

単体による物体の多面体表現

剣持雪子 井宮 淳 市川 薫

千葉大学 工学部 情報工学科

計算機では3次元空間を格子点空間とみなす。格子点空間はユークリッド空間とは異なり、滑らかな曲面を扱うことができない差分空間であることから、本論文では、格子点空間における3次元物体をすべて多面体とみなし、物体の多面体表現を提案する。そのために、まず、格子点空間における平面の分類を近傍代数構造を使って行ない、それに基づき離散空間における多角形、多面体の定義をする。そして、格子点の集合から多面体が一意に得られること証明し、さらに具体的な多面体生成アルゴリズムを示す。

Digital Polyhedra and Some of Its Applications

Yukiko KENMOCHI, Atsushi IMIYA and Akira ICHIKAWA

Dept. of Information and Computer Sciences, Chiba University

1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba 263 JAPAN

e-mail ken@icsd4.tj.chiba-u.ac.jp, imiya@ics.tj.chiba-u.ac.jp

In computers we can only manipulate finite-precision numbers. Therefore, we regard a 3-dimensional space in computers as a 3-dimensional lattice space. In a lattice space, we cannot deal with smooth surfaces but only polyhedra. In this paper, we define digital polyhedra in a lattice space using algebraic structures of neighborhoods. Furthermore, we show that we can uniquely construct digital polyhedra from a set of lattice points. Moreover, we also develop an algorithm for construction of discrete polyhedra.

1 まえがき

計算機が3次元物体を認識・理解するためには、3次元物体を計算機内でうまく表現することが必要である。しかし、計算機内部では有限桁数の数値しか表現できないことから、有限桁数の数値のみで幾何学情報を扱うことが求められる。それは、桁シフトをすることによって、整数値のみで幾何学情報を扱うことと同等となり、計算機では3次元空間を格子点空間と見なすことになる。したがって、計算機内部で格子点空間において3次元物体を表現することが要求される。

格子点空間はユークリッド空間とは異なり、滑らかな曲面を扱うことができない差分空間である。そこで、本論文では格子点空間における3次元物体はすべて多面体とみなし、物体の多面体表現を提案する。これは、単体による物体表現 [1] をさらに柔軟に拡張したものである。単体による物体表現では物体を単体の組合せによって表現し、与えられた格子点空間の部分集合に単体を埋め込めるだけ埋め込むことによって物体を得た [2, 3]。一方、本論文での物体の多面体表現では、単体だけでなく単体を組み合わせることができる多面体の組合せによって物体を表現する。単体より大きく、形の限定の少ない多面体を使うことによってより柔軟な物体の表現法となる。

さて、ここで今まで提案されてきた計算機の物体表現法を考察してみる。まず、グラフ理論的な手法 [4, 5] では近傍構造のみを保存しているだけなので、位相構造に含まれている多面体の構造を出すことは難しい。次に、単位立方体やその表面の正方形を使った位相的な手法 [6, 7] では、位相構造から多面体の構造を取り出すことはできるが、位相構造保存を重視した手法なので、表現力が乏しい。すなわち、得られた物体を多面体と見なしても、正方形の積木を重ねたようなものしか存在しない。また、コンピュータ・グラフィックでよく使われる marching cube 法 [8] では穴が発生することがあり、常に多面体が得られる保証がされていない。他にも、アルゴリズムの結果が多面体になっていないものがある [9]。

本論文では、まず星状体 [1,10] の概念を使って離散空間における多面体を定義する。次に、実際に格子点の集合から多面体を構成する手法を示すと共に、得られる多面体の一意性も証明する。すなわち、1章で、格子点空間における平面の分類について近傍代数構造 [11] を使って証明する。2章、3章では格子点空間における多角形、多面体の定義を行なう。4章は本論文の主題であり、格子点の集合から多面体が一意に得られることを証明し、さらに具体的なアルゴリズムを示す。5章では近傍と多面体の関係について考察し、アルゴリズムの適用例を示す。

2 離散空間の代数構造

\mathbf{Z} を整数集合とすると、3次元離散空間は \mathbf{Z} の積集合である \mathbf{Z}^3 によって表される。 \mathbf{Z}^3 は3次元ユークリッド空間の部分集合である。文献 11によれば、 \mathbf{Z}^3 では26種類の方向ベクトルが定義でき、それらを使うことによって、代数的に \mathbf{Z}^3 における近傍および平面が定義できることが示されている。以下に簡単な要約を記す。

方向ベクトルはそれぞれ方向符合 (i, j) を持っており、方向符合が (i, j) の方向ベクトル $q_{i,j}$ を以下に示す。

$$\begin{aligned}
 q_{11} &= (0, 0, 1)^T, & q_{21} &= (1, 0, 1)^T, \\
 q_{22} &= (1, 1, 1)^T, & q_{23} &= (0, 1, 1)^T, \\
 q_{24} &= (-1, 1, 1)^T, & q_{25} &= (-1, 0, 1)^T, \\
 q_{26} &= (-1, -1, 1)^T, & q_{27} &= (0, -1, 1)^T, \\
 q_{28} &= (1, -1, 1)^T, & q_{31} &= (1, 0, 0)^T, \\
 q_{32} &= (1, 1, 0)^T, & q_{33} &= (0, 1, 0)^T, \\
 q_{34} &= (-1, 1, 0)^T, & q_{35} &= (-1, 0, 0)^T, \\
 q_{36} &= (-1, -1, 0)^T, & q_{37} &= (0, -1, 0)^T, \\
 q_{38} &= (1, -1, 0)^T, & q_{41} &= (1, 0, -1)^T, \\
 q_{42} &= (1, 1, -1)^T, & q_{43} &= (0, 1, -1)^T, \\
 q_{44} &= (-1, 1, -1)^T, & q_{45} &= (-1, 0, -1)^T, \\
 q_{46} &= (-1, -1, -1)^T, & q_{47} &= (0, -1, -1)^T, \\
 q_{48} &= (1, -1, -1)^T, & q_{55} &= (0, 0, -1)^T.
 \end{aligned} \tag{1}$$

上記の26個の方向ベクトルは、2つずつ互いに逆向きのベクトルを含んでいる。したがって、逆向きのベクトルを無視することによって、13個の方向ベクトルを選び出すことができる。さらにそれら13個の方向ベクトルを以下のように分類する。

$$s = \{q_{11}, q_{31}, q_{33}\} \tag{2}$$

$$r = \{q_{21}, q_{41}, q_{23}, q_{27}, q_{38}, q_{42}\} \tag{3}$$

$$h = \{q_{22}, q_{24}, q_{26}, q_{28}\}. \tag{4}$$

s, r, h の要素はそれぞれ、長さが $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ の方向ベクトルである。次に、

$$n(6) = s, \tag{5}$$

$$n(18) = s \cup r, \tag{6}$$

$$n(26) = s \cup r \cup h \tag{7}$$

とすると、 \mathbf{Z}^3 における3種類の近傍を定義することができる。

定義 1 (近傍) $x \in \mathbf{Z}^3$ とすると、 x の近傍を

$$N_m(x) = \{y \mid x - y = \pm q, q \in n(m)\}. \tag{8}$$

によって3種類定義する。ただし、 $m = 6, 18$ または 26 であり、それぞれを m 近傍と呼ぶ。

さらに, q_{ij} を使って \mathbf{Z}^3 内に 2 次元平面が定義できる. q_{ij} を法線ベクトルとし, 点 x を通る 2 次元平面を $C_{ij}(x)$ とする. \mathbf{Z}^3 が 3 次元格子点空間なので $C_{ij}(x)$ は 2 次元格子点空間になる. このとき, 格子の種類は q_{ij} によって決まる. $q_{ij} \in s$ ならば $C_{ij}(x)$ は長さ 1 の正方形格子点空間 $S_{ij}(x)$ になり, $q_{ij} \in r$ ならば $C_{ij}(x)$ は縦横の長さがそれぞれ 1 と $\sqrt{2}$ である長方形格子点空間 $R_{ij}(x)$ になり, $q_{ij} \in h$ ならば $C_{ij}(x)$ は長さ $\sqrt{2}$ の正三角形格子点空間 $H_{ij}(x)$ になる. $S_{ij}(x)$ と $R_{ij}(x)$ では 4 近傍と 8 近傍の 2 種類が定義でき, $H_{ij}(x)$ では 6 近傍が定義できる. 2 次元格子点空間とその近傍を図 1 に示す.

3 離散多角形

3 次元ユークリッド空間における多角形の定義 [12] を利用して, \mathbf{Z}^3 における多角形, すなわち離散多角形を定義する.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ を \mathbf{Z}^3 内の同一平面上にある点とする. p 個の線分 $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_px_1$ は自分自身と交点を持たない単純閉曲線を成しているとし, 単純閉曲線の内部に対して反時計回り順に点に番号をつける. ただし, $x_i x_{i+1} = \pm kq$ が成り立ち, $k \in \mathbf{Z}, q \in n(m), m = 6, 18, 26$ とする. すなわち, $x_i x_{i+1}$ は方向ベクトルの整数倍になる. このとき, 離散多角形を以下のように定義する.

定義 2 (離散多角形) p 個の線分およびそれらに囲まれた有限領域を離散多角形と呼び,

$$S = (x_1 x_2 x_3 \dots x_p) \quad (9)$$

のように表記する.

p 個の線分は平面を 2 つの領域に分ける. ここでは, p 個の線分とその内部の領域を合わせて離散多角形と定義している. 離散多角形の構成している線分と点をそれぞれ離散多角形の辺および頂点と呼ぶ.

離散多角形 $S = (x_1 x_2 x_3 \dots x_p)$ は, 方向ベクトル q_{ij} を法線ベクトルとする平面 $C_{ij}(x_1)$ 上にある. また, S の法線ベクトルは $1 \leq i \leq p-1$ に対して $x_{p+1} = x_1$ とすると,

$$v(S) = \overline{x_i x_{i+1}} \times \overline{x_{i+1} x_{i+2}} \quad (10)$$

によって与えられる. そして, 非負整数 k に対して

$$v(S) = kq_{ij} \quad (11)$$

が成り立つ.

4 離散多面体

3 次元ユークリッド空間における多角形を使った多面体の定義 [12] に従い, \mathbf{Z}^3 においても離散多角形を使って離散多面体を定義する.

定義 3 (離散多面体) p 個の離散多角形, S_1, S_2, \dots, S_p に囲まれた有限領域を離散多面体と呼び,

$$P = \{S_1, S_2, \dots, S_p\} \quad (12)$$

のようにかく. ただし, 離散多角形 S_i の辺はすべて, 他の 1 つの離散多角形 S_j の辺にもなっており, また, 頂点はすべて星状体が輪状 [1] になっている.

頂点の星状体がすべて輪状であることから, 頂点のみを共有している 2 つのピラミッドのような形状のものは離散多面体に成り得ないことは明らかである. 離散多面体に含まれる離散多角形を多面体の面と呼ぶことにする.

離散多面体に関して次の命題が成立する.

命題 1 2 つの離散多面体 P_1 と P_2 とが一部またはすべて面を共有しているとき, それらの和集合 $P_1 \cup P_2$ もまた離散多面体である.

5 離散多面体の生成

\mathbf{Z}^3 の有限部分集合が与えられていると仮定し, その集合を特に格子点集合と呼ぶことにする. 本章では, 近傍の種類によらず, 与えられた格子点集合から一意に離散多面体を作ることができることを示し, さらに格子点集合から離散多面体を直接得るアルゴリズムを提案する.

5.1 \mathbf{Z}^3 の立方体領域分割

\mathbf{Z}^3 を単位立方体領域

$$D(x) = \{(i+\epsilon_1, j+\epsilon_2, k+\epsilon_3) \mid x = (i, j, k), \epsilon_i = 0 \text{ or } 1\}, \quad (13)$$

によって

$$\mathbf{Z}^3 = \bigcup_{x \in \mathbf{Z}^3} D(x) \quad (14)$$

と分割する. 各立方体領域 $D(x)$ は格子点 8 点から成り, 8 点は単位立方体の頂点に位置する. $D(x)$ 内に存在する 8 点は 2 つの集合に分類される. 1 つの集合は \mathbf{V} に所属する点の集合であり, そのような点を黒点と呼ぶ. もう 1 つの集合は逆に \mathbf{V} に所属しない点の集合であり, そのような点を白点と呼ぶ. 次に $D(x)$ 内に存在する黒点の個数は 0 から 8 である.

格子点集合を \mathbf{V} とし, 集合 A の要素数を与える関数を $E(A)$ であらわすことにすると,

$$0 \leq E(\mathbf{V} \cap D(x)) \leq 8 \quad (15)$$

が成り立つ.

$D(x)$ 内の黒点の個数に応じて $D(x)$ 内の黒点の配置を考えると, 全部で 23 通りの配置が考えられる [3].

5.2 単位立方体領域における離散多面体の生成

\mathbf{V} において離散多面体を生成する前に, 各単位立方体領域において $\mathbf{V} \cap D(x)$ から離散多面体を作る. 離散多面体を生成するときの基本原理解は, \mathbf{Z}^3 内の黒点の部分にできる限り体積の大きい離散多面体を埋め込むことである. したがって, その基本原理解に従って, 立方体領域における黒点のすべての配置に対応して離散多面体を決定するような look-up table を与えてやればよい. 6 近傍, 18 近傍, 26 近傍のそれぞれの場合の look-up table を図 2,

3, 4に示す。3種類のlook-up tableを見ると、黒点の配置と離散多面体の対応が一对一になっていることがわかる。したがって、以下の定理が成り立つ。

定理 1 単位立方体領域において、黒点および白点のすべての配置に対応して一意に離散多面体を生成することができる。

5.3 格子点集合における離散多面体の生成

すでに各単位立方体領域では離散多面体が得られることを示したので、ここでは、それらの離散多面体の面を互いに接合して一つの大きな離散多面体を構成する。離散多面体を生成する手順は大きく分けて面の接合と、面の融合の2つに分けられる。

5.3.1 単体面の接合

離散多面体の接合では、隣接する単位立方体領域の離散多面体をつずつ順番に接合を行い、徐々に大きな離散多面体にしていく。基本となっている離散多面体を P_1 とする。新たに接合する単位立方体領域の離散多面体を P_2 とし、それぞれ以下の式で与える。

$$P_1 = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}, \quad (16)$$

$$P_2 = \{T_1, T_2, \dots, T_q\}. \quad (17)$$

ただし、 S_i, T_j はそれぞれ離散多角形を表す。このとき、接合面の状態は以下の3つに場合分けすることができる。

1. $S_i = T_j$,
2. $S_i \supset T_j$.
3. それ以外。

まず、1の場合、 P_1 と P_2 の接合面では完全に互いの面が接合しているので、それらの面を削除すればよい。したがって、互いに接合する面の組が h 個あるとし、それらを $S_{i(1)}, S_{i(2)}, \dots, S_{i(h)}$ および $T_{j(1)}, T_{j(2)}, \dots, T_{j(h)}$ とすると、新たに P' が

$$P' = (P_1 \setminus (\bigcup_{k=1,2,\dots,h} S_{i(k)})) \cup (P_2 \setminus (\bigcup_{k=1,2,\dots,h} T_{j(k)})) \quad (18)$$

のように得られる。

次に、2の場合、さらに以下の3つの場合に分けられる。

- a. T_j が S_i の領域を分割せずに重なる。
- b. T_j が S_i に穴をあける。
- c. T_j が S_i を2つの領域に分割する。

3つの場合の一例を図示すると図5のようになる。aの場合、 T_j から S_i の領域を引いた離散多角形領域を $S'_i(1)$ とし、 $S'_i(2)$ を空集合とする。bの場合、 $S_i \setminus T_j$ の穴のあいた領域を適当に2分割して、2つの離散多角形 $S'_i(1)$ と $S'_i(2)$ を決定する。cの場合、2つに分割された領域をそれぞれ $S'_i(1), S'_i(2)$ とする。そして、 P_1 と P_2 より新たに P' を以下のように作る。

$$P' = (P_1 \setminus S_i \cup (\bigcup_{k=1,2} S'_i(k))) \cup (P_2 \setminus T_j). \quad (19)$$

最後に3の場合であるが、2組の単位領域の黒点の配置のすべての組合せを考えると、図6のような配置は18連結の場合にしか起こらないことがわかる。したがって、例外的に処理することが可能である。具体的な処理は以下の通りである。隣接する領域で図6に示したような接合部分が現れた場合、これらの2単位立方体領域における離散多面体を削除する。すなわち、 P_3 を P_2 に隣接している P_1 内の離散多面体とすると、

$$P' = P_1 \setminus P_3 \cup (P_3 \setminus P_1) \quad (20)$$

を得る。

5.3.2 面の融合

面を接合することによって P' を得たが、 P' は離散多面体ではない。同一平面にある辺を共有している離散多角形を融合し、一つの離散多角形に決定し直す作業をしなければならない。さて、

$$P' = \{S_1, S_2, \dots, S_r\} \quad (21)$$

とし、2つの離散多角形

$$S_i = (x_1 x_2 \dots x_a), \quad (22)$$

$$S_j = (y_1 y_2 \dots y_b) \quad (23)$$

が同一平面上にあるとする。このとき、 S_i と S_j が辺を共有しているとき、 S_i と S_j を融合し、新たに S をつくる。ただし、この S が離散多角形から離散多角形を切り抜いたような穴のあいた離散多角形にならないように注意しなければならない。したがって、 S_i と S_j が共有している辺が二つ以上あり、しかも二つ以上の点列として表されるときには、 S_i と S_j との融合は行なわれない。 S_i と S_j が共有している辺が一つの点列として

$$x_{i(1)} x_{i(2)} \dots x_{i(k)}, \quad (24)$$

$$y_{j(1)} y_{j(2)} \dots y_{j(k)} \quad (25)$$

のようにそれぞれ表されるとき、互いに点列の向きは逆向きであるから

$$x_{i(1)} = y_{i(k)}, x_{i(1)+1} = y_{i(k)-1}, \dots, x_{i(k)} = y_{j(1)} \quad (26)$$

が成り立つ。したがって、融合した離散多角形 $S_{(i,j)}$ は

$$S_{(i,j)} = (x_1 x_2 \dots x_{i(1)} y_{j(k)+1} y_{j(k)+2} \dots y_b y_1 y_2 \dots y_{j(k)} x_{i(k)+1} x_{i(k)+2} \dots x_a) \quad (27)$$

となる。そして、 P' を新たに

$$P' := P' \setminus \{S_i, S_j\} \cup S_{(i,j)} \quad (28)$$

と置き直し、新しい P' を形成している離散多角形に添付番号を付け直す。融合出来る面がなくなるまでの作業を繰り返し、最終的に得られるものが離散多面体 P である。

5.4 離散多面体の一意性

面の接合を行なうとき、離散多角形に穴があいてしまうことを回避するために面を適当に2分割して取り扱うことが考えられる。このとき分割の手法が一意でないため、離散多面体 P は格子点集合に対して一意であるとは限らない。そこで、一意性を保つために、穴のあいた離散多角形を扱えるようにする。例えば図7のように、離散多角形 $(x_1 x_2 \dots x_p)$ から離散多角形 $(y_1 y_2 \dots y_q)$ を切り出したようなものを

$$(x_1 x_2 \dots x_p; [H]), \quad (29)$$

$$[H] = (y_1 y_2 \dots y_q) \quad (30)$$

とする。また、 k 個の穴があいた離散多角形は

$$(x_1 x_2 \dots x_p; [H_1]; \dots; [H_k]) \quad (31)$$

$$[H_p] = (y_{p(1)} y_{p(2)} \dots y_{p(q)}) \quad (32)$$

と表現する。これらの穴あき離散多角形を一般の離散多角形と同様に扱うことにすると、すべての面を一意に表現できるので、以下の定理が成り立つ。

定理2 近傍の種類によらず、与えられた格子点集合から一意に離散多面体を作ることができる。

5.5 離散多面体生成アルゴリズム

以上の性質より、格子点集合から離散多面体を得る具体的なアルゴリズムを得る。ただし、このアルゴリズムでは、離散多面体の面である離散多角形部分を直接取り出している。

アルゴリズム

1. Z^3 を

$$Z^3 = \bigcup_{x \in Z^3} D(x)$$

のように分割する。

2. 近傍ごとにそれぞれ図8, 9, 10のlook-up tableを参照し、各領域 $D(x) \cap V$ における離散多面体の面部分 S_i を決定する。離散多面体の候補となる集合

$$P = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$$

を得る。

3. 18近傍の場合、隣接している2立方体領域において、図6のような黒点の配置があれば、2領域における面 S_i を図6が示している新たな面 S_j に置き換える。

4. 星状体が輪状でない点があれば V から削除し、もう一度ステップ2に戻る。そうでなければ先へ進む。

5. 各 S_i の法線ベクトル $v(S_i)$ を求める。

6. もし、 S_i と S_j が

$$S_i = S_j \text{ かつ } v(S_i) = -v(S_j)$$

を満たすならば、

$$P = P \setminus \{S_i, S_j\}$$

とする。

7. もし、 S_i と S_j が辺を共有しており、

$$v(S_i) = v(S_j)$$

を満たすならば、新たに

$$S_{(i,j)} = S_i \cup S_j$$

を構成し、

$$P = P \setminus \{S_i, S_j\} \cup S_{(i,j)}$$

とする。

8. P から連結成分 P_1, P_2, \dots, P_k を取り出すことによって、 k 個の離散多面体を一意に得る。

図11は、人間の右肺の断面多値画像を2値化して格子点集合とし、これに離散多面体生成アルゴリズムを施した結果である。

6 離散多面体の特性

Z^3 には3種類の近傍があり、近傍によって同一の格子点集合から得られる離散多面体も異なる。6近傍, 18近傍, 26近傍に対応した離散多面体をそれぞれ6近傍多面体, 18近傍多面体, 26近傍多面体と呼ぶことにする。それぞれの近傍のlook-up tableを比較すると、6近傍多面体は6近傍の3次元離散単体[1]を互いにくっつけたものになっている。18近傍多面体は、6近傍多面体の外側に18近傍の3次元離散単体を張り付けたものになっている。そして、26近傍多面体は、18近傍多面体の外側に26近傍の3次元離散単体を、張り付けたものになっている。すなわち、6近傍より18近傍の方が、さらに18近傍より26近傍の方が離散単体の大きさが小さいことから、大きさの小さい離散単体ほど後から張り付けることが可能となるのである。これらの離散多面体の生成アルゴリズムから、以下の定理を導くことができる。

定理3 格子点集合を V とし、各近傍の離散多面体を $P[6]$, $P[18]$, $P[26]$ とくと、

$$P[6] \subseteq P[18] \subseteq P[26] \quad (33)$$

が成り立つ。

定理3を利用すれば、すべての近傍の離散多面体が必要であるとき、並行して3種類の離散多面体を求めるよりも、6近傍から順番に離散多面体を求める方が効率が良いことがわかる。

さて、既にある一定の解像度のもとでは離散物体や離散多面体が一意に決定されることを示した[1]。それでは、

解像度が変化したときに異なる解像度で構成された離散物体や離散多面体間にどのような関係が成立するであろうか。格子点空間の格子の距離を $1/2^n$ とするとき、格子点集合から決まる離散多面体を各近傍ごとに $P_n[m]$ とおくと、定理3を拡張して、

$$P_n[6] \subseteq P_n[18] \subseteq P_n[26] \subseteq P_{n+1}[6] \quad (34)$$

が成立することが予想できる。この性質の証明は今後に残された問題である。

7 あとがき

離散空間における多面体を定義し、近傍によらず格子点集合から離散多面体が一意に構成できることを示した。さらに、格子点集合からの離散多面体構成アルゴリズムを提案した。特に、例外処理が一部あるとはいえ、18近傍が他の近傍と同様に扱えることを示したことは本論文の成果である。それによって、異種近傍間の離散多面体の関係を明らかにすることができた。

実験に用いたデータは国立がんセンター東病院大松広伸博士に提供頂いた。また、実験に関して御助言を頂いた中京大学の長谷川純一教授に感謝する。

参考文献

- 1: 剣持雪子, 井宮淳, 市川熹, 離散物体の単体共有とその応用, 情報処理学会コンピュータ・ビジョン研究会資料, Vol. 95, pp. 9-16, 1995.
- 2: 剣持雪子, 井宮淳, 市川熹, 離散物体の境界抽出, 電子情報通信学会パターン認識・理解研究会資料, Vol. 95, pp. 9-16, 1995.
- 3: 剣持雪子, 井宮淳, 市川熹, 離散物体の単体ラベリングとその応用, 情報処理学会コンピュータ・ビジョン研究会資料, Vol. 95, pp. 35-42, 1995.
- 4: Kong T. Y. and Rosenfeld A., Digital topology: Introduction and survey, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 48, pp. 357-393, 1989.
- 5: Voss K., *Discrete Images, Objects, and Functions in Z^3* , Algorithms and Combinatorics 11, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- 6: Herman G. T., Discrete multidimensional Jordan surfaces, CVGIP: Graphical Model and Image Processing, Vol. 54, pp. 507-515, 1992.
- 7: Udupa J. K., Multidimensional digital boundaries, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, Vol. 56, pp. 311-323, 1994.
- 8: Lorensen W. E. and Cline H. E., Marching Cube: A high-resolution 3D surface construction algorithm, Computer Graphics (SIGGRAPH '87),

Vol. 21, pp. 163-169, 1988.

- 9: Lee E., Choi Y. and Park K. H., A method of 3D object reconstruction from a series of cross-sectional images, IEICE Translated Information and System, Vol. E77-D, pp. 996-1004, 1994.
- 10: Aleksandrov P. S., *Combinatorial Topology*, Vol. 1, Graylock Press; Rochester, N.Y., 1956.
- 11: 井宮淳, 3次元離散近傍の構造とその応用, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, pp. 2153-2164, 1993.
- 12: Coxeter H. S. M., *Regular Polytopes*, Dover Publications, New York, 1973.

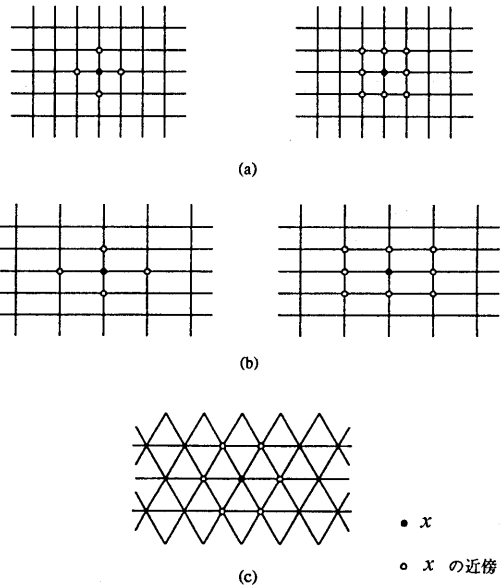


Fig.1: 2次元格子点空間とその近傍。a. 正方形格子点空間の4近傍と8近傍。b. 長方形格子点空間の4近傍と8近傍。c. 正三角形格子点空間の6近傍。

黒点の配置 → 離散多面体

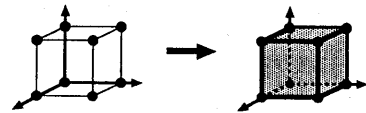


Fig.2: 6近傍の場合の、単位立方体領域における黒点の配置に応じて離散多面体を与える look-up table. look-up table にない黒点の配置に関しては、決定される離散多面体がないと解釈する。

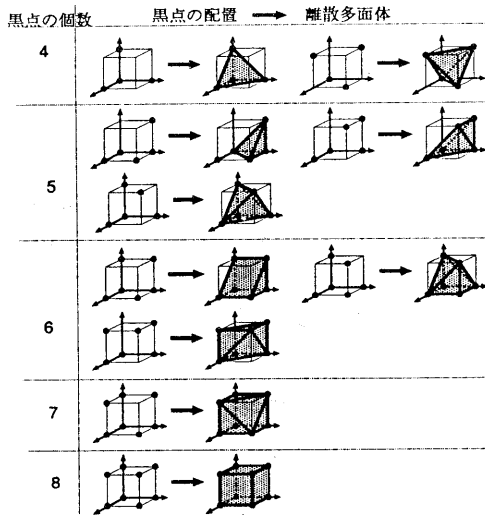


Fig.3: 18 近傍の場合の、単位立方体領域における黒点の配置に応じて離散多面体を与える look-up table. look-up table がない黒点の配置に関しては、決定される離散多面体がないと解釈する。

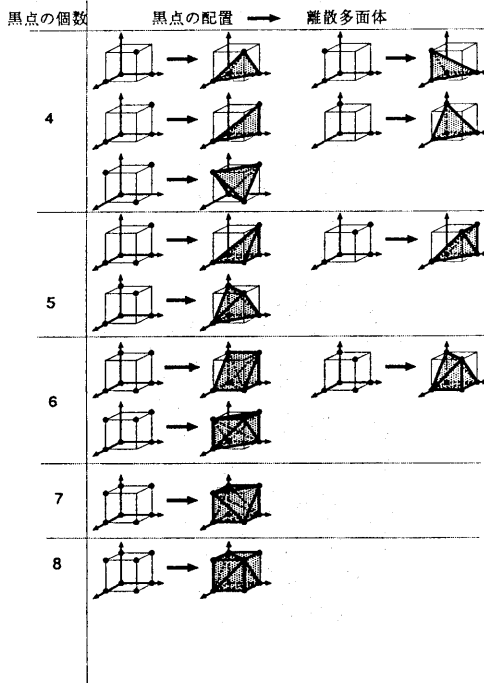


Fig.4: 26 近傍の場合の、単位立方体領域における黒点の配置に応じて離散多面体を与える look-up table. look-up table がない黒点の配置に関しては、決定される離散多面体がないと解釈する。

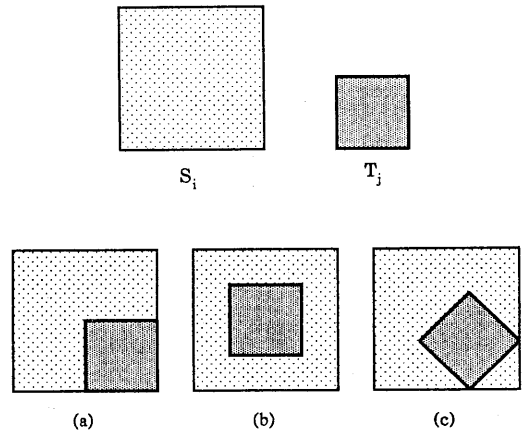


Fig.5: 2つの離散多面体の接合面における状態を图示したもので、接合面を S_i と T_j とすると、 $S_i \subset T_j$ が成り立っている。a は T_j が S_i の領域を分割せずに重なる場合、b は T_j が S_i に穴をあける場合、c は T_j が S_i を2つの領域に分割する場合をそれぞれ表している。

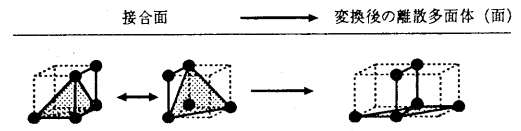


Fig.6: 18 近傍のときのみ起こる、接合面における離散多面体の置換えを行わなければならない2隣接単体領域の黒点配置と、置換え後の面。

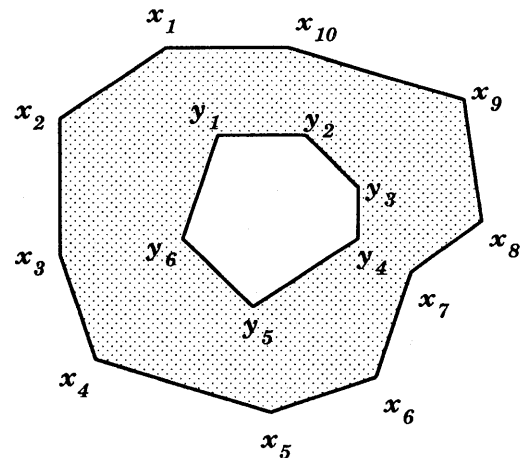


Fig.7: 穴のあいた離散多角形 ($x_1 x_2 \dots x_p, y_1 y_2 \dots y_q$) を表す。

黒点の個数	黒点の配置 →	離散多面体の面
4		
5		
6		
7		

Fig.8: 6 近傍の場合の離散多面体生成アルゴリズムで参照する look-up table.

黒点の個数	黒点の配置 →	離散多面体の面
3		
4		
5		
6		
7		

Fig.9: 18 近傍の場合の離散多面体生成アルゴリズムで参照する look-up table.

黒点の個数	黒点の配置 →	離散多面体の面
3		
4		
5		
6		
7		

Fig.10: 26 近傍の場合の離散多面体生成アルゴリズムで参照する look-up table.

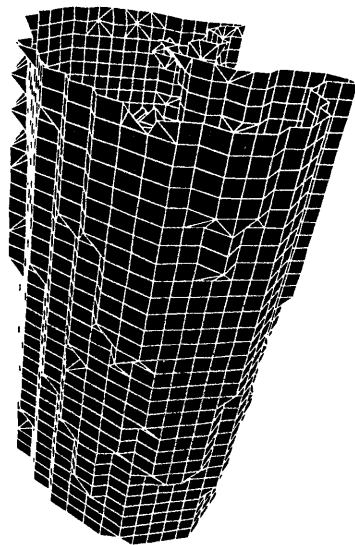


Fig.11: 人間の右肺の $32 \times 32 \times 32$ の断面多値画像を 2 値化して格子点集合とし、これに離散多面体生成アルゴリズムを適用した例。