

コニック当てはめの信頼性評価

塩沢 仁[†] 金澤 靖[‡] 金谷 健一[†]

[†]群馬大学工学部情報工学科

[‡]群馬工業高等専門学校電子情報工学科

画像処理によって得られたエッジにコニックを当てはめることは、画像理解や画像からの3次元再構成において重要な問題の一つである。本論文ではまず画像の誤差の統計的なモデルを導入し、統計的に最適にコニックを当てはめる手法を示すと同時に、その当てはめの信頼性を共分散テンソルの形で定量的に評価する。そして当てはめと信頼性評価を系統的に行なう数値計算法を「くりこみ法」として定式化する。くりこみ法によるコニック当てはめは既に岩崎らが行なっているが、本論文では画像座標を用いて高次の項を解析することにより、より厳密なくりこみ法を構成する。また、当てはめの信頼性を視覚的に表示するために「標準変位」と呼ぶ手法を導入する。最後にシミュレーションや実画像を用いた実験によりその有効性を示す。

キーワード: コニック当てはめ, 信頼性評価, 誤差の統計的モデル, 画像処理, 統計的最適化

Reliability Evaluation of Conic Fitting

Hitoshi Shiozawa[†], Yasushi Kanazawa[‡] and Kenichi Kanatani[†]

[†]Department of Computer Science

Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

[‡]Department of Information and Computer Engineering

Gunma College of Technology, Maebashi, Gunma 371, Japan

Ellipses, or *conics* in general, are very important image features in computer vision and robotics applications. We introduce a statistical model of image noise and derive a statistically optimal scheme for conic fitting. We then analyze the reliability of the fitted conic in quantitative terms in the form of the covariance tensor. The numerical computation for computing an optimal fit and evaluating its reliability is formalized as a process called *renormalization*. We also present a scheme for visualizing the reliability of the fit by means of the *primary deviation pair*. The effectiveness of our method is demonstrated by doing experiments using synthetic and real images.

Key words: conic fitting, reliability evaluation, statistical model of noise, image processing, statistical optimization

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費一般研究 B(No. 07458067) および大川情報通信基金の研究助成によった。

[†]376 桐生市天神町 1-5-1, Tel: (0277)30-1841, Fax: (0277)30-1801, E-mail: kanatani@cs.gunma-u.ac.jp, shiozawa@aill.cs.gunma-u.ac.jp

[‡]371 前橋市鳥羽町 580, Tel: (0272)51-4291, Fax: (0272)51-8995, E-mail: kanazawa@ice.gunma-ct.ac.jp

1 序論

ロボットなどに搭載されたカメラの画像から物体の3次元形状を復元することを考える。室内環境の多くの物体は直線や曲線から構成されており、画像面に投影された曲線は楕円や双曲線、放物線で近似できる場合が多い。これらの曲線は総称してコニック(円錐曲線)と呼ばれ、画像から物体を認識するための重要な特徴の一つである[2, 17, 18]。また、画像中のコニックが既知の形状をもつ円や楕円の投影像であることがわかっていれば、それらの3次元位置を計算することもできる[5, 8]。したがって、コニックを検出し、正確にコニックを当てはめることは、画像理解や3次元の再構成において極めて重要なプロセスである。

コニック当てはめは古くから各種の方法が提案されてきた[1, 18, 19]。多くは最小二乗法をもとにするものであるが、最小二乗解には偏差があることが指摘された[3, 6, 16]。Porrillら[16]は画像の誤差の統計的な性質を考慮して、拡張カルマンフィルタによる不偏推定法を提案し、岩崎ら[4]はくりこみ法と呼ばれる不偏推定法を導いた。

しかし、従来のコニック当てはめ手法は最適に当てはめることのみを目的としており、当てはめたコニックがどの程度の信頼性を持つのかを定量的に評価してはいない。当てはめたコニックの信頼性が定量的に評価できれば、そのコニックから3次元復元を行なったときに、得られた3次元形状の信頼性を評価することができる。このような信頼性評価はどのようなデータを用いるにせよ、コンピュータビジョンのロボティクスへの応用においては不可欠である[12, 13, 14]。

そこで本論文では画像の誤差の統計的なモデルを導入し、統計的に最適かつ不偏なコニックの当てはめを計算するだけでなく、当てはめたコニックに対する信頼性も同時に計算するくりこみ法[9]について述べる。コニック当てはめのくりこみ法は既に岩崎ら[4]が示しているが、そこではデータを「Nベクトル」と呼ぶ単位ベクトルに正規化して解析している。本論文では画像の誤差の挙動がより直接的に反映されるように、画像座標そのものを用いた定式化を行ない、さらに高次の誤差項を解析することにより、より厳密なくりこみ法を構成する。当てはめの信頼性が共分散テンソルの形で定量的に評価できることは岩崎・金谷[3]が示しているが、本論文では当てはめたコニックの信頼性を視覚的に表示するために標準変位と呼ぶ手法を導入する。最後にシミュレーション画像と実画像を用いた実験により、その有効性を示す。

2 コニック当てはめ

コニックとは次式で表わされる xy 平面上の曲線のことである。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (1)$$

ここで行列 Q を次のように定義する。

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \quad (2)$$

ベクトル $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ を用いると、式(1)は次のように書ける。

$$(\mathbf{x}, Q\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

本論文ではベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} の内積を (\mathbf{a}, \mathbf{b}) で表わす。式(3)が実コニック、すなわち楕円や双曲線、放物線を表わすためには行列 Q の符号¹が(2, 1)または(1, 2)でなければならないことが知られている[5]。

画像から検出した画素列の座標を $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ とし、それらの真の値を $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ とする。ベクトル $\mathbf{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, 1)^T$ をデータとすると、コニック当てはめ問題は次のように書ける。

【問題】真の位置 $\{\bar{\mathbf{x}}_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$ が

$$(\bar{\mathbf{x}}_\alpha, Q\bar{\mathbf{x}}_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (4)$$

を満たすようなノルム1の行列 Q を、データ $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ から推定せよ。

行列 Q はスケールの不定性があるため、 $\|Q\| = 1$ と正規化する。ただし行列のノルムを $\|Q\| = \sqrt{\sum_{ij=1}^3 Q_{ij}^2}$ と定義する。

3 最適解

各データ \mathbf{x}_α を次のように分解する。

$$\mathbf{x}_\alpha = \bar{\mathbf{x}}_\alpha + \Delta\mathbf{x}_\alpha \quad (5)$$

誤差 $\Delta\mathbf{x}_\alpha$ は期待値0, 共分散行列

$$V[\mathbf{x}_\alpha] = E[\Delta\mathbf{x}_\alpha \Delta\mathbf{x}_\alpha^T] \quad (6)$$

の独立な確率変数であると仮定する。ただし $E[\cdot]$ は期待値を表わす。ベクトル \mathbf{x}_α , $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ の定義より、 $\Delta\mathbf{x}_\alpha$ の第3成分は常に0であるから、共分散行列 $V[\mathbf{x}_\alpha]$ はランク2の特異行列である。

¹正の固有値の数と負の固有値の数を並べたもの。

条件 $\|Q\| = 1$ のもとでの問題 1 の最適解は次の最小化によって求めることができる (付録 A [11]).

$$J[Q] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{x}_\alpha \otimes \mathbf{x}_\alpha - V[\mathbf{x}_\alpha]; Q)^2}{4(\mathbf{x}_\alpha, QV[\mathbf{x}_\alpha]Q\mathbf{x}_\alpha) + 2(V[\mathbf{x}_\alpha]Q; QV[\mathbf{x}_\alpha])} \rightarrow \min \quad (7)$$

本論文では行列の内積を $(A; B) = \sum_{ij=1}^3 A_{ij}B_{ij}$ と定義する. また \otimes はテンソル積を表わす記号である.

式 (7) の最適化によって得られた最適解 \hat{Q} を次のように分解する.

$$\hat{Q} = \bar{Q} + \Delta Q \quad (8)$$

ただし \bar{Q} は Q の真の値である. 推定値 \hat{Q} の信頼性は次の共分散テンソルによって評価できる.

$$V[\hat{Q}] = E[\Delta Q \otimes \Delta Q] \quad (9)$$

式 (7) の最適化から得られる最適解の共分散テンソルは次のように表わせる [11].

$$V[\hat{Q}] = \left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{P_Q(\mathbf{x}_\alpha \otimes \mathbf{x}_\alpha) \otimes P_Q(\mathbf{x}_\alpha \otimes \mathbf{x}_\alpha)}{4(\mathbf{x}_\alpha, QV[\mathbf{x}_\alpha]Q\mathbf{x}_\alpha) + 2(V[\mathbf{x}_\alpha]Q; QV[\mathbf{x}_\alpha])} \right)^- \quad (10)$$

ここに $(\cdot)^-$ は (Moore-Penrose) 一般逆テンソルを表わす. また $P_Q = (P_{ijkl})$ は次のように定義する射影テンソルである.

$$P_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \bar{Q}_{ij}\bar{Q}_{kl} \quad (11)$$

ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタである. 式 (10) は達成できる当てはめの精度の理論限界であることが証明できる [11].

4 最小二乗近似

一般に, 誤差の定性的な特徴 (例えば等方性や一様性など) は比較的容易に推定できるが, 誤差の絶対的な大きさを推定するのは困難である. そこで共分散行列が定数倍を除いて既知であると仮定する. そのため \mathbf{x}_α の共分散行列 $V[\mathbf{x}_\alpha]$ を次のように表わす.

$$V[\mathbf{x}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\mathbf{x}_\alpha] \quad (12)$$

ここに ϵ は誤差の大きさを表わす未知の定数であり, $V_0[\mathbf{x}_\alpha]$ は既知とする. ϵ をノイズレベル, $V_0[\mathbf{x}_\alpha]$ を正規化共分散行列と呼ぶ.

式 (7) の分母を定数で置き換えると, 次のような (2 次の) 最小二乗近似を得る.

$$\tilde{J}[Q] = (Q; M^*Q) \rightarrow \min \quad (13)$$

ただし M^* は次のように定義する有効モーメントテンソルである.

$$M^* = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (\mathbf{x}_\alpha \otimes \mathbf{x}_\alpha - \epsilon^2 V_0[\mathbf{x}_\alpha]) \otimes (\mathbf{x}_\alpha \otimes \mathbf{x}_\alpha - \epsilon^2 V_0[\mathbf{x}_\alpha]) \quad (14)$$

$$W_\alpha = \frac{1}{4(\mathbf{x}_\alpha, Q^*V_0[\mathbf{x}_\alpha]Q^*\mathbf{x}_\alpha) + 2\epsilon^2(V_0[\mathbf{x}_\alpha]Q^*; Q^*V_0[\mathbf{x}_\alpha])} \quad (15)$$

式 (15) の分母の Q^* は Q の適当な推定値とする. 式 (14), (15) で $\epsilon^2 = 0$ としたものがよく用いられる (1 次の) 最小二乗近似である.

最小化 (13) の解は M^* の最小固有値に対するノルム 1 の固有行列で与えられる. ただし $\mathcal{T}A = \lambda A$ (すなわち, 要素で表わして $\sum_{k,l=1}^3 T_{ijkl}A_{kl} = \lambda A_{ij}$) の関係が成り立つとき, 行列 A をテンソル \mathcal{T} の固有値 λ に対する固有行列と呼ぶ.

テンソル M^* の固有行列 Q を計算するには, $Q = (Q_{ij})$, $M^* = (M^*_{ijkl})$ をそれぞれ次のような 6 次元ベクトル q と 6 次元行列 M^* に変換すればよい. このとき, 行列 Q がテンソル M^* の固有値 λ の固有行列である必要十分条件は, ベクトル q が行列 M^* の固有値 λ の固有ベクトルであることである [5].

$$q = (Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, \sqrt{2}Q_{23}, \sqrt{2}Q_{31}, \sqrt{2}Q_{12})^T \quad (16)$$

$$M^* = \begin{pmatrix} M^*_{1111} & M^*_{1122} & M^*_{1133} \\ M^*_{2211} & M^*_{2222} & M^*_{2233} \\ M^*_{3311} & M^*_{3322} & M^*_{3333} \\ \sqrt{2}M^*_{2311} & \sqrt{2}M^*_{2322} & \sqrt{2}M^*_{2333} \\ \sqrt{2}M^*_{3111} & \sqrt{2}M^*_{3122} & \sqrt{2}M^*_{3133} \\ \sqrt{2}M^*_{1211} & \sqrt{2}M^*_{1222} & \sqrt{2}M^*_{1233} \\ \sqrt{2}M^*_{1123} & \sqrt{2}M^*_{1131} & \sqrt{2}M^*_{1112} \\ \sqrt{2}M^*_{2223} & \sqrt{2}M^*_{2231} & \sqrt{2}M^*_{2212} \\ \sqrt{2}M^*_{3323} & \sqrt{2}M^*_{3331} & \sqrt{2}M^*_{3312} \\ 2M^*_{2323} & 2M^*_{2331} & 2M^*_{2312} \\ 2M^*_{3123} & 2M^*_{3131} & 2M^*_{3112} \\ 2M^*_{1223} & 2M^*_{1231} & 2M^*_{1212} \end{pmatrix} \quad (17)$$

5 不偏推定量

前節の (1 次または 2 次の) 最小二乗近似で得られる解は統計的な偏差を生じることが知られている [3, 4, 5, 6]. これは式 (14) のテンソルの期待値が 0 ではなく $E[M^*] = O(\epsilon^2)$ となるためである. このため, よく知られた摂動定理 [5, 10] より, テンソル M^* の固有行

列の期待値は真の値に比べて $O(\epsilon^2)$ の偏差が生じる。この偏差は次のようにして取り除くことができる。まずモーメントテンソル \mathcal{M} を次のように定義する。

$$\mathcal{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \otimes \mathbf{x}_{\alpha} \otimes \mathbf{x}_{\alpha} \otimes \mathbf{x}_{\alpha} \quad (18)$$

\mathcal{M} の \mathbf{x}_{α} を $\bar{\mathbf{x}}_{\alpha}$ に置き換えた値を $\bar{\mathcal{M}}$ とする。すると式 (4) より $\bar{\mathcal{M}}\mathbf{Q} = 0$ が成り立つ。すなわち \mathbf{Q} は $\bar{\mathcal{M}}$ の固有値 0 に対する固有行列である。そこで、テンソル $\mathcal{N}^{(1)} = (N_{ijkl}^{(1)})$, $\mathcal{N}^{(2)} = (N_{ijkl}^{(2)})$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} N_{ijkl}^{(1)} = & \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{ij} x_{\alpha(k)} x_{\alpha(l)} \\ & + V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{ik} x_{\alpha(j)} x_{\alpha(l)} + V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{il} x_{\alpha(j)} x_{\alpha(k)} \\ & + V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{jk} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(l)} + V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{jl} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(k)} \\ & + V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{ki} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(j)}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} N_{ijkl}^{(2)} = & \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} (V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{ij} V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{kl} \\ & + V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{ik} V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{jl} + V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{il} V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]_{jk}) \end{aligned} \quad (20)$$

テンソル $\mathcal{N}^{(1)}$ の定義式において \mathbf{x}_{α} を $\bar{\mathbf{x}}_{\alpha}$ で置き換えた値を $\bar{\mathcal{N}}^{(1)}$ とすると、モーメントテンソル \mathcal{M} の期待値が次式となることが容易にわかる [7]。

$$E[\mathcal{M}] = \bar{\mathcal{M}} + \epsilon^2 \bar{\mathcal{N}}^{(1)} + \epsilon^4 \mathcal{N}^{(2)} \quad (21)$$

またテンソル $\mathcal{N}^{(1)}$ の期待値は次式で得られることがわかる [7]。

$$E[\mathcal{N}^{(1)}] = \bar{\mathcal{N}}^{(1)} + 2\epsilon^2 \mathcal{N}^{(2)} \quad (22)$$

そこで不偏モーメントテンソル $\hat{\mathcal{M}}$ を

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - \epsilon^2 \mathcal{N}^{(1)} + \epsilon^4 \mathcal{N}^{(2)} \quad (23)$$

と定義すれば $E[\hat{\mathcal{M}}] = \bar{\mathcal{M}}$ となる。したがって、次の最小化の解が \mathbf{Q} の不偏推定量となる。

$$\hat{J}[\mathbf{Q}] = (\mathbf{Q}; \hat{\mathcal{M}}\mathbf{Q}) \rightarrow \min \quad (24)$$

すなわち、 \mathbf{Q} の不偏推定量は $\hat{\mathcal{M}}$ の最小固有値に対するノルム 1 の固有行列で与えられる。

6 くりこみ法

式 (23) の不偏モーメントテンソルを計算するためにはノイズレベル ϵ の値を知る必要がある。これを小さ

く見積もれば偏差が打ち消せず、また大きく見積もれば逆方向に偏差を生じてしまう。そこでくりこみ法 [9, 10] を用いる。これは反復によって式 (23) の不偏モーメントテンソルの最小固有値が 0 になるように ϵ を決定するものであり、これによって偏差が除去されるとともに、事後的にノイズレベル ϵ を推定することもできる。

ϵ を変数 c に置き換え、 W_{α} の更新を考慮すると、(2 次) のくりこみ法が次のように構成できる [7]。

1. $c = 0$, $W_{\alpha} = 1$, $\alpha = 1, \dots, N$ とする。
2. 式 (18), (19), (20) によりテンソル \mathcal{M} , $\mathcal{N}^{(1)}$, $\mathcal{N}^{(2)}$ を計算する。
3. 次のテンソルの最小固有値 λ と対応するノルム 1 の固有行列 \mathbf{Q} を計算する。

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - c\mathcal{N}^{(1)} + c^2\mathcal{N}^{(2)} \quad (25)$$

4. $\lambda \approx 0$ なら \mathbf{Q} , c , $\hat{\mathcal{M}}$ を返して終了する。そうでなければ c , W_{α} を次のように更新する。

$$\begin{aligned} D = & \left((\mathbf{Q}; \mathcal{N}^{(1)}\mathbf{Q}) - 2c(\mathbf{Q}; \mathcal{N}^{(2)}\mathbf{Q}) \right)^2 \\ & - 4\lambda(\mathbf{Q}; \mathcal{N}^{(2)}\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (26)$$

If $D \geq 0$,

$$c \leftarrow c + \frac{(\mathbf{Q}; \mathcal{N}^{(1)}\mathbf{Q}) - 2c(\mathbf{Q}; \mathcal{N}^{(2)}\mathbf{Q})\sqrt{D}}{2(\mathbf{Q}; \mathcal{N}^{(2)}\mathbf{Q})} \quad (27)$$

If $D < 0$, $c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\mathbf{Q}; \mathcal{N}^{(1)}\mathbf{Q})}$ (28)

$$W_{\alpha} \leftarrow \frac{1}{4(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{Q}V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]\mathbf{Q}\mathbf{x}_{\alpha}) + 2c(V_0[\mathbf{x}_{\alpha}]\mathbf{Q}; \mathbf{Q}V_0[\mathbf{x}_{\alpha}])} \quad (29)$$

5. ステップ 2 へ戻る。

上記の計算において c^2 の項を無視し、式 (27) の代わりに常に式 (28) を用いるものが通常の (1 次) のくりこみ法である。両者の差は極めて小さい。

くりこみ法で返された行列 \mathbf{Q} を $\hat{\mathbf{Q}}$ と書く。くりこみ法で返された c の値から二乗ノイズレベルの不偏推定量 $\hat{\epsilon}^2$ が次のように得られる [10]。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 5/N} \quad (30)$$

これは式 (24) の残差を $\hat{J}[\hat{\mathbf{Q}}]$ とするとき、 $N\hat{J}[\hat{\mathbf{Q}}]/\epsilon^2$ が近似的に自由度 $N - 5$ の χ^2 分布に従う確率変数であることから導かれる [7]。

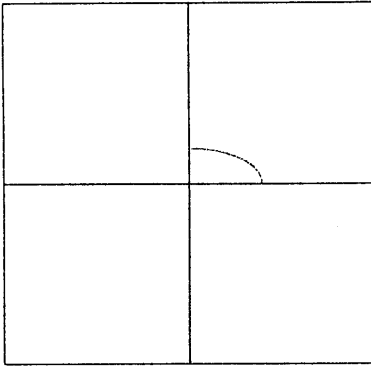


図 1: 楕円上の等分点.

推定値 \hat{Q} の共分散テンソルは次のように近似できる.

$$\mathcal{V}[\hat{Q}] \approx \frac{\hat{\epsilon}^2}{N} (\hat{M})_5^{-} \quad (31)$$

記号 $(\cdot)_5^{-}$ はランクを 5 に拘束した, すなわちスペクトル分解して最小固有値を 0 とした一般逆テンソルを表わす [5]. これはくりこみ法が完全に収束していない場合に \hat{M} の固有値が厳密に 0 とは限らないことを考慮したためである.

7 標準変位

式 (31) で計算した共分散テンソル $\mathcal{V}[\hat{Q}]$ を次のようにスペクトル分解する [5].

$$\mathcal{V}[\hat{Q}] = \lambda_1 \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + \lambda_2 \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 \quad (32)$$

ここに λ_1, λ_2 は $\mathcal{V}[\hat{Q}]$ の固有値であり, \mathbf{U}, \mathbf{V} は対応するノルム 1 の固有行列である. 行列 \mathbf{U} は誤差の最も発生しやすい方向を示し, λ_1 はその方向における分散を示す. したがって, 計算した \hat{Q} の信頼性を次の二つの行列で表わすことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^+ &= N[\hat{Q} + \sqrt{\lambda_1} \mathbf{U}] \\ \mathbf{Q}^- &= N[\hat{Q} - \sqrt{\lambda_1} \mathbf{U}] \end{aligned} \quad (33)$$

ただし $N[\cdot]$ は行列のノルムを 1 に正規化する作用素である. これらの行列の表わすコニックを標準変位と呼ぶ [12, 13, 14].

8 実験

図 1 は楕円上の第 1 象限における 60 個の等分点を示す. 長軸半径, 短軸半径はそれぞれ 100 (画素), 50 (画

素) である. 各点の x, y 座標に期待値 0, 標準偏差 1 (画素) の正規乱数を独立に加えてシミュレーションを行なった. 毎回異なる誤差を用いて最小二乗法 (くりこみ法で反復を行なわず, 最初から真の値による式 (29) の重みを与えたもの) で 10 回の当てはめを行なった結果を図 2(a) に示す. 図中の破線は真の楕円を表わしている. 図 2(b) は同じデータを用いてくりこみ法による当てはめを行なった結果を示す. 図からわかるように, 最小二乗法の解には偏差が存在し, くりこみ法によって偏差が取り除かれることがわかる.

図 3(a) はノイズを加えたデータ点の一例である. 図 3(b) はこれにくりこみ法による当てはめを行なった結果である. 図中の実線は当てはめた楕円を示し, 破線は標準変位を示す.

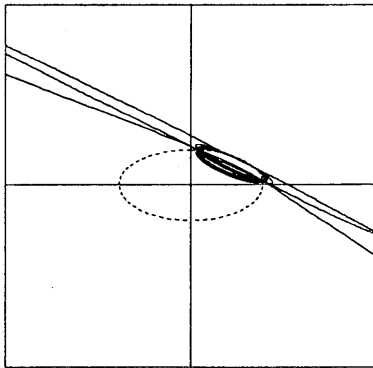
図 4(a) に実画像からエッジを検出した二値画像を示す. 図 4(b) にくりこみ法による当てはめ結果と標準変位を示す. 図 5(a), (b) および図 6(a), (b) はエッジの部分の画素数を少なくしたものである. このように, 当てはめる画素の数が少なくなると標準変位の差が急速に広がる.

9 まとめ

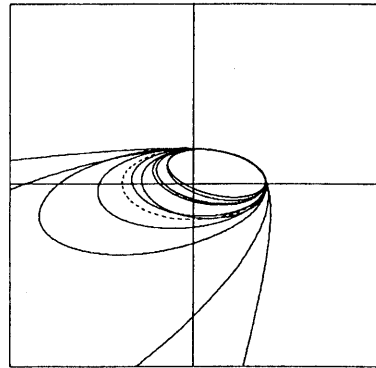
本論文では, 画像の誤差の統計的なモデルを画像座標で表わし, 岩崎ら [4] の提案したくりこみ法よりも厳密なくりこみ法により統計的に最適なコニックを当てはめる方法を示した. 同時に, 当てはめの信頼性を共分散テンソルの形で定量的に評価を行なうとともに, 標準変位と呼ぶ手法を用いて, この信頼性を視覚的に表示した.

参考文献

- [1] F. L. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Computer Graphics and Image Processing*, 9-1 (1979), 56-71.
- [2] D. Forsyth, J. L. Mundy, A. Zisserman, C. Coelho, A. Heller and C. Rothwell, Invariant descriptors for 3-D object recognition and pose, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13-10 (1991), 971-991.
- [3] 岩崎利夫, 金谷健一, コニック当てはめの統計的偏差と不偏推定法, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77 (1992), 9-16.

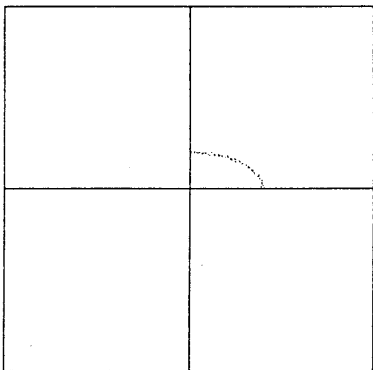


(a)

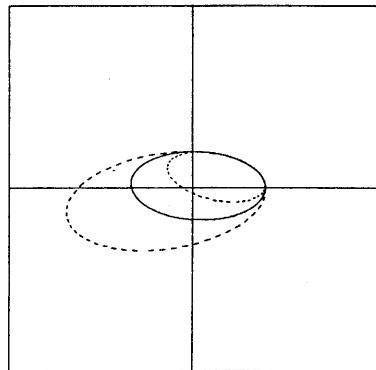


(b)

図 2: (a) 最小二乗法による当てはめ. (b) くりこみ法による当てはめ.



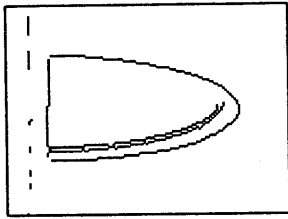
(a)



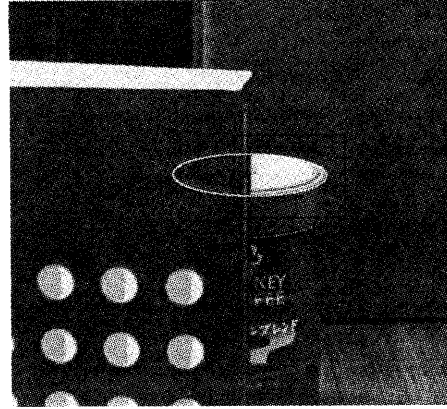
(b)

図 3: (a) ノイズを加えたデータ点. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.

- [4] 岩崎利夫, 丸山保, 金谷健一, くりこみ法によるコニック当てはめ, 情報処理学会研究報告, 92-CV-79 (1992), 25-32.
- [5] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [6] K. Kanatani, Statistical bias of conic fitting and renormalization, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **16-3** (1994), 320-326.
- [7] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Lecture Note, Department of Computer Science, Gunma University, Second Edition, June 1995.
- [8] K. Kanatani and W. Liu, 3-D interpretation of conics and orthogonality, *CVGIP: Image Understanding*, **58-3** (1993), 286-301.
- [9] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35-2** (1994), 201-209.
- [10] 金谷健一, 「空間データの数理 — 3次元コンピュータビジョンに向けて —」, 朝倉書店, 1995.
- [11] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-8** (1995), 1865-1873.
- [12] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E78-D-7** (1995), 917-922.

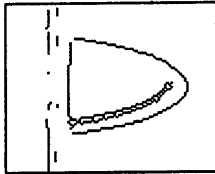


(a)

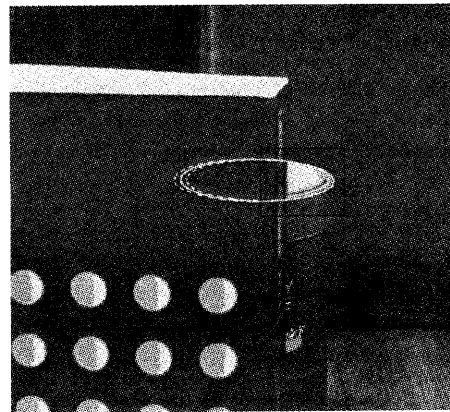


(b)

図 4: (a) エッジ画像. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.

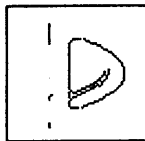


(a)

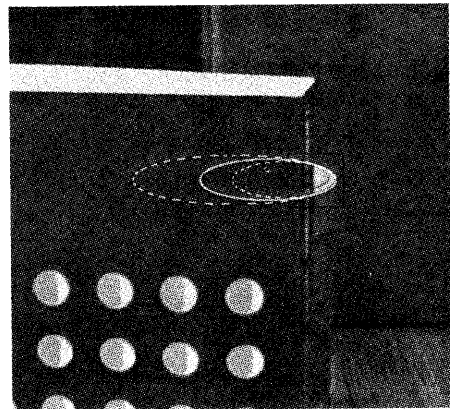


(b)

図 5: (a) エッジ画像. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.



(a)



(b)

図 6: (a) エッジ画像. (b) くりこみ法による当てはめと標準変位.

- [13] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of 3-D reconstruction by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, to appear.
- [14] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of fitting a plane to range data, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E78-D-12 (1995), to appear.
- [15] 金澤靖, 塩沢仁, 金谷健一, 直線当てはめの信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 95-CV-96 (1995).
- [16] J. Porrill, Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter, *Image and Vision Computing*, 8-1 (1990), 37-41.
- [17] C. A. Rothwell, A. Zisserman, C. I. Marinos, D. A. Forsyth and J. L. Mundy, Relative motion and pose from arbitrary plane curves, *Image and Vision Computing*, 10-4, (1992), 250-262.
- [18] S. Safaee-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib and K. C. Smith, Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey-level images, *CVGIP: Image Understanding*, 54-2 (1991), 259-274.
- [19] P. D. Sampson, Fitting conic sections to "very scattered" data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm, *Computer Graphics and Image Processing*, 18-1 (1982), 97-108.

付録 A. 最適解の計算

行列 X_α を次のように定義する.

$$X_\alpha = \mathbf{x}_\alpha \otimes \mathbf{x}_\alpha \quad (34)$$

上式で \mathbf{x}_α を $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ に置き換えたものを \bar{X}_α とおけば, 式 (4) は次のように書ける.

$$(\bar{X}_\alpha; \mathbf{Q}) = 0 \quad (35)$$

式 (5) を式 (34) に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} X_\alpha &= (\bar{\mathbf{x}}_\alpha + \Delta \mathbf{x}_\alpha) \otimes (\bar{\mathbf{x}}_\alpha + \Delta \mathbf{x}_\alpha) \\ &= \bar{X}_\alpha + \Delta \mathbf{x}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{x}}_\alpha + \bar{\mathbf{x}}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{x}_\alpha \\ &\quad + \Delta \mathbf{x}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{x}_\alpha \end{aligned} \quad (36)$$

上式の期待値は次のようになる.

$$E[X_\alpha] = \bar{X}_\alpha + V[\mathbf{x}_\alpha] \quad (37)$$

X_α の有効値 X_α^* を次のように定義する.

$$X_\alpha^* = X_\alpha - V[\mathbf{x}_\alpha] \quad (38)$$

$X_\alpha^* = \bar{X}_\alpha + \Delta X_\alpha$ とおけば, ΔX_α は次のような期待値 $\mathbf{0}$ の確率変数行列となる.

$$\begin{aligned} \Delta X_\alpha &= X_\alpha^* - \bar{X}_\alpha \\ &= \Delta \mathbf{x}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{x}}_\alpha + \bar{\mathbf{x}}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{x}_\alpha + \Delta \mathbf{x}_\alpha \otimes \Delta \mathbf{x}_\alpha \\ &\quad - V[\mathbf{x}_\alpha] \end{aligned} \quad (39)$$

ベクトル $\bar{\mathbf{x}}_\alpha, \Delta \mathbf{x}_\alpha$ の第 i 成分をそれぞれ $\bar{x}_{\alpha(i)}, \Delta x_{\alpha(i)}$ と書くと, 共分散テンソル $\mathcal{V}[X_\alpha]$ の $ijkl$ 要素 $\mathcal{V}[X_\alpha]_{ijkl}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[\Delta X_\alpha \otimes \Delta X_\alpha]_{ijkl} &= E[\Delta x_{\alpha(j)} \Delta x_{\alpha(k)}] \bar{x}_{\alpha(i)} \bar{x}_{\alpha(l)} \\ &\quad + E[\Delta x_{\alpha(j)} \Delta x_{\alpha(l)}] \bar{x}_{\alpha(i)} \bar{x}_{\alpha(k)} \\ &\quad + E[\Delta x_{\alpha(i)} \Delta x_{\alpha(k)}] \bar{x}_{\alpha(j)} \bar{x}_{\alpha(l)} \\ &\quad + E[\Delta x_{\alpha(i)} \Delta x_{\alpha(l)}] \bar{x}_{\alpha(j)} \bar{x}_{\alpha(k)} \\ &\quad - E[\Delta x_{\alpha(i)} \Delta x_{\alpha(j)}] V[\mathbf{x}_\alpha]_{kl} \\ &\quad - E[\Delta x_{\alpha(k)} \Delta x_{\alpha(l)}] V[\mathbf{x}_\alpha]_{ij} \\ &\quad + E[\Delta x_{\alpha(i)} \Delta x_{\alpha(j)} \Delta x_{\alpha(k)} \Delta x_{\alpha(l)}] \\ &\quad + V[\mathbf{x}_\alpha]_{ij} V[\mathbf{x}_\alpha]_{kl} \\ &= V[\mathbf{x}_\alpha]_{jl} \bar{x}_{\alpha(i)} \bar{x}_{\alpha(k)} + V[\mathbf{x}_\alpha]_{jk} \bar{x}_{\alpha(i)} \bar{x}_{\alpha(l)} \\ &\quad + V[\mathbf{x}_\alpha]_{il} \bar{x}_{\alpha(j)} \bar{x}_{\alpha(k)} + V[\mathbf{x}_\alpha]_{ik} \bar{x}_{\alpha(j)} \bar{x}_{\alpha(l)} \\ &\quad + V[\mathbf{x}_\alpha]_{ik} V[\mathbf{x}_\alpha]_{jl} + V[\mathbf{x}_\alpha]_{il} V[\mathbf{x}_\alpha]_{jk} \end{aligned} \quad (40)$$

ただし, 期待値 $\mathbf{0}$, 共分散行列 $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ の正規分布に従う確率変数 $\mathbf{v} = (v_i)$ に対する次の恒等式を用いた.

$$E[v_i v_j v_k v_l] = \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ik} \Sigma_{jl} + \Sigma_{il} \Sigma_{jk} \quad (41)$$

行列 \mathbf{Q} の当てはめの最適解は次の最小化によって得られる [11, 15].

$$J[\mathbf{Q}] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(X_\alpha; \mathbf{Q})^2}{(\mathbf{Q}; \mathcal{V}[X_\alpha] \mathbf{Q})} \rightarrow \min \quad (42)$$

式 (40) を分母に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}; \mathcal{V}[X_\alpha] \mathbf{Q}) &= 4(\bar{\mathbf{x}}_\alpha, \mathbf{Q} \mathcal{V}[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{x}}_\alpha) \\ &\quad + 2(V[\mathbf{x}_\alpha] \mathbf{Q}; \mathbf{Q} V[\mathbf{x}_\alpha]) \end{aligned} \quad (43)$$

この式中の $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ をデータ \mathbf{x}_α で近似し, 式 (42) に代入すると式 (7) を得る.