

ステレオによる3次元復元の信頼性評価

川島 徹† 金澤 靖‡ 金谷 健一†

†群馬大学工学部情報工学科

‡群馬工業高等専門学校 電子情報工学科

2台のカメラの位置関係が既知のとき、空間中の特徴点をそれぞれの投影像からステレオにより復元する問題を考える。一般に画像座標は量子化誤差を含めて必ず誤差を含んでいるため、対応する画像座標はエピ極線方程式を厳密に満たすとは限らない。従来はそれぞれカメラの原点から観測された座標への視線を定義し、両方に最も近い点を最小二乗法で推定することがよく行なわれてきた。本研究では画像面上に誤差のモデルを導入し、観測した画像座標を誤差のモデルに基づいて“統計的に最適”に補正する。そして補正した点から3次元復元を行ない、さらに復元した点の信頼性を表す共分散行列を計算する。最後にシミュレーション実験および実画像による実験を行ない、その有効性を示す。

キーワード: ステレオ, 3次元復元の信頼性, 画像の誤差モデル, エピ極線方程式, 統計的最適化, 誤差の推定

Reliability of 3-D Reconstruction by Stereo

Toru Kawashima†, Yasushi Kanazawa‡, and Kenichi Kanatani†

†Department of Computer Science

Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

‡Department of Information and Computer Engineering

Gunma College of Technology, Maebashi, Gunma 371, Japan

Theoretically, corresponding pairs of feature points between two stereo images can determine their 3-D locations uniquely by triangulation. In the presence of noise, however, corresponding feature points may not satisfy the epipolar equation exactly, so their 3-D locations cannot be determined. Hence, we must first correct the corresponding pairs to satisfy the epipolar equation. In this paper, we present an optimal correction method based on a statistical model of image noise. Our method allows us to evaluate the magnitude of image noise *a posteriori* and compute the covariance matrix of each of the reconstructed 3-D points. We demonstrate the effectiveness of our method by doing numerical simulations and real-image experiments.

Key words: stereo, reliability of 3-D reconstruction, model of image noise, epipolar equation, statistical optimization, noise estimation

1 はじめに

ステレオは画像から3次元を復元するための最も基本的な手段であり、移動ロボットや自律走行車などにおける視覚センサとして広く利用されている。しかし、従来のステレオの研究のほとんどすべては画像間の対応探索のアルゴリズムに関するものであった。確かに対応点探索は効率よく自動化するのが困難な課題であり、いったん対応が定まれば3次元を復元するのは自明のことと思える。そのため実画像からのステレオによる3次元復元のデモンストレーションも、実際には単に視差を表示したものであることが多かった。しかし、実際に3次元復元を行なおうとするといろいろな現実的な課題に直面する。そのひとつが復元した3次元形状の信頼性である[3, 4, 6]。信頼性が正しく評価できなければ移動ロボットや自律走行車が目的遂行のための適切な行動をとることができない。本論文はこれを解決する理論を与えるものである。

画像に誤差がなければ、2台のカメラによって観測した点から3次元位置が三角測量の原理で一意に決定できる。しかし、現実には量子化誤差や画像処理による誤差により、画像座標には何らかの誤差が含まれる。そのため、それぞれのカメラの原点を始点とし、観測した画像上の対応点を通る視線は交わるとは限らない。そこで、従来は両方の視線に最も近い点を最小二乗法で推定し、空間位置とすることがよく行なわれてきた[7]。しかし、このようにして復元した空間点の信頼性を理論的に評価することは困難である。そこで本論文では、まず画像の誤差の統計的なモデルを定義し[3, 6]、誤差は各点ごとに独立な確率変数であるとみなす。このモデルに基づいて、幾何学的な制約条件を満足するように画像を最適に補正し、3次元位置を計算する。このようにして復元した空間点は、その信頼性を表わす共分散行列も計算できる。以下、これらの手法について述べ、シミュレーションおよび実画像による実験により、その有効性を示す。

2 ステレオの幾何学モデル

図1に示すようにカメラを配置する。それぞれのカメラのレンズの中心を O, O' とし、光軸を Z, Z' 軸にとる。また Z, Z' 軸に直交する画像面を置き、それぞれ焦点距離(すなわち O, O' からの距離)を f, f'

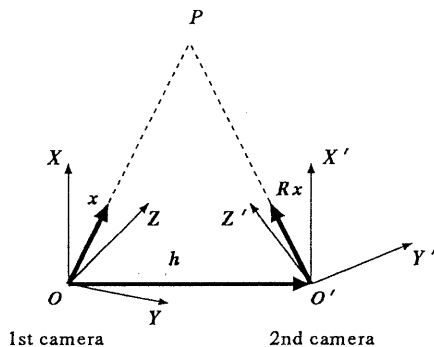


図1: ステレオの幾何学モデル

とする。2台のカメラの位置関係を回転 $R(3 \times 3$ 行列)と並進 $h(3$ 次元ベクトル)で表わし、それぞれ既知とする。この $\{R, h\}$ を運動パラメータ(motion parameter)と呼ぶ。

空間中の点を2台のカメラで撮影し、それぞれの画像面の画像座標 $(x, y), (x', y')$ の位置に観測したとき、これを次の3次元ベクトルで表わす。

$$x = \begin{pmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'/f' \\ y'/f' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

3 エピ極線方程式

図1の幾何学的関係からわかるように、ベクトル x, Rx', h は共面、すなわち同一平面上にあり、次のエピ極線方程式(epipolar equation)を満足する。

$$|x, h, Rx'| = 0 \quad (2)$$

ただし $|a, b, c|$ は3次元ベクトル a, b, c のスカラ三重積である。基本行列(essential matrix)を

$$G = h \times R \quad (3)$$

と定義する。ここで $a \times A$ は3次元ベクトル a と 3×3 行列 A の各列とのベクトル積からなる行列である。この基本行列 G を用いると、エピ極線方程式(2)は次のように書き直すことができる。

$$(x, Gx') = 0 \quad (4)$$

ただし、 (a, b) はベクトル a, b の内積を表わす。

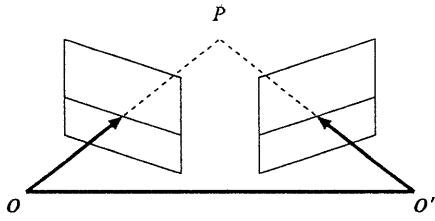


図 2: エピ極線拘束条件

式(2)および式(4)を「エピ極線方程式」と呼ぶのは次の理由による。式(4)は x' を固定すれば、第1の画像面の直線の方程式を表わす。この直線は第2のカメラ系の原点 O' を始点とし、点 x' を通る視線の像であり、 x' のエピ極線(epipolar)として知られている。同様に x を固定すれば、式(4)は第2の画像面上の直線の方程式を表わす。この直線は x のエピ極線、すなわち第1のカメラ系の原点 O を始点とし、点 x を通る視線の像である。いかえれば、視点 O 、 O' と観測点 P のつくる平面と各画像面との交線がエピ極線である(図2)。このことから、ステレオ画像の互いに対応する点はそれぞれ他方の点のエピ極線上にあるという、よく知られたエピ極線拘束条件(epipolar constraint)が得られる[1, 2, 3].

4 誤差の統計モデル

エピ極線方程式を用いれば、ある点に対応する点是他方の画像のその点に関するエピ極線上にあるから、対応点探索はその上の1次元探索に帰着する。特にエッジ間の対応については、各エッジ要素に対応する点是他方の画像上のその画素のエピ極線と対応するエッジとの交点として一意的に定まる。しかし、エピ極線拘束条件は画像や運動パラメータが厳密に正しいときのみ成立するものであり、個々の特徴点間の対応を求める場合は、対応する特徴点が厳密にエピ極線上に存在するとは限らない。したがってエピ極線の近傍も探索する必要があり、そのようにして最適にマッチさせた特徴点の値は必ずしもエピ極線方程式(4)を満たすとは限らない。本論文ではこのような場合を想定する。

対応が定まった特徴点の組を式(1)のベクトルの形で表わしたものを x 、 x' とする。画像には誤差や歪みがあり、それらの真の値は \bar{x} 、 \bar{x}' であるとす、

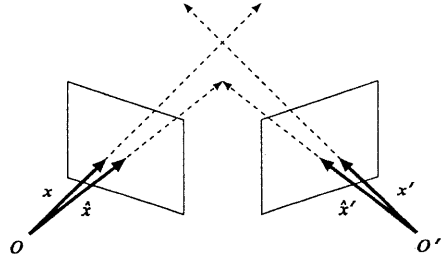


図 4: 特徴点の補正

次のように書く。

$$x = \bar{x} + \Delta x, \quad x' = \bar{x}' + \Delta x' \quad (5)$$

そして、誤差 Δx 、 $\Delta x'$ を期待値0の独立な確率変数であるとみなし、それぞれの共分散行列を

$$V[x] = E[\Delta x \Delta x^T], \quad V[x'] = E[\Delta x' \Delta x'^T] \quad (6)$$

とする($E[\cdot]$ は期待値を表わす)。これは画像上の点ごとに異なってもよい。実際の誤差の絶対的なレベルをあらかじめ知ることは不可能であるため、未知のノイズレベル ϵ を導入し、それぞれの共分散行列を

$$V[x] = \epsilon^2 V_0[x], \quad V[x'] = \epsilon^2 V_0[x'] \quad (7)$$

の形に書く。 $V_0[x]$ 、 $V_0[x']$ を正規化共分散行列と呼び、既知と仮定する。誤差は画像面上に拘束されているため、共分散行列 $V[x]$ 、 $V[x']$ は共にランク2の特異行列である。

5 特徴点の最適補正

式(5)、(7)で定義された画像の誤差の統計モデルを用いて、誤差 Δx 、 $\Delta x'$ を推定することを考える。そのためには、観測値 x 、 x' を補正した

$$\hat{x} = x - \Delta x, \quad \hat{x}' = x' - \Delta x' \quad (8)$$

がエピ極線方程式(4)を満たすようにすればよい(図4)。エピ極線方程式(4)に代入すると次のようになる。

$$(x - \Delta x, G(x' - \Delta x')) = 0 \quad (9)$$

これを展開し、1次近似をとると次のようになる。

$$(Gx', \Delta x) + (G^T x, \Delta x') = (x, Gx') \quad (10)$$

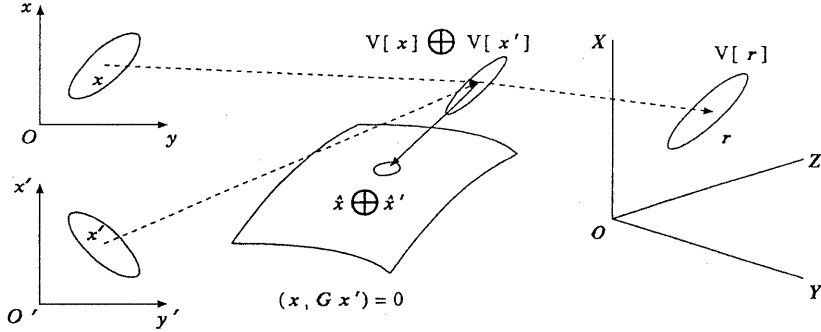


図 3: 3次元復元の信頼性評価の原理

この式は誤差 Δx , $\Delta x'$ の定義する 6次元空間内の超平面を表す。この超平面上で最も確率が大きい点を \hat{x} , \hat{x}' の推定値とすればよい。誤差の分布が正規分布であれば、確率が最も大きい Δx , $\Delta x'$ はマハラノビス距離 [1] で測って原点から最も近い点である。これは次の最適化として定式化できる [5]。

$$J = (\Delta x, V_0[x]^{-1} \Delta x) + (\Delta x', V_0[x']^{-1} \Delta x') \rightarrow \min \quad (11)$$

ここで $V[x]^{-1}$, $V[x']^{-1}$ は、それぞれ $V[x]$, $V[x']$ の一般逆行列である。式 (11) の J は、定数差を除いて、「誤差が正規分布に従い、 \hat{x} , \hat{x}' が真の位置である」というモデルのもとでの観測値 x , x' に対する対数尤度の符号を換えたものに等しい。

最小化 (11) の解 Δx , $\Delta x'$ は第 1 近似において、次のようになる (導出省略 [5])。

$$\Delta x = \frac{(x, Gx') V_0[x] Gx'}{(x', G^T V_0[x] Gx') + (x, G^T V_0[x'] G^T x)},$$

$$\Delta x' = \frac{(x, Gx') V_0[x'] G^T x}{(x', G^T V_0[x] Gx') + (x, G^T V_0[x'] G^T x)} \quad (12)$$

補正した \hat{x} , \hat{x}' は確率変数である。その正規化共分散行列は次のようになる (導出省略 [5])。

$$V_0[\hat{x}] = V_0[x] - \frac{(V_0[x] G \hat{x}') (V_0[x] G \hat{x}')^T}{(\hat{x}', G^T V_0[x] G \hat{x}') + (\hat{x}, G^T V_0[x'] G^T \hat{x})},$$

$$V_0[\hat{x}'] = V_0[x'] - \frac{(V_0[x'] G^T \hat{x}) (V_0[x'] G^T \hat{x})^T}{(\hat{x}', G^T V_0[x] G \hat{x}') + (\hat{x}, G^T V_0[x'] G^T \hat{x})} \quad (13)$$

\hat{x} , \hat{x}' の正規化相関行列も同様に求めることができる (導出省略)。

$$V_0[\hat{x}, \hat{x}'] = \frac{(V_0[x] G \hat{x}') (V_0[x'] G^T \hat{x})^T}{(\hat{x}', G^T V_0[x] G \hat{x}') + (\hat{x}, G^T V_0[x'] G^T \hat{x})} \quad (14)$$

注意すべきことは、誤差 Δx , $\Delta x'$ は互いに独立であると仮定しているが、補正後の \hat{x} , \hat{x}' には互いに相関が生じることである。

式 (12) は第 1 近似における解であるから、式 (8) の補正を行ってもエド極線方程式 $(\hat{x}, G \hat{x}') = 0$ が厳密に満たされるとは限らない。そこで、これが十分満たされるまで $x \leftarrow \hat{x}$, $x' \leftarrow \hat{x}'$ として、この補正を反復する。

6 3次元復元の信頼性

補正した \hat{x} , \hat{x}' から、復元点 r が次のように求まる。

$$r = Z \hat{x} \quad (15)$$

ここで Z は XY 面からの奥行き (depth) であり、次のように計算できる (付録 A)。

$$Z = \frac{\|h \times R x'\|}{\|x \times R x'\|} \quad (16)$$

このようにして復元した空間点 r の信頼性を表わす共分散行列は次のように計算できる (導出省略 [5])。

$$V[r] = Z^2 V[\hat{x}] + Z(V[\hat{x}, Z] \hat{x}^T + \hat{x} V[\hat{x}, Z]^T) + V[Z] \hat{x} \hat{x}^T \quad (17)$$

ここに現れる共分散行列 $V[\hat{x}]$, $V[\hat{x}']$, 相関行列 $V[\hat{x}, \hat{x}']$, 相関ベクトル $V[\hat{x}, Z]$, 分散 $V[Z]$ はそれ

それ式(13), (14) から次のように計算される.

$$\begin{aligned} V[\hat{x}] &= \hat{\epsilon}^2 V_0[\hat{x}], \quad V[\hat{x}'] = \hat{\epsilon}^2 V_0[\hat{x}'] \\ V[\hat{x}, \hat{x}'] &= \hat{\epsilon}^2 V_0[\hat{x}, \hat{x}'] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} V[Z] &= \frac{1}{\|\hat{x} \times R\hat{x}'\|^2} \left(Z^2(\hat{a}', V[\hat{x}]\hat{a}') \right. \\ &\quad - 2ZZ'(\hat{a}', V[\hat{x}, \hat{x}']R^T\hat{a}') \\ &\quad \left. + Z'^2(\hat{a}', RV[\hat{x}']R^T\hat{a}') \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$V[\hat{x}, Z] = -\frac{ZV[\hat{x}] - Z'V[\hat{x}, \hat{x}']\hat{a}'}{(\hat{a}', \hat{x})} \quad (20)$$

ただし, ベクトル \hat{a} , \hat{a}' を次のように定義する.

$$\hat{a} = N[h \times \hat{x}], \quad \hat{a}' = \hat{a} \times R\hat{x}' \quad (21)$$

ここに, 記号 $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表わす. また, Z' は第2のカメラ座標における奥行き距離であり, 次のようにして求められる (付録 A).

$$Z' = \frac{\|\hat{x} \times h\|}{\|\hat{x} \times R\hat{x}'\|} \quad (22)$$

一方, 式(18)に現れる $\hat{\epsilon}^2$ は二乗ノイズレベル ϵ^2 の推定値であり, 補正前の対応点 x , x' と, 補正後の対応点 \hat{x} , \hat{x}' から, 以下のように推定できる (導出省略 [5]).

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{(x, Gx')^2}{\|V_0[\hat{x}']G^T\hat{x}\|^2 + \|V_0[\hat{x}]G\hat{x}'\|^2} \quad (23)$$

以上のプロセスは概念的には図3のようになる. 画像上の共分散行列 $V[x]$, $V[x']$ はそれぞれの画像上に計量 (マハラノビス計量) を定義する. したがって1組の対応点は両者の直積空間上の1点とその空間の計量を定める. エピ極線方程式(4)はこの直積空間中の3次元超曲面を定める. しかし画像から得られた直積点はその上にあるとは限らない. そこでこの超曲面に乗るように, この空間の計量に基づく最短距離の点に射影し, 同時に共分散行列も射影する. この射影は, 誤差の分布を正規分布とみなしたとき等確率面となる楕円体の長軸方向に行なう. このとき, 射影による移動量から誤差の大きさを推定するのが式(23)である. この3次元超曲面を式(15), (16)によって3次元空間に写像して, 復元点 r とその共分散行列 $V[r]$ が得られる.

このようにして得られた共分散行列 $V[r]$ は3次元空間中に (マハラノビス) 計量を定義し, その計量で測った一定の距離だけ誤差が生じる確率はどの方向にいても等しい.

表 1: シミュレーションデータ

円筒の半径	400
円筒の高さ	400
中心までの距離	1000
特徴点数	10 × 10 個
誤差の標準偏差	2 画素
焦点距離	600 画素
回転行列	$\begin{pmatrix} 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.93969 & -0.34202 \\ 0.00000 & 0.34202 & 0.93969 \end{pmatrix}$
並進ベクトル	$(0.0 \ 300.0 \ 0.0)^T$

7 シミュレーション

空間中に格子状の円筒を置き, その側面の 10×10 の格子点を特徴点とする (図5参照). 第1のカメラ座標系を基準とし, 第2のカメラを表1に示すように配置する. 両方のカメラとも焦点距離を $f = 600$ (画素) に想定する. 各 x , y 座標に独立に標準偏差 $\sigma = 2$ (画素) の正規乱数をノイズとして加える (図6および図7参照). したがってノイズレベルは $\epsilon = \sigma/f = 1/300$ であり, 正規化共分散行列は次のようになる.

$$V_0[x] = V_0[x'] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

ただし計算では ϵ は未知数として扱う.

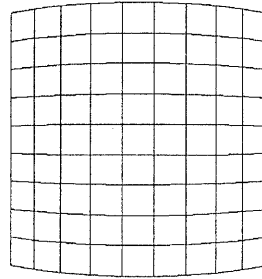


図 5: 特徴点 (真の値)

これらのデータにより空間点を復元した結果を図8に示す. 比較のために, 従来方法 (付録 B) によ

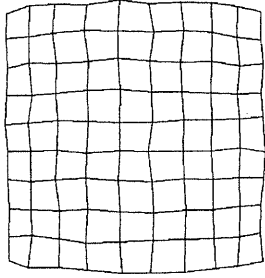


図 6: シミュレーション入力左画像

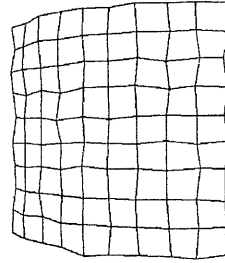


図 7: シミュレーション入力右画像

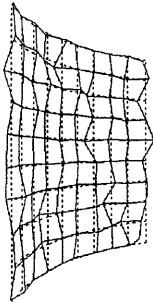


図 8: シミュレーション結果 (本手法)

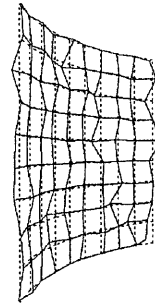


図 9: シミュレーション結果 (従来手法)

る復元結果を図 9 に示す。比較してわかる通り、復元結果それ自体には大きな差はない。式 (17) によって計算した共分散行列 $V[r]$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とし、対応する固有ベクトルの正規直交系を $\{u_1, u_2, u_3\}$ とする。そして $\{u_1, u_2, u_3\}$ を各主軸とし、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をそれぞれの半径とする 2 次曲面 (楕円面) を、特徴点の真の位置を中心として輪郭のみ描き、復元の信頼性を図示した結果が図 10 である。共分散行列の定義より、この楕円面は復元点の各方向の誤差の標準偏差を表わしている。この図を見ると、復元した特徴点はほぼこの楕円面内に入っていることがわかる。また各特徴点から計算した $\hat{\epsilon}^2$ をもとにして推定した画像上の誤差 (単位は画素) の分布を図 11 に示す。

8 実画像による実験

図 12 および 13 に建物の壁面を撮影した左右のステレオ画像を示す。これらの画像から、窓の隅を特徴点として抽出し (図 14 参照)、3 次元を復元した結果を図 15 に示す。用いた運動パラメータの値は表 2 に

示す。この 3 次元復元の信頼性を図示するために、

表 2: 運動パラメータ

焦点距離 並進ベクトル	1850 画素 (37.624003 563.512406 - 20.653408) ^T
回転	$\begin{pmatrix} 0.999790 & -0.004388 & 0.020038 \\ 0.002593 & 0.996051 & 0.088740 \\ -0.020348 & -0.088669 & 0.995853 \end{pmatrix}$

次のベクトルを定義する。

$$\begin{aligned} r^+ &= r + \sqrt{\lambda_{\max}} u_{\max}, \\ r^- &= r - \sqrt{\lambda_{\max}} u_{\max} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで λ_{\max} は式 (17) から計算した共分散行列 $V[r]$ の最大固有値であり、対応する単位固有ベクトルが u_{\max} である。共分散行列の定義より、 u_{\max} が誤差の最も発生しやすい方向であり、 $\sqrt{\lambda_{\max}}$ がその方向の標準偏差を示す。したがって、この r^+ および r^- は復元点の信頼性を示すものである。図 15 内に破線

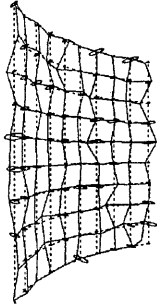


図 10: 復元点の信頼性(裏から見たところ)

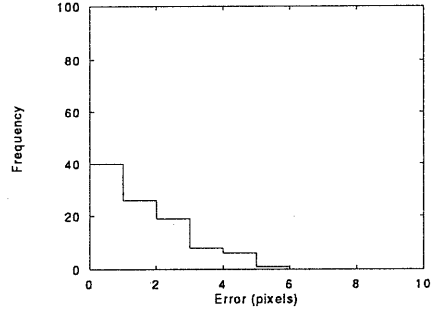


図 11: 画像の誤差の推定値の分布 (単位は画素)

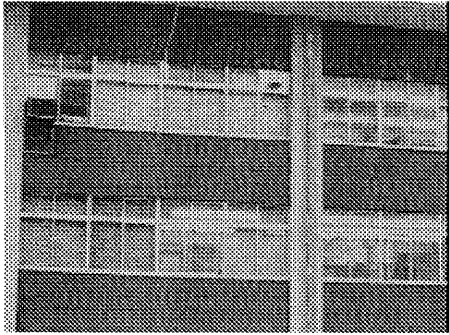


図 12: 左入力画像

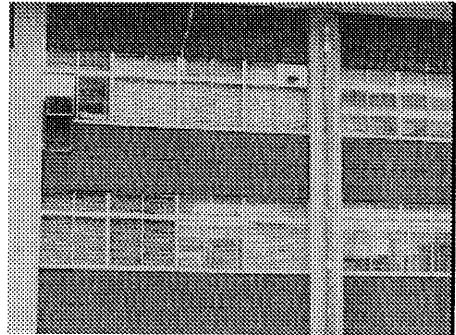


図 13: 右入力画像

で示した格子は r^+ , r^- のうちのカメラに近いほうのみと遠いほうのみから描画したものである。

この実験で用いたステレオの基線長 $\|b\|$ は物体までの距離に比べて極めて小さい(約 1/16)。したがって復元した 3 次元形状の信頼性がかなり低いことがわかる。また壁面は右手が遠方に傾いているため、復元誤差も右手のほう信頼性が低いこともわかる。このように、単に 3 次元位置が定まるだけでなく、その信頼性が定量的に評価できる。

このような評価は移動ロボットや自律走行車への応用にあたって極めて重要である。例えば、この実験のように信頼性の低い復元に対して精密な制御するのは無意味である。

9 まとめ

本論文では、ステレオ画像の対応点から 3 次元復元を行なうために、画像の誤差の統計モデルを定義し、それに基づいた最適な復元法を提案した。3 次元復元自体は従来の方法を用いてもほとんど差はないが、本論文の特徴は最適に 3 次元が復元できると

いうことに留まらず、復元した点の信頼性まで定量的に計算できるということにある。このことは、移動ロボットや自律走行車などの現実の応用で大きな意味を持つと思われる。

参考文献

- [1] O. Faugeras: *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*, MIT Press, Cambridge, MA, U.S.A., 1993.
- [2] 金谷健一: 「画像理解 / 3 次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [3] K. Kanatani: *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford Univ. Press, Oxford, U.K., 1993.
- [4] 金谷健一: “画像の 3 次元解釈の統計的信頼性”, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, No. 10, pp. 2062-2070, 1993.

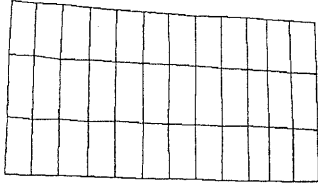


図 14: 左格子画像 (右は省略)

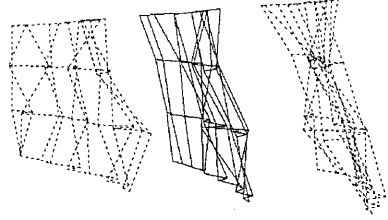


図 15: 復元結果とその信頼性

- [5] K. Kanatani: *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Lecture Note, Department of Computer Science, Gunma University, April, 1994.
- [6] 金澤靖, 金谷健一: “ステレオによる平面の直接的な再構成”, 情報処理学会研究報告, Vol. 94, No. 38, 94-CV-89, 1994-05.
- [7] J. Weng, T. S. Huang and N. Ahuja: *Motion and Structure from Image Sequences*, Springer, Berlin, F.R.G., 1993.

付録 A. 奥行き計算

空間中の点 P と 2 つのカメラ座標系の原点を O, O' とすると, 図 1 より $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$ の関係が成り立つ. 第 1 のカメラ座標系に関して $\vec{OP} = Zx$ と表わす. ベクトル $\vec{O'P}$ を第 2 のカメラ座標系に関して $Z'x'$ とすると, 第 2 のカメラ座標系は第 1 のカメラ座標系に対して R だけ回転しているから, 第 1 のカメラ座標系に関しては $\vec{O'P} = Z'Rx'$ である. $\vec{OO'} = h$ であるから, 次の式が成り立つ.

$$Zx = h + Z'Rx' \quad (26)$$

両辺と Rx' とのベクトル積をとると次のようになる.

$$Zx \times Rx' = h \times Rx' \quad (27)$$

これから式 (16) が得られる. また x と式 (26) の両辺とのベクトル積をとると次のようになる.

$$0 = x \times h + Z'x \times Rx' \quad (28)$$

これから式 (22) が得られる.

付録 B. 従来の方法による 3 次元復元

それぞれのカメラに観測される点をそれぞれ x, x' とする. 各カメラの原点を O, O' とするとき, O を始点とし x を通る視線と, O' を始点とし x' を通る視線の交点を求めればよい. しかし誤差により, これらの視線は必ず交差するとは限らない. そこで, これらの視線の両方に最も近い点を復元点 r とする. この r はつぎのように計算できる.

$$m = N[x], \quad m' = N[x'] \quad (29)$$

$$\hat{r} = \frac{(h, m) - (m, Rm')(h, Rm')}{1 - (m, Rm')^2} \quad (30)$$

$$\hat{r}' = \frac{(m, Rm')(h, m) - (h, Rm')}{1 - (m, Rm')^2} \quad (31)$$

$$r = \frac{1}{2}(\hat{r}m + (h + \hat{r}'Rm')) \quad (32)$$