コンピュータビジョン 86－2
（1993. 11. 11）

フローからの３次元推定における最尤推定量が最適ではない証明

† 遠藤利生 † 鳥生 隆 ‡ 田川憲男

†(株) 富士通研究所 ‡ 東京都立大学工学部

オプティカルフローから３次元情報を推定する問題において，観測されたフローの２乗平均誤差を最小にすることで３次元情報（運動パラメータ，奥行き）を推定する方式－最尤推定法－で得られる推定量が最適ではないことを証明する．具体的には，観測点毎に独立な白色雑音がフローに加法的に加わるというノイズモデルの下で観測点の個数が十分大きい場合に，最尤推定量の共分散行列がクラメル・ラオの下界を達成しないことと，最尤推定量よりも共分散行列が小さくなる推定量が存在することを示す．更に，例としてある特別な場合に最尤推定量よりも共分散行列が小さくなるものを実際に構成する．

The Maximum Likelihood Estimator is Not "Optimal" on 3-D Motion Estimation from Noisy Optical Flow

†Toshio Endoh, †Takashi Toriu and ‡Norio Tagawa

†Fujitsu Laboratories Ltd. ‡Tokyo Metropolitan University

We prove that the maximum likelihood estimator for estimating 3-D motion from noisy optical flow is not "optimal". The maximum likelihood estimator minimizes the mean square error of the observed optical flow. We show that the maximum likelihood estimator's covariance matrix does not reach the Cramér-Rao lower bound, and that there is an estimator whose covariance matrix is smaller than that of the maximum likelihood estimator when a Gaussian noise distribution is assumed for a sufficiently large number of observed points. We propose a new estimator whose covariance matrix is smaller than that of the maximum likelihood estimator under certain conditions.

1 はじめに

この論文では，3次元空間中の1つの剛体が運動して作るオプティカルフローから，元の剛体の3次元運動を推定する問題を考える．フローに加わるノイズは観測点毎に各成分毎に独立に分散一定σ^2の正規分布に従うと仮定する．この仮定の下で最尤推定量はフローの2乗平均誤差を最小にする [1]．しかし，フローの2乗平均誤差を表す評価関数は非線形なのでその最小化は簡単ではなく，全数探索や反復解法を必要とする．また，この評価関数を少し変形した評価関数を最小化して3次元情報を推定することも行われてきた [2],[3].

推定される3次元情報の精度は，不偏性と最小分散性の2つの尺度で測られることが多い．不偏性とは推定値の平均が真の3次元運動に一致することであり，最小分散性とは推定値の分散が他の推定量のそれよりも大きくならないことである．これまでに観測点の数が十分多い漸近的なときに不偏になる推定方式はいくつか知られていたが，最小分散性を満たす推定量は知られていなかった．多くの研究者に最尤推定量が漸近的に最小分散性を満たすと思われてきたようである [3],[4],[5].

この論文では，まず問題の定式化を行い，ついで任意の不偏推定量の共分散行列の下界を与えるクラメル・ラオの公式を示す．更に最尤推定量の共分散行列がクラメル・ラオの下界を達成しないことを示す．詳細には，最尤推定量の共分散行列はσ^2項とσ^4項からなり，σ^2項はクラメル・ラオの下界の値と一致するものの半正定値のσ^4項を持つことを示す．ついで，一般化された重みを持つ評価関数を考え，それを最小にする推定量の共分散行列を計算する．この値も，σ^2項とσ^4項からなり，σ^2項は最尤推定量の対応する項（＝クラメル・ラオの下界）よりも小さくはならないことを示す．ただし，ある重みに対してはσ^2項が最尤推定量の対応する項と一致し，更にσ^4項は最尤推定量の対応する項よりも小さくなることを示す．最後に，例としてある特別な場合に対して最尤推定量よりも共分散行列が小さくなるものを実際に構成する．

2 これまでの研究と問題の定式化

オプティカルフローから3次元運動を推定する研究は数多くなされている．ここではまず簡単に問題を定式化する．

投影モデルは，以下の通りとする．まず，剛体の並進速度ベクトルを$\boldsymbol{u}$，回転速度ベクトルを$\boldsymbol{\omega}$とする．視点は原点に固定されているものとし，剛体を焦点距離1の中心投影である投影面に映して観測するものとする．k番目の投影面上の観測点の3次元座標をη_k，その点において観測されるフローをξ_k（ノイズがない場合のフローを$\xi_k^{(0)}$）），その点における外向き単位法線ベクトルをζ_k，その法線に沿って測った剛体までの距離の逆数をν_kとする．このとき次の関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\eta_k \cdot \zeta_k = 1 \\
&\xi_k^{(0)} = \zeta_k \times [\nu_k(\boldsymbol{u} \times \eta_k) + (\boldsymbol{\omega} \times \eta_k) \times \eta_k]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，$\cdot$は内積を$\times$は外積を表す．なお，このモデルはその特別な場合として投影面が平面$Z = 1$と単位球面である場合を含む．

フローに加わるノイズのモデルは以下の通りとする．観測点毎に独立にζ_kに直交する2成分に独立に平均0分散σ^2の正規分布に従うノイズが加わると仮定する．ノイズはζ_kに平行な方向には加わらないとする．故に，$\xi_k \cdot \zeta_k = 0$が成り立つ．また，フローの共分散行列$V[\xi_k]$は$\sigma^2 N_k = \sigma^2(I_3 - \zeta_k\zeta_k^t)$になる．ただし，$I_3$は$3\times 3$の単位行列を$\zeta_k^t$は$\zeta_k$の転置を表す．

ここで，フローをζ_kに直交する次の2成分に分解する．1つはその平均が運動パラメータにのみ依存する成分（ベクトル$\boldsymbol{u}_k^{\perp} = \{\zeta_k \times (\boldsymbol{u} \times \eta_k)\} \times \zeta_k$に平行な成分）で，もう1つは平均が$\nu_k$にも依存する成分である（ベクトル$\boldsymbol{u}_k = \zeta_k \times (\boldsymbol{u} \times \eta_k)$に平行な成分）．それぞれの方向の単位ベクトルを$\zeta_{k,1}$, $\zeta_{k,2}$とする．よって次の関係を得る．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k^{\perp} = 0 \\
&\|\boldsymbol{u}_k\| = \|\boldsymbol{u}_k^{\perp}\| \\
&\xi_{k,1} = \zeta_{k,1} \cdot \xi_k = \{(\boldsymbol{u} \times \eta_k) \cdot \xi_k\}/\|\boldsymbol{u}_k\| \\
&\xi_{k,1}^{(0)} = \{(\boldsymbol{u} \times \eta_k) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \eta_k)\}/\|\boldsymbol{u}_k\| \\
&\xi_{k,2} = \zeta_{k,2} \cdot \xi_k \\
&\xi_{k,2}^{(0)} = \nu_k\|\boldsymbol{u}_k\| + \zeta_{k,2} \cdot (\zeta_k \times \boldsymbol{\omega}_k)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで，$\boldsymbol{\omega}_k = (\boldsymbol{\omega} \times \eta_k) \times \eta_k$を表す．これより，フローの確率密度関数$f^{(k)}$は次式で表せる．

$$
f^{(k)}(\xi_k) = constant{\cdot}\exp[-\frac{|\xi_{k,1} - \xi_{k,1}^{(0)}|^2 + |\xi_{k,2} - \xi_{k,2}^{(0)}|^2}{2\sigma^2}]
\tag{3}
$$

フローの観測値が与えられたときに$\prod_k f^{(k)}$を最大にする$\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\nu_k}$が最尤推定量である．これは Adiv によって研究された [1]．$\hat{\nu_k}$は$\xi_{k,2} - \xi_{k,2}^{(0)} = 0$という方程式によって定められるので，$\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\omega}$は

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}) &= \sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,1} - \xi_{k,1}^{(0)}|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{|(\boldsymbol{u} \times \eta_k) \cdot \{\xi_k - (\boldsymbol{\omega} \times \eta_k)\}|^2}{\|\zeta_k \times (\boldsymbol{u} \times \eta_k)\|^2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

という評価関数を最小にする$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\omega}$になる．明らかに$\boldsymbol{u}$の大きさは定まらないので，以下$\|\boldsymbol{u}\| = 1$とする．

しかしこの評価関数を最小化するのは計算のコストが掛かるので，様々な方法が考案されてきた．例えば分母と分子を別々に和を取るように評価関数を変形して反復法を用いる方法がある [3],[6]．この場合，推定量

の漸近的な不偏性は保たれるが，共分散行列がどうなるかについて研究されていなかった．

推定量の共分散行列の下界についてはクラメル・ラオの公式が知られている（詳細は [5],[7] を参照されたい）．まず，それを一般的に述べ，次に一部分の母数（運動パラメータ）に関して成り立つ式を求める．

クラメル・ラオの公式：

確率変数 $\xi_k(k = 1,\ldots,n)$ が独立に母数 ϕ を含む確率密度関数 $f^{(k)}$ に従うとき，確率変数の観測値から母数を推定する問題を考える．このとき推定量 $\hat{\phi}$ の共分散行列 $V[\hat{\phi}]$ は以下の不等式を満たす．

$$V[\hat{\phi}] - (1/n)\frac{\partial\overline{\hat{\phi}}}{\partial\phi}I^{\dagger}(\phi^{(0)})\left(\frac{\partial\overline{\hat{\phi}}}{\partial\phi}\right)^t \succeq 0 \tag{5}$$

ただし，$\phi^{(0)}$ は真の母数，$\overline{X}$ は母数が一般の値のときの平均，$I^{\dagger}(\phi^{(0)})$ は情報行列の一般化逆行列を表す．行列が正則行列の場合一般化逆行列と逆行列は一致する．また $\succeq$ は左辺の行列が半正定値行列であることを示す．情報行列はその (i,j) 成分が次式で表される対称行列である．

$$I(\phi^{(0)})_{i,j} = -(1/n)E[\frac{\partial^2}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\sum_{k=1}^{n}\log f^{(k)}(\xi_k;\phi)] \tag{6}$$

ただし，$E[X]$ は真の母数における平均であり，$\overline{X}$ とは異なることに注意する．

今の問題においては，$\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)^t$ として $\phi = (\theta^t,\nu^t)^t$ の形をしているので，運動パラメータに相当する θ の推定量 $\hat{\theta}$ の下界を調べるために，クラメル・ラオの公式の左上部分行列を取り出す．また，式 (3) より確率密度関数 $f^{(k)}$ は次の形

$$\begin{aligned} f^{(k)}(\xi_k;\theta,\nu_k) &= constant\cdot \\ &\exp[-\frac{\{p^{(k)t}(\theta)\xi_k - q^{(k)}(\theta)\}^2}{2\sigma^2}] \\ &\exp[-\frac{\{r^{(k)t}(\theta)\xi_k - s^{(k)}(\theta)\nu_k - t^{(k)}(\theta)\}^2}{2\sigma^2}] \end{aligned} \tag{7}$$

に表せるので，式 (5) より θ の任意の不偏推定量 $\hat{\theta}$ に対して，

$$V[\hat{\theta}] - (1/n)I' \succeq 0 \tag{8}$$

を満たすことが分かる．ただし，

$$I' = \sigma^2\left[(1/n)\sum_{k=1}^{n}\{\xi^{(0)t}p_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)}) - q_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)})\}^t \{\xi^{(0)t}p_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)}) - q_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)})\}\right]^{-1} \tag{9}$$

である．ここで，$p_{\theta}^{(k)}$ は $p^{(k)}$ を θ で微分した行列を，$q_{\theta}^{(k)}$ は $q^{(k)}$ を微分した行ベクトルを表す．

なお，θ として $(u^t,\omega^t)^t$ を用いると上式の $[]^{-1}$ が存在しないので，$\|u\| = 1$ の球面を表す助変数 ψ と ω を用いる．

母数の個数が確率変数の個数 n に比べて十分小さい場合には，最尤推定量の共分散行列は漸近的にはクラメル・ラオの下界を達成することが知られている．しかし，今の場合母数の個数は $(n+5)$ 個あるためこの議論は適用できない．次章では最尤推定量の漸近共分散行列を計算する．

3 最尤推定量の漸近共分散行列

この章では，最尤推定量の漸近共分散行列を計算し，それがクラメル・ラオの公式で与えられる下界と一致しないことを示す．

最尤推定量は，フローの観測値が与えられたときに以下の形の評価関数を最小にする $\hat{\theta}$ として与えられる．

$$J(\delta\xi;\theta) = \sum_{k=1}^{n}|p^{(k)t}(\theta)\delta\xi_k + b^{(k)}(\theta)|^2 \tag{10}$$

ただし，$\delta\xi_k = \xi_k - E[\xi_k]$ である．また $b^{(k)}(\theta)$ は

$$b^{(k)}(\theta) = p^{(k)t}(\theta)E[\xi_k] - q^{(k)}(\theta) \tag{11}$$

を表す．これより，$\delta\xi_k$ は平均 0 共分散行列が $\sigma^2 N_k$ の正規分布に独立に従う．

ここで，$p^{(k)}$ と $q^{(k)}$ に関して次の性質が成り立つことを用いると，

$$\begin{aligned} p^{(k)t}(\theta)N_k p^{(k)}(\theta) &= 1 \\ q^{(k)}(\theta) &= p^{(k)t}(\theta)\overline{\xi_k} \end{aligned} \tag{12}$$

$b^{(k)}(\theta^{(0)}) = 0$ が成り立つことが分かる．

これより，J を θ で1回微分した行ベクトル J_{θ}，2回微分した対称行列 $J_{\theta\theta}$ について下式が成り立つ．

$$\begin{aligned} E[J_{\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})] &= \mathbf{o} \\ E[J_{\theta\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})] &= 2\sum_{k=1}^{n}b_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)})b_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)}) \\ V[J_{\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})] &= 4\sigma^2\sum_{k=1}^{n}[b_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)})b_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)}) + \\ &\quad \sigma^2 p_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)})N_k p_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)})] \end{aligned} \tag{13}$$

さて，最尤推定量 $\hat{\theta}$ は次式を満たす．

$$\forall\delta\xi\ J_{\theta}(\delta\xi;\hat{\theta}) = \mathbf{o} \tag{14}$$

これを $\theta = \theta^{(0)}$ の回りでテーラ展開すると，

$$\mathbf{o} = J_{\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)}) + (\hat{\theta}-\theta^{(0)})^t J_{\theta\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)}) + \cdots \tag{15}$$

となる．$n \to \infty$ のとき，大数の法則より $(1/n)J_{\theta\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})$ は $E[(1/n)J_{\theta\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})]$ に確率収束し，中心極限定理より $(1/\sqrt{n})J_{\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})$ は平均 0 共分散行列 $V[(1/\sqrt{n})J_{\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})]$ の正規分布に漸近

的に従うことが知られている．故に，$\Theta = \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta^{(0)})$ は漸近的に平均 0 共分散行列

$$\{E[(1/n)J_{\theta\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})]\}^{-1} \quad (16)$$
$$V[(1/\sqrt{n})J_{\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})]\{E[(1/n)J_{\theta\theta}(\delta\xi;\theta^{(0)})]\}^{-1}$$

の正規分布に漸近的に従う．この共分散行列は以下の値に等しい．

$$\begin{aligned}
& \sigma^2\{(1/n)\sum_{k=1}^{n} b_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)})b_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)})\}^{-1} \quad (17)\\
+ \ & \sigma^4\{(1/n)\sum_{k=1}^{n} b_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)})b_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)})\}^{-1}\\
& \{(1/n)\sum_{k=1}^{n} p_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)})N_k p_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)})\}\\
& \{(1/n)\sum_{k=1}^{n} b_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)})b_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)})\}^{-1}
\end{aligned}$$

ここで，

$$b_{\theta}^{(k)t}(\theta^{(0)}) = \xi^{(0)t}p_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)}) - q_{\theta}^{(k)}(\theta^{(0)}) \quad (18)$$

に注意すれば，共分散行列の σ^2 項がクラメル・ラオの下界と等しいことが分かる．σ^4 項は半正定値行列なので上の共分散行列は確かにクラメル・ラオの下界よりも大きくなる．自然画像を対象とするコンピュータ・ビジョンの研究においては，フローにノイズが 1 に近い大きさで入ることは普通に考えられることなので，σ^4 項は無視できない大きさになる．

次の章では最尤推定量よりも共分散行列が小さくなる推定量が存在することを示す．

4 一般化された重みを持つ評価関数を最小する推定量の漸近共分散行列

この章では，以下の形をした評価関数を最小にする推定量の漸近共分散行列を計算する．この漸近共分散行列は σ^2 項と σ^4 項からなり，σ^2 項はクラメル・ラオの公式で与えられる下界を下回らないことを示す．更に，ある重みに対して，それを持つ評価関数を最小化する推定量の共分散行列が以下の性質を持つことを示す．

1. その σ^2 項がクラメル・ラオの公式で与えられる下界と一致する．
2. その σ^4 項が最尤推定量の σ^4 項よりも小さくなる．

まず一般化された重み $C = (c^{(k,l)})$ （C は $n \times n$ の対称行列）を持つ評価関数 J を下式で定義する．

$$J(\delta\xi;\theta) = \sum_{k,l=1}^{n} c^{(k,l)}(\theta) \quad (19)$$
$$\{p^{(k)t}(\theta)\delta\xi_k + b^{(k)}(\theta)\}\{p^{(l)t}(\theta)\delta\xi_l + b^{(l)}(\theta)\}$$

ただし，$\delta\xi_k$ 等は前章と同じものを表す．$c^{(k,l)}$ には以下の条件を付ける．

$$\sum_{k=1}^{n} c^{(k,k)}(\theta) = constant\ for\ \theta \quad (20)$$

この条件は，$E[J_{\theta}(\theta^{(0)})] = \mathrm{o}$ と等価である．故に，この評価関数を最小にする推定量 $\check{\theta}$ は漸近的には不偏になる [6].

最尤推定量の共分散行列の計算（式 (13) から式 (17)）と同様の手法により，$\Theta' = \sqrt{n}(\check{\theta} - \theta^{(0)})$ は漸近的に平均 0 共分散行列 $V[\Theta']$ の正規分布に従うことが分かる．

$$\begin{aligned}
V[\Theta'] \ = \ & \{(1/n)\sum_{k,l=1}^{n} c^{(k,l)}b_{\theta}^{(k)t}b_{\theta}^{(l)}\}^{-1} \quad (21)\\
& (1/n)[\sigma^2 \sum_{k,l,l'=1}^{n} c^{(k,l)}c^{(k,l')}b_{\theta}^{(l)t}b_{\theta}^{(l')}\\
& +\sigma^4 \sum_{k,l=1}^{n} c^{(k,l)2}P^{(l)}\\
& +(1/2)\sigma^4 \sum_{k,l=1}^{n} c_{\theta}^{(k,l)t}c_{\theta}^{(k,l)}]\\
& \{(1/n)\sum_{k,l=1}^{n} c^{(k,l)}b_{\theta}^{(k)t}b_{\theta}^{(l)}\}^{-1}
\end{aligned}$$

ただし，上式は $\theta = \theta^{(0)}$ での値である．ここで，$P^{(l)} = p_{\theta}^{(l)t}N_l p_{\theta}^{(l)}$ である．

以下では，定数重み（$c_{\theta}^{(k,l)} = \mathrm{o}$）の場合のみを考えることにする．

ここで，$n \times 5$ の行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} b_{\theta}^{(1)}(\theta^{(0)}) \\ b_{\theta}^{(2)}(\theta^{(0)}) \\ \vdots \\ b_{\theta}^{(n)}(\theta^{(0)}) \end{pmatrix} \quad (22)$$

で定義すると，$V[\Theta']$ は下式で表せる．

$$\begin{aligned}
V[\Theta'] \ = \ & n\sigma^2(B^tCB)^{-1}(B^tC^2B)(B^tCB)^{-1} \quad (23)\\
+ \ & n\sigma^4(B^tCB)^{-1}\{\sum_{k=1}^{n}(C^2)_{k,k}P^{(k)}\}(B^tCB)^{-1}
\end{aligned}$$

一方，最尤推定量 $\hat{\theta}$ に対して $\Theta = \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta^{(0)})$ と置くと式 (17) より，

$$V[\Theta] = n\sigma^2(B^tB)^{-1} + n\sigma^4(B^tB)^{-1}(\sum_{k=1}^{n}P^{(k)})(B^tB)^{-1} \quad (24)$$

と表せる．

ここで，行列に対する一般化されたコーシの不等式：

B を $n{\times}m(n \geq m)$ の行列，C を $n{\times}n$ の対称行列とするとき，$m \times m$ の対称行列 $Y = (B^tCB)^{-1}(B^tC^2B)(B^tCB)^{-1} - (B^tB)^{-1}$ は（存在を仮定すれば），半正定値行列 $Y \succeq 0$ である．

を用いれば，$(V[\Theta']$ の σ^2 項$)-(V[\Theta]$ の σ^2 項$) \succeq 0$ が成り立つことが分かる．すなわち，一般化された重みを持つ評価関数を最小にする推定量の共分散行列の σ^2 項はクラメル・ラオの公式で与えられる下界を下回らないことが示される．

コーシの不等式の証明:

$n \times m$ の行列 X を $X = B(B^tB)^{-1/2}$ とおくと，$X^tX = I_m$ が成り立つ．ここで，I_m は $m \times m$ の単位行列である．与式は $X^tC^2X - (X^tCX)^2 \succeq 0$ と等価になる．X のすべての列ベクトルと直交する $(n-m)$ 本の列ベクトルを並べて $n \times (n-m)$ の行列 $X^{\perp}$ を作る．ここで $X^{\perp t}X^{\perp} = I_{n-m}$ が成り立つようにする．更に $n \times n$ の行列 $\tilde{X}$ を $\tilde{X} = (X \ \ X^{\perp})$ で定義すると，$\tilde{X}\tilde{X}^t = I_n$ が成り立つ．対角行列 $I_n - diag(I_m, 0_{n-m})$ は半正定値なので，$X^tC\tilde{X}\tilde{X}^tC^tX - X^tC\tilde{X}diag(I_m, 0_{n-m})\tilde{X}^tC^tX \succeq 0$ が成り立つ．上式は $X^tC^2X - (X^tCX)^2 \succeq 0$ に等しい．よって証明された．

Q. E. D.

一方，σ^4 項は最尤推定量のそれよりも小さくすることが可能である．今，$C = B(B^tB)^{-1}B^t$ と置くと，$C^2 = C$, $B^tCB = B^tB$, $C \succeq 0$, $(I - C) \succeq 0$ が成り立つ．半正定値行列の対角要素はすべて 0 以上なので，C の対角要素 $c^{(k,k)}$ はすべて 0 から 1 の間にある．従って，

$$V[\Theta'] = n\sigma^2(B^tB)^{-1} + n\sigma^4(B^tB)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} c^{(k,k)}P^{(k)}\right)(B^tB)^{-1} \tag{25}$$

が成り立つ．よって，

$$V[\Theta] - V[\Theta'] = n\sigma^4(B^tB)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}(1 - c^{(k,k)})P^{(k)}\right)(B^tB)^{-1} \succeq 0 \tag{26}$$

が成り立つ．つまり，重み C に対してそれから作られる評価関数を最小化する推定量の共分散行列は，最尤推定量と同じ σ^2 項＋最尤推定量よりも小さい σ^4 項と表されることが分かる．よって，最尤推定量は最適ではないことが示された．

ただし，この推定量は B が事前には分からないので実際には構成できない．次の章ではある特別な場合に実際に構成可能な推定量で最尤推定量よりも良いものがあることを示す．

5 最尤推定量よりよい推定量の例

この章ではある簡単な場合に，最尤推定量よりも分散が小さくなる推定量を実際に構成する．ここで示される推定量の分散は σ^4 項がなく最尤推定量のそれよりもわずかに大きい σ^2 項を持つ．従って，σ がある程度大きい場合には最尤推定量よりも小さな分散になる．

投影面は $Z = 1$ の平面で回転速度と奥行き方向への並進速度が 0 の場合を考える．すなわち，

$$\begin{aligned} \eta_k &= (x_k, y_k, 1)^t \\ \zeta_k &= (0, 0, 1)^t \\ u &= (u_x, u_y, 0)^t \\ \omega &= (0, 0, 0)^t \end{aligned} \tag{27}$$

の場合である．このとき，$\xi_k^{(0)} = \nu_k(u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, 0)^t$ が成り立つので，$u_x = \cos\psi$, $u_y = \sin\psi$, $\xi^{(k)} = (\xi_{k,x}, \xi_{k,y}, 0)^t$ とおくと，最尤推定量 $\hat{\psi}$ は以下の評価関数を最小にする．

$$J(\psi) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,x}\sin\psi - \xi_{k,y}\cos\psi|^2 \tag{28}$$

これより，$\hat{\psi}$ の分散は下式で表される．

$$V[\hat{\psi}] = \frac{\sigma^2}{n\overline{\nu^2}} + \frac{\sigma^4}{n(\overline{\nu^2})^2} \tag{29}$$

ただし，$\overline{\nu^2} = (1/n)\sum_k \nu_k^2$ である．

一方，前章で $\forall k, l \ c^{(k,l)} = 1$ とした以下の評価関数 J' を最小にする推定量 $\check{\psi}$ を考える．

$$J'(\psi) = \sum_{k,l=1}^{n} \{\xi_{k,x}\sin\psi - \xi_{k,y}\cos\psi\}\{\xi_{l,x}\sin\psi - \xi_{l,y}\cos\psi\} \tag{30}$$

式 (23) より，

$$V[\check{\psi}] = \frac{\sigma^2}{n\overline{\nu}^2} \tag{31}$$

となる．ただし，$\overline{\nu} = (1/n)\sum_k \nu_k$ である．また，$1/n$ に関する高次の微小項を無視した．$\sigma^2/(n\overline{\nu}^2)$ はクラメル・ラオの下界 $\sigma^2/(n\overline{\nu^2})$ よりもやや大きくなるが，分散の式が σ^4 項を含まないことが分かる．

6 まとめ

ノイズを含んだオプティカルフローからの3次元推定において，最尤推定量が観測点の個数が十分多い場合でも最小分散推定量にはならないという意味で最適ではないことを示した．最尤推定量の漸近的な共分散行列は，ノイズの分散 σ^2 に比例する項と σ^4 に比例する項からなることを示した．前者はクラメル・ラオの公式で与えられる下界に等しくなり，後者は半正定値になる．また，共分散行列の σ^2 項が最尤推定量の対応

する項と一致し，σ^4 項が最尤推定量の対応する項よりも小さくなるような推定量が存在することを示した．簡単な例として，回転速度と視軸に並行な並進速度が存在しない場合に最尤推定量よりも漸近的な分散が小さくなる推定量を実際に構成した．

参考文献

[1] G. Adiv: Determining three-dimensional motion and structure from optical flow generated by several moving objects, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 7, pp. 384–401 , 1985.

[2] M. E. Spetsakis and Y. Aloimonos: Optimal computing structure from motion using point correspondences in two frames, in Proc. 2nd Int. Conf. Comput. Vision, Tampa, pp. 449–453, Dec. 1988.

[3] N. Tagawa, T. Toriu, and T. Endoh: Un-biased linear algorithm for recovering three-dimensional motion from optical flow, IEICE Trans. Infor. Sys. (in press)

[4] M. E. Spetsakis and Y. Aloimonos: Optimal visual motion estimation: a note, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 14, pp. 959–964, 1992.

[5] J. Weng, T. S. Huang, and N. Ahuja: Motion and structure from image sequences, Springer-Verlag, 1993.

[6] N. Tagawa, T. Toriu, and T. Endoh: Estimation of 3-D motion from optical flow with unbiased objective function, IEICE Trans. Infor. Sys. (in press)

[7] G. S. J. Young and R. Chellappa: Statistical analysis of inherent ambiguities in recovering 3-D motion from a noisy flow field, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 14, pp. 995–1013, 1992.