

## 直線当てはめの信頼性評価

金澤 靖<sup>†</sup> 塩沢 仁<sup>‡</sup> 金谷 健一<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>群馬工業高等専門学校 電子情報工学科  
<sup>‡</sup>群馬大学工学部情報工学科

直線当てはめは、画像理解や画像からの3次元の再構成において最も基本的かつ重要な問題の一つである。本論文では、直線当てはめの手法の最適性と信頼性評価を数学的に解析する。まず画像の誤差の統計的なモデルを導入し、統計的に最適に直線を当てはめる方法を導出すると同時に、その当てはめの信頼性を共分散行列の形で定量的に評価する。そして、当てはめと信頼性評価を系統的に行なう数値計算法を「くりこみ法」として定式化する。また、この信頼性を視覚的に表示するために「標準変位」と呼ぶ手法を導入する。さらに、密な画素から成るエッジに当てはめた直線の信頼性を「漸近近似」により解析的な公式として導く。最後にシミュレーションおよび実画像による実験により、その有効性を示す。

キーワード: 直線当てはめ, 誤差の統計的モデル, 最適化手法, 画像処理, 信頼性評価, エッジ検出

## Reliability of Line Fitting

Yasushi Kanazawa<sup>†</sup>, Hitoshi Shiozawa<sup>‡</sup> and Kenichi Kanatani<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Department of Information and Computer Engineering  
Gunma College of Technology, Maebashi, Gunma 371, Japan

<sup>‡</sup>Department of Computer Science  
Gunma University, Kiryu, Gunma 376, Japan

Line fitting is one of the most important processes in image understanding and 3-D reconstruction from images. We introduce a statistical model of image noise and derive a statistically optimal scheme for line fitting. We then analyze the reliability of the fitted line in quantitative terms in the form of the covariance matrix. The numerical computation for computing an optimal fit and evaluating its reliability is formalized as a process called *renormalization*. We also present a scheme for visualizing the reliability of the fit by means of the *primary deviation pair* and derive an analytical expression for the reliability of a line fitted to a dense array of edge pixels by using an *asymptotic approximation*. The effectiveness of our method is demonstrated by doing experiments using synthetic and real images.

**Key words:** line fitting, statistical model of noise, optimization technique, image processing, reliability evaluation, edge detection

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費一般研究B (No. 07458067) および大川情報通信基金の研究助成によった。

<sup>†</sup>371 前橋市鳥羽町 580, Tel: (0272)51-4291, Fax: (0272)51-8995, E-mail: kanazawa@ice.gunma-ct.ac.jp

<sup>‡</sup>376 桐生市天神町 1-5-1, Tel: (0277)30-1841, Fax: (0277)30-1801, E-mail: shiozawa@mail.cs.gunma-u.ac.jp,

kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

## 1 はじめに

ロボットに効率よく作業させるための重要な問題の一つは3次元環境理解である。屋内のロボットの作業環境では床や天井や机など平面状のものが多く、それらの輪郭は通常直線状のエッジにより構成されている。したがって、画像内の直線を検出することは、画像理解や画像からの3次元の再構成にとって不可欠かつ重要なプロセスの一つである。また、検出した直線から「消失点」や「出現点」を計算することによって3次元形状を復元することもできる[3]。

一般に、画像内の直線はHough変換やエッジ検出で得られた画素列に直線を当てはめることによって求められる。しかし、画像にはノイズが含まれており、エッジ検出などの画像処理には誤差が伴う。したがって、最小二乗法のような最適化手法によって直線を最適に当てはめる必要がある[2, 13, 14, 15]。

一方、当てはめた直線から消失点や出現点を計算して3次元解析を行なうことが目的の場合は、単に最適に直線を当てはめただけでは不十分であり、その信頼性を定量的に評価することが必要である[1, 4]。なぜなら、ノイズや誤差によって消失点や出現点にも誤差が生じ、これが復元した3次元形状に誤差をもたらすからである。従来の処理ではこの誤差がどの程度であるかを定量的に評価するのが困難であった。

そこで本論文では、画像の誤差の統計的なモデルを定義し、直線当てはめを統計的推定問題とみなし、最尤推定の意味で最適な解を得るための最適化手法として定式化する。そして、得られる最適解の共分散行列を理論的に導くことによって当てはめの信頼性を評価する。次に、最適化計算とその信頼性評価を系統的に行なう数値計算法をくりこみ法として定式化する。さらに、密な画素から成るエッジに当てはめた直線の信頼性を漸近近似により解析的な公式によって表わす。また、計算した信頼性を標準変位によって視覚的に表示する手法を示す。最後に、シミュレーション画像や実画像による実験により、その有効性を示す。

## 2 直線当てはめ

検出した直線の画素列の座標を  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  とする。各画素の真の位置を  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$  とし、これらの点を通る直線の方程式を  $Ax + By + C = 0$  とすると、次式が成り立つ。

$$A\bar{x}_\alpha + B\bar{y}_\alpha + C = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (1)$$

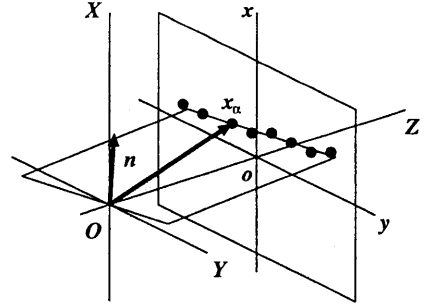


図1: 直線の当てはめ

点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  と直線の係数  $A, B, C$  を次の3次元ベクトルで表わす。

$$\mathbf{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (2)$$

真の位置をベクトル  $\bar{\mathbf{x}}_\alpha = (\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha, 1)^T$  で表わすと、式(1)は次のように表わせる。

$$(\mathbf{n}, \bar{\mathbf{x}}_\alpha) = 0 \quad (3)$$

本論文では、ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積を  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  で表わす。

式(2)のベクトル  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{n}$  は次のように解釈できる(図1)。3次元空間にXYZ座標系をとり、 $Z = 1$ を画像面とみなす。そして  $(0, 0, 1)$  を画像原点  $o$  とし、 $X$  軸、 $Y$  軸に平行な座標軸を持つ  $xy$  座標系をとる。すると  $\mathbf{x}_\alpha$  は原点  $O$  を始点とし画像面  $Z = 1$  の上の点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  を終点とするベクトルとなる。また  $\mathbf{n}$  は画像面  $Z = 1$  の上の直線と原点  $O$  とで定義される平面の単位法線ベクトルである。

図1の関係はカメラの撮像のモデルに用いられる透視変換を表わし、ベクトル  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{n}$  の成分はそれぞれ画像面上の点と直線の同次座標に対応している。3次元空間の画像上への透視変換の関係を利用して画像から3次元復元を行なう場合は、この透視変換とその画像を撮影したカメラとを対応させるカメラキャリブレーションが必要となる[9]。しかし、直線当てはめの問題では、図1の透視変換は計算の便宜のための仮想的なモデルであり、実際のカメラと対応している必要はない。

データ点列  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  から直線を当てはめる問題は次の統計的推定問題とみなせる。

問題1 真の位置  $\{\bar{\mathbf{x}}_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  が

$$(\mathbf{n}, \bar{\mathbf{x}}_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (4)$$

を満たすような単位ベクトル  $\mathbf{n}$  を、データ  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  から推定せよ。

ベクトル  $\mathbf{n}$  にはスケールの不定性があるため、単位ベクトル ( $\|\mathbf{n}\| = 1$ ) に正規化する。本論文ではベクトル  $\mathbf{a}$  のノルムを  $\|\mathbf{a}\|$  で表わす。

### 3 最適解とその信頼性

データ  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  を次のように分解する。

$$\mathbf{x}_\alpha = \bar{\mathbf{x}}_\alpha + \Delta\mathbf{x}_\alpha \quad (5)$$

そして、誤差  $\Delta\mathbf{x}_\alpha$  は期待値  $\mathbf{0}$ 、共分散行列

$$V[\mathbf{x}_\alpha] = E[\Delta\mathbf{x}_\alpha \Delta\mathbf{x}_\alpha^\top] \quad (6)$$

の独立な確率変数であると仮定する。  $E[\cdot]$  は期待値を表わす。ベクトル  $\mathbf{x}_\alpha$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$  の定義より  $\Delta\mathbf{x}_\alpha$  の第3成分は常に0であるので、共分散行列  $V[\mathbf{x}_\alpha]$  はランク2の特異行列である。

条件  $\|\mathbf{n}\| = 1$  のもとでの問題1の最適解は次の最小化によって求めることができる(付録A [6])。

$$J[\mathbf{n}] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{x}_\alpha)^2}{(\mathbf{n}, V[\mathbf{x}_\alpha] \mathbf{n})} \rightarrow \min \quad (7)$$

得られた最適解を  $\hat{\mathbf{n}}$  と置き、次のように表わす。

$$\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}} + \Delta\mathbf{n} \quad (8)$$

ただし  $\bar{\mathbf{n}}$  は  $\mathbf{n}$  の真の値である。推定値  $\hat{\mathbf{n}}$  の信頼性は共分散行列  $V[\hat{\mathbf{n}}] = E[\Delta\mathbf{n} \Delta\mathbf{n}^\top]$  で評価できる。式(7)の最適解の共分散行列は次のように表わせる(付録B [6])。

$$V[\hat{\mathbf{n}}] = \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \right)^{-} \quad (9)$$

ここに  $(\cdot)^{-}$  は(Moore-Penrose)一般逆行列を表わす。式(9)は、達成できる当てはめの精度の理論限界であることが証明できる[6]。

【例】 画像の誤差が各座標成分ごとに独立で平均0、分散  $\sigma^2$  の正規分布に従えば、各データ  $\mathbf{x}_\alpha$  の共分散行列は次のように書ける。

$$V[\mathbf{x}_\alpha] = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

したがって、式(7)の最適化は次の最小二乗法と等価である。

$$\sum_{\alpha=1}^N D(p_\alpha, l)^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

ここに  $D(p_\alpha, l)$  は点  $p_\alpha$  と当てはめるべき直線  $l$  との距離である。式(9)の共分散行列  $V[\hat{\mathbf{n}}]$  は次のようになる。

$$V[\hat{\mathbf{n}}] = \frac{\sigma^2}{1 + d^2} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha \bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha & N \end{pmatrix}^{-} \quad (12)$$

ただし  $d$  は画像原点  $O$  から直線  $Ax + By + C = 0$  までの距離である。

### 4 最小二乗近似

一般的に、誤差の定性的な特徴(例えば等方性や一様性など)は比較的容易に推定できるが、誤差の絶対的な大きさを推定するのは困難である。そこで共分散行列が定数倍を除いて既知であると仮定する。そのために  $\mathbf{x}_\alpha$  の共分散行列  $V[\mathbf{x}_\alpha]$  を次のように表わす。

$$V[\mathbf{x}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\mathbf{x}_\alpha] \quad (13)$$

$\epsilon$  は誤差の大きさを表わす未知の定数であり、 $V_0[\mathbf{x}_\alpha]$  は既知とする。 $\epsilon$  をノイズレベル、 $V_0[\mathbf{x}_\alpha]$  を正規化共分散行列と呼ぶ。

関数  $J[\mathbf{n}]$  を定数倍しても式(7)の最小化の解は同じであるから、次のように書く。

$$\bar{J}[\mathbf{n}] = (\mathbf{n}, \mathbf{M} \mathbf{n}) \rightarrow \min \quad (14)$$

ただし、 $\mathbf{M}$  は次のように定義するモーメント行列である。

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^\top \quad (15)$$

$$W_\alpha = \frac{1}{(\mathbf{n}, V_0[\mathbf{x}_\alpha] \mathbf{n})} \quad (16)$$

式(16)の分母の  $\mathbf{n}$  を適当な推定値で置き換えれば、式(14)の最小化の解はモーメント行列  $\mathbf{M}$  の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる。これを最小二乗近似と呼ぶ。

### 5 不偏推定量

前節の考察より、まず  $\mathbf{n}$  の適当な初期値  $\mathbf{n}_0$  を仮定し、 $W_\alpha = W_\alpha(\mathbf{n}_0)$  として最小二乗近似によって得られる解を  $\mathbf{n}_1$  とし、次に  $W_\alpha = W_\alpha(\mathbf{n}_1)$  として得られる解を  $\mathbf{n}_2$  とし、以下これを繰り返すことが考えられ

る。しかし、このような反復では、真の重みを用いたとしても統計的な偏差を生じる。これは次のように示される。

モーメント行列  $M$  の期待値は次のように書ける。

$$\begin{aligned} E[M] &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} E[(\bar{\mathbf{x}}_{\alpha} + \Delta \mathbf{x}_{\alpha})(\bar{\mathbf{x}}_{\alpha} + \Delta \mathbf{x}_{\alpha})^{\top}] \\ &= \bar{M} + \frac{\epsilon^2}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} V_0[\mathbf{x}_{\alpha}] \end{aligned} \quad (17)$$

ただし  $\bar{M}$  は式 (15) の  $\mathbf{x}_{\alpha}$  を真の値  $\bar{\mathbf{x}}_{\alpha}$  で置き換えて得られる行列である。式 (17) は、モーメント行列  $M$  が真の値から  $O(\epsilon^2)$  だけ摂動することを示している。このとき「摂動定理」 [3, 7] により、その固有値、固有ベクトルも  $O(\epsilon^2)$  の摂動を受ける。したがって最小二乗近似で得られる解も  $O(\epsilon^2)$  の摂動を受け、その期待値は 0 でない。

そこで、不偏モーメント行列  $\hat{M}$  を次のように定義する。

$$\hat{M} = M - \epsilon^2 N \quad (18)$$

ただし行列  $N$  は次のように定義する。

$$N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N V_0[\mathbf{x}_{\alpha}] \quad (19)$$

式 (17) より  $E[\hat{M}] = \bar{M}$  となるので、 $\mathbf{n}$  の不偏推定量が次の最小化の解として得られる。

$$\hat{J}[\mathbf{n}] = (\mathbf{n}, \hat{M} \mathbf{n}) \rightarrow \min \quad (20)$$

したがって、不偏モーメント行列  $\hat{M}$  の最小固有値に対する単位固有ベクトルが  $\mathbf{n}$  の不偏推定量となる。

## 6 くりこみ法

式 (18) によって不偏モーメント行列を計算するためには、ノイズレベル  $\epsilon$  の値を知る必要がある。これを小さく見積れば偏差が打ち消せず、また大きく見積ると逆方向に偏差を生じてしまう。しかし、先に述べたように、 $\epsilon$  の値を正確に知るのは困難である。そこでこれを回避するためにくりこみ法 [5, 7] を用いる。これは反復によって式 (18) の不偏モーメント行列の最小固有値が 0 になるように  $\epsilon$  を決定するものであり、これによって偏差が除去されるだけでなく、事後的にノイズレベル  $\epsilon$  を推定することもできる。

$\epsilon$  を変数  $c$  に置き換えると、くりこみ法の手順が次のように表わせる [5, 7]。

1.  $c = 0$ ,  $W_{\alpha} = 1$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  とおく。

.....

図 2: 実験に用いた点列

2. 式 (18) と (19) によって、行列  $M$ ,  $N$  を計算する。

3. 不偏モーメント行列

$$\hat{M} = M - cN \quad (21)$$

を計算し、その最小固有値  $\lambda$  と対応する単位固有ベクトル  $\mathbf{n}$  を計算する。

4.  $\lambda \approx 0$  であれば  $\mathbf{n}$ ,  $c$ ,  $M$  を返す。そうでなければ  $c$  と  $W_{\alpha}$  を次のように更新する。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\mathbf{n}, N \mathbf{n})} \quad (22)$$

$$W_{\alpha} \leftarrow \frac{1}{(\mathbf{n}, V_0[\mathbf{x}_{\alpha}] \mathbf{n})} \quad (23)$$

5. ステップ 2 に戻る。

返されたベクトル  $\mathbf{n}$  を  $\hat{\mathbf{n}}$  と書く。くりこみ法で返された  $c$  の値から、二乗ノイズレベル  $\epsilon^2$  の不偏推定量が次のように得られる [7]。

$$\epsilon^2 = \frac{c}{1 - 2/N} \quad (24)$$

これは式 (20) の残差を  $\hat{J}[\hat{\mathbf{n}}]$  とするとき、 $N \hat{J}[\hat{\mathbf{n}}]/\epsilon^2$  が近似的に自由度  $N - 2$  の  $\chi^2$  分布に従う確率変数であることから導かれる [8]。

式 (9) の共分散行列は、返された不偏モーメント行列  $\hat{M}$  を用いて次のように近似することができる。

$$V[\hat{\mathbf{n}}] = \frac{\hat{\epsilon}^2}{N} (\hat{M})_2^{-} \quad (25)$$

記号  $(\cdot)_2^{-}$  はランクを 2 に拘束した、すなわちスペクトル分解 [3] して最小固有値を 0 とした一般逆行列を表わす。くりこみ法が完全に収束していれば  $\hat{M}$  の最小固有値が厳密に 0 であり、 $\hat{M}$  のランクは 2 となるが、誤差のためにランクが 2 でない可能性がある。式 (25) でランクを 2 に強制しているのはこれを防ぐためである [8]。

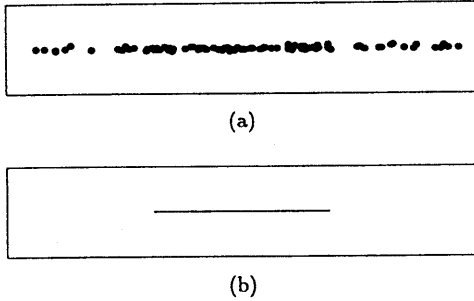


図 3: (a) 誤差の分布. (b) 誤差分布の理論限界

## 7 標準変位

$\hat{n}$  は単位ベクトルであるから、その誤差は  $\hat{n}$  の方向には発生せず、それと直交する面上に分布する。そこで共分散行列  $V[\hat{n}]$  を次のようにスペクトル分解する。

$$V[\hat{n}] = \lambda_1 \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \lambda_2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 \quad (26)$$

ここに  $\lambda_1, \lambda_2$  は  $V[\hat{n}]$  の固有値であり、 $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  は対応する単位固有ベクトルである。ベクトル  $\mathbf{u}$  は誤差の最も発生しやすい方向を示し、 $\lambda_1$  はその方向の分散を表わす。したがって  $\hat{n}$  の信頼性を次の二つのベクトルで表わすことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^+ &= N[\hat{n} + \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}], \\ \mathbf{n}^- &= N[\hat{n} - \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (27)$$

ただし  $N[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化を表わす作用素である。これらのベクトルの表わす直線を標準変位と呼ぶ [10, 11, 12]。

## 8 シミュレーション

図 2 は 8 点から成り、両端点間の距離が 40 画素の点列である。各点の  $x$  座標と  $y$  座標に独立に平均 0、標準偏差 3 画素の正規乱数を誤差として加える。

真の直線を  $(\bar{n}, \mathbf{x}) = 0$ 、当てはめた直線を  $(\hat{n}, \mathbf{x}) = 0$  とする。ベクトル  $\hat{n}$  の  $\bar{n}$  からのずれは第 1 近似において  $\bar{n}$  に直交する。そこで  $\hat{n}$  を  $\bar{n}$  に直交する平面上へ射影する。図 3(a) は 100 回シミュレーションを行なったときの誤差の分布を示す。これからわかるように、誤差の分布はほぼ 1 次元的である。これは点列の中心の周りの回転の自由度に対応している。図 3(a) の上下方向は当てはめた直線の平行移動の自由度に対応

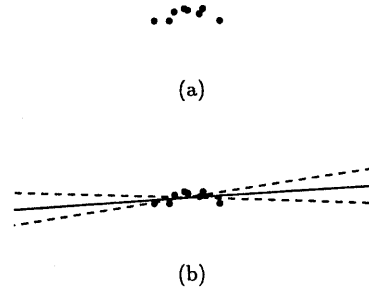


図 4: (a) 誤差を加えた点列の一例. (b) 当てはめた直線と標準変位

しているが、これはほぼ 0 である。図 3(b) の楕円は、式 (9) の共分散行列から定まる各方向の標準偏差を表わすものであるが、ほぼ線分に縮退している。図 3(a) と比較すると、誤差の分布が理論的な下限をほとんど達成していることがわかる。

図 4(a) はノイズを加えた点列の一例を示し、図 4(b) はくりこみ法で当てはめた直線 (実線) と標準変位 (破線) を示す。これからも誤差は主として点列の中心の周りの回転として生じることがわかる。

## 9 エッジ漸近近似

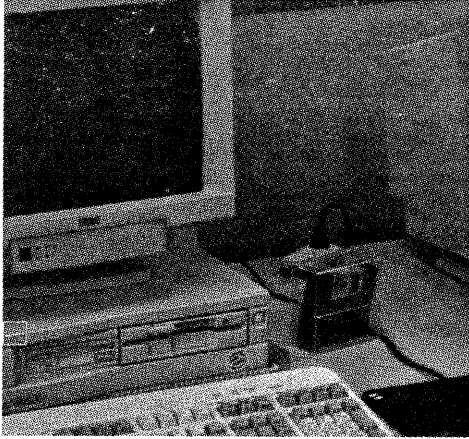
当てはめた直線の信頼性はくりこみ法の計算の過程から自動的に評価できる。しかし、画像のノイズが等方かつ一様であり、またエッジを構成する画素が十分が密であれば、その信頼性をあらかじめ計算することもできる。

画素数を  $N$  (奇数) とし、その両端点  $(x_1, y_1)$  と  $(x_N, y_N)$  の間の距離を  $w$  とする。また中点  $\mathbf{x}_C$  を次のように定義する。

$$\mathbf{x}_C = \begin{pmatrix} \bar{x}_{(1+N)/2} \\ \bar{y}_{(1+N)/2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

直線  $(n, \mathbf{x}) = 0$  の方向を表わす単位ベクトルを  $\mathbf{u}$  とすると、真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ 、 $N = 1, \dots, N$  がほぼ等間隔であれば、次の関係が成り立つ。

$$\bar{\mathbf{x}}_\alpha \approx \mathbf{x}_C + \frac{w}{N-1} \left( \alpha - \frac{N+1}{2} \right) \mathbf{u} \quad (29)$$



(a)



(b)

図 5: (a) 実画像から検出したエッジ (長さ 15 画素). (b) 当てはめた直線とその標準変位

上式より, 式 (12) は次のように近似できる.

$$V[\hat{n}] \approx \frac{\epsilon^2}{N(1+d^2)} \left( \mathbf{x}_C \mathbf{x}_C^\top + \frac{w^2(N+1)}{12(N-1)} \mathbf{u} \mathbf{u}^\top \right)^{-1} \quad (30)$$

エッジ密度 (単位長さ当りのエッジ画素数) を次のように定義する.

$$\rho = \frac{N}{w} \quad (31)$$

エッジが画像原点に近ければ  $\|\mathbf{x}_C\| \approx 1$ ,  $(\mathbf{x}_C, \mathbf{u}) \approx 0$  とみなせるから,  $N \rightarrow \infty$  のとき式 (30) は次のように近似できる.

$$V[\hat{n}] \approx \frac{12\epsilon^2}{\rho w^3(1+d^2)} \left( \mathbf{u} \mathbf{u}^\top + \frac{12}{w^2} \mathbf{x}_C \mathbf{x}_C^\top \right) \quad (32)$$

長さの単位を画像の大きさに比べ十分大きくとれば, 画像の原点から直線までの距離  $d$  は小さくなる. エッジの長さ  $w$  は通常は画像の大きさに比べ十分小さいから,  $1 \ll 12/w^2$  である. したがって, 式 (32) は次のように近似できる.

$$V[\hat{n}] \approx \frac{12\epsilon^2}{\rho w^3} \mathbf{u} \mathbf{u}^\top \quad (33)$$

これから, 標準変位が次のように近似できる.

$$\begin{aligned} n^+ &\approx N[\hat{n} + \frac{2\sqrt{3}\epsilon}{\rho^{1/2}w^{3/2}} \mathbf{u}], \\ n^- &\approx N[\hat{n} - \frac{2\sqrt{3}\epsilon}{\rho^{1/2}w^{3/2}} \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (34)$$

上式は, 当てはめた直線がほぼそのエッジの中点を通ることを示しており, 前節の実験結果をよく説明している. また誤差は  $\rho^{-1/2}$  と  $w^{-3/2}$  に近似的に比例す

ることがわかる. したがって, 当然ながらエッジ密度が大きければ, またエッジが長ければ誤差は小さくなる. 式 (33) は, エッジに当てはめた直線から消失点を計算して, 3次元形状を復元したりカメラキャリブレーションを行なったりするときの信頼性評価の基本となる式である [1, 4, 9].

## 10 実画像による実験

図 5(a) に実画像と検出したエッジ (長さ 15 画素) を示す. このエッジに当てはめた直線とその標準変位を図 5(b) に示す. またエッジの長さが短い場合 (9 画素) を図 6(a) および図 6(b) に示す. これらを比較してわかるように, エッジの長さが長ければ当てはめた直線は信頼性が高く, 短ければ信頼性が低くなる.

## 11 まとめ

本論文では, 画像の誤差の統計的なモデルを定義し, くりこみ法により統計的に最適に直線を当てはめる方法を導出した. 同時にその当てはめの信頼性を共分散行列の形で定量的に評価を行ない, 標準変位と呼ぶ手法を用いて, この信頼性を視覚的に表示できることを示した. また, 密な画像から成るエッジに当てはめた直線の信頼性を漸近近似により解析的な公式で表わした.

シミュレーション例や実画像例で仮定したように, 誤差が等方的の場合の最適解は最小二乗法で得られるものに一致し, 偏差は存在しない. したがって, く



(a)



(b)

図 6: (a) 実画像から検出したエッジ (長さ 9 画素). (b) 当てはめた直線とその標準変位

りこみ法を用いても、当てはめの精度自体の向上はない。しかし、くりこみ法の利点は信頼性が自動的に評価できることにある。このような定量的な信頼性評価は 3 次元の環境理解や画像理解において極めて重要となる [10, 11, 12].

#### 参考文献

- [1] B. Brillault-O'Mahony, New method for vanishing point detection, *CVGIP: Image Understanding*, 54-2 (1991), 289-300.
- [2] B. Kamgar-Parsi, B. Kamgar-Parsi and N. Netanyahu, A nonparametric method for fitting a straight line to a noisy image, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11-9 (1989), 998-1001.
- [3] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [4] 金谷健一, 画像の 3 次元解釈の統計的信頼性, 情報処理学会論文誌, 34-10 (1993), 2062-2070.
- [5] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, 35-2 (1994), 201-209.
- [6] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, 36-8 (1995), 1865-1873.
- [7] 金谷健一, 「空間データの数理 — 3次元コンピュータリングに向けて —」, 朝倉書店, 1995.
- [8] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Lecture Note, Department of Computer Science, Gunma University, Second Edition, June 1995.
- [9] K. Kanatani and T. Maruyama, Optimal focal length calibration system, *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots Systems*, July 1993, yokohama, Japan, Vol. 3, 1816-1821.
- [10] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E78-D-7 (1995), 917-922.
- [11] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of 3-D reconstruction by stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, to appear.
- [12] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Reliability of fitting a plane to range data, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E78-D-12 (1995), to appear.
- [13] N. Kiryati and A. M. Bruckstein, What's in a set of points?, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14-4 (1992), 496-500.

- [14] I. Weiss, Line fitting in a noisy image, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11-3 (1989), 325-329.
- [15] Y. T. Zhou, V. Venkateswar, and R. Chellappa, Edge detection and linear feature extraction using a 2-D random field model, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11-1 (1989), 84-95.

## 付録 A 最適解の計算

観測される  $\mathbf{x}_\alpha$  は誤差を含むため、式 (3) を満たすとは限らない。そこで直線  $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = 0$  を仮定し、誤差を補正した  $\mathbf{x}_\alpha - \Delta \mathbf{x}_\alpha$  が式 (3) を満たすようにすることを考える。すなわち

$$(\mathbf{x}_\alpha - \Delta \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{n}) = 0 \quad (35)$$

となるように  $\Delta \mathbf{x}_\alpha$  を定める。このような  $\Delta \mathbf{x}_\alpha$  は無数に存在するが、その中で確率的に最も可能性の高いものを選ぶ。誤差の分布が正規分布であれば、これは次のマハラノビス距離の二乗の最小化として定式化される。

$$J_\alpha = (\Delta \mathbf{x}_\alpha, V[\mathbf{x}_\alpha]^{-1} \Delta \mathbf{x}_\alpha) \rightarrow \min \quad (36)$$

このようにして選んだ  $\Delta \mathbf{x}_\alpha$  を式 (35) に代入した残差はベクトル  $\mathbf{n}$  の関数であるから、これを  $J_\alpha[\mathbf{n}]$  と書く。これは定数差を無視すれば、ベクトル  $\mathbf{n}$  が真の値であると仮定したときの  $\mathbf{x}_\alpha$  に含まれる誤差の対数尤度 (の符号を変えたもの) とみなせる。したがって、各点の誤差が独立であれば、 $\mathbf{n}$  の最尤推定の意味での最適な推定値が次の最小化によって得られる。

$$\sum_{\alpha=1}^N J_\alpha[\mathbf{n}] \rightarrow \min \quad (37)$$

具体的に計算すれば、式 (35)、(36) から定まる補正項  $\Delta \mathbf{x}_\alpha$  は次のようになる。

$$\Delta \mathbf{x}_\alpha = \frac{(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{n}) V[\mathbf{x}_\alpha] \mathbf{n}}{(\mathbf{n}, V[\mathbf{x}_\alpha] \mathbf{n})} \quad (38)$$

これを式 (36) および (37) に代入すれば式 (7) を得る。

## 付録 B 最適解の信頼性

式 (7) の解  $\hat{\mathbf{n}}$  が求められたとする。 $\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}} + \Delta \mathbf{n}$  および  $\hat{\mathbf{x}}_\alpha = \bar{\mathbf{x}}_\alpha + \Delta \mathbf{x}_\alpha$  を式 (7) に代入し、微小量に関して 2 次の項まで残すと次のようになる。

$$J[\bar{\mathbf{n}} + \Delta \mathbf{n}] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{((\Delta \mathbf{n}, \bar{\mathbf{x}}_\alpha) + (\bar{\mathbf{n}}, \Delta \mathbf{x}_\alpha))^2}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \quad (39)$$

$\mathbf{n}$  は単位ベクトルであるから拘束条件  $(\bar{\mathbf{n}}, \Delta \mathbf{n}) = 0$  が必要である。この拘束条件に対するラグランジュ乗数を導入し、 $J[\bar{\mathbf{n}} + \Delta \mathbf{n}] - 2\lambda(\bar{\mathbf{n}}, \Delta \mathbf{n})$  を  $\Delta \mathbf{n}$  で微分して 0 とおくと次式が得られる。

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{(\Delta \mathbf{n}, \bar{\mathbf{x}}_\alpha) + (\bar{\mathbf{n}}, \Delta \mathbf{x}_\alpha)}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \bar{\mathbf{x}}_\alpha = \lambda \bar{\mathbf{n}} \quad (40)$$

上式の両辺に射影行列  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{n}}} = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{n}}^\top$  をかけると、 $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{x}}_\alpha = \bar{\mathbf{x}}_\alpha$ 、 $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$  であるから、式 (40) は次のように書き直せる。

$$\left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \right) \Delta \mathbf{n} + \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{n}}^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \right) \Delta \mathbf{x}_\alpha = 0 \quad (41)$$

ここで、

$$\mathbf{V} = \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \right)^{-1} \quad (42)$$

と置き、これを式 (41) の両辺に掛けると、 $\mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \Delta \mathbf{n} = \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{n}}} \Delta \mathbf{n} = \Delta \mathbf{n}$  より次式を得る。

$$\Delta \mathbf{n} = -\mathbf{V} \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{n}}^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \right) \Delta \mathbf{x}_\alpha \quad (43)$$

したがって、解  $\hat{\mathbf{n}}$  の共分散行列  $V[\hat{\mathbf{n}}]$  が次のように評価できる ( $\delta_{\alpha\beta}$  はクロネッカのデルタ)。

$$\begin{aligned} V[\hat{\mathbf{n}}] &= E[\Delta \mathbf{n} \Delta \mathbf{n}^\top] \\ &= \mathbf{V} \left( \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{n}}^\top E[\Delta \mathbf{x}_\alpha \Delta \mathbf{x}_\beta] \bar{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{x}}_\beta^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\beta] \bar{\mathbf{n}})} \right) \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{n}}^\top \delta_{\alpha\beta} V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{x}}_\beta^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\beta] \bar{\mathbf{n}})} \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha (\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})^2} \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\mathbf{x}}_\alpha \bar{\mathbf{x}}_\alpha^\top}{(\bar{\mathbf{n}}, V[\mathbf{x}_\alpha] \bar{\mathbf{n}})} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \end{aligned} \quad (44)$$

よって、式 (9) が得られた。