するならば任意の x に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|P^{(n)}\hat{P}x|}{|\hat{P}x|}=1 \text{ (almost certainly)*}$$

が成立する．ただし $\hat{P}$ は $E[|Px|^2]$ を最大化する M 次元射影作用素である．

* コンパクト作用素とは別名完全連続作用素のことである．条件 (2) はベクトル x の空間が有限次元である場合 $E[|x|^2]$ の有界性と同値となる．