

物体の離散化：その近似精度と収束性

剣持雪子[†] 井宮 淳[‡]

[†]北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科

[‡]千葉大学工学部情報工学科

3次元ユークリッド空間における物体の計算機内表現として、格子点を頂点とする多面体を用いることにし、そのような多面体によって表現される物体を離散化物体と呼ぶ。本稿では、まず、ユークリッド空間に存在する物体からその離散化物体を一意に得る手法を提案する。そして、格子幅を無限にゼロに近づけていくと離散化物体が元の物体に収束していくことを証明する。また、この離散化手法では格子幅を無限にゼロに近づけていけば物体の形状をいくらかでも良い精度で近似できることを示す。

Discretization of Three-dimensional Objects: Approximation and Convergence

Yukiko KENMOCHI[†] and Atsushi IMIYA[‡]

[†]School of Computer Science,

Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku

[‡]Dept. of Information and Computer Sciences, Chiba University

In this paper, we introduce a polyhedral representation of three-dimensional objects, which allows the vertices of polyhedra only on lattice points, in order to deal with the shape in a lattice space. We present a method for generating polyhedra corresponding to the original objects in Euclidean space, and call this process discretization. We then prove that our polyhedra converge to the original objects when the grid interval is infinitely decreased to zero. The proof implies that our discretization method has the guarantee of the shape approximation for the sufficiently small grid interval. Finally, we investigate the maximum grid interval which guarantees the shape approximation.

1 まえがき

ユークリッド空間における3次元物体を計算機内で扱うためには、物体を離散的に表現する必要がある。そこで、本稿では、計算機が有限桁数の計算しかできないことから、物体を格子点から成る格子空間で表現することを考える。さらに、提案する物体の離散表現は、格子空間の格子幅を無限に狭めていくと元のユークリッド空間における物体に収束していく表現法であることを示す。

物体を格子空間において表現することを物体の離散化とよぶと、本稿における物体の離散化は、以下の2つの手順にしたがって行なわれる。まず、物体をユークリッド空間における点集合として考え、それらの点を標本化し、格子点のみを取り出す。次に、物体の表面を2次元多様体としてとらえ、標本化された点を使って格子空間に2次元多様体を構成する。

今までに提案されている点の標本化法は2種類に大別することができる。1つは物体の内部に含まれる格子点を標本点とする手法 [1,2] で、もう1つは各格子点のポロノイ近傍に物体が存在する場合、その格子点を標本点とする手法 [3,4,5] である。本稿では、格子幅を可変にしたとき格子空間における物体の標本点の配置がどう変わるか、という考察をしやすい2つめの標本化法を適用する。

3次元格子空間内で2次元多様体を表現する方法では、組合せトポロジー [6] の手法を用いて、格子点を頂点として持つ多面体による物体表現を提案する。格子空間のような離散的な空間にトポロジーを導入するためには組合せトポロジーが有効であることは、文献 [7,8,9] においてすでに示されている。また、多面体は、パターン認識、コンピュータ・グラフィクス、CAD などの分野では一般的な物体表現法としてすでに知られており、実際にいろいろな応用分野で使われている [10, 11,12]。

ところで、格子空間の格子幅を無限に狭めていったとき、離散化された物体が元のユークリッド空間の物体に収束していくことを保証するための条件として、Heijmans の離散化条件 [5] がある。本稿では、提案する物体の離散化手法が Heijmans の離散化条件を満たしていることをまず示し、そして、離散化物体の収束性を証明する。

2 物体の離散化

3次元ユークリッド空間 R^3 の全体集合、あるいは R^3 の閉部分集合を X とする。 X において、ある3次元物体が与えられており、その表面は2次元閉曲面 S であるとする。ところで、 R^3 において、座標がすべて整数値であるような点を格子点と呼び、 R^3 内のすべての格子点の集合を離散空間 Z^3 とする。 $X \subseteq R^3$ にあるすべての格子点

の集合は、

$$Y = X \cap Z^3$$

となり、これは Z^3 の部分集合である。本章では、 Y における S の離散表現を提案する。

X において S は2次元多様体であることから、 Y における離散表現においてもその2次元多様体の性質を保持させることを考える。そこで、組合せトポロジーの手法を用いて、2次元多様体である S を離散組合せ多面体 P 、すなわち頂点がすべて格子点である多面体によって離散的に表現する。

S から P を導く手順を離散化と呼ぶと、離散化は点の標本化と多面体生成の2段階の処理に分けられる。図1に、 S からその離散化表現である P を得る手順を示す。

2.1 点の標本化

S は X を2つの集合、すなわち物体内部の点の集合 H^- と物体外部の点の集合 H^+ に分ける。ただし、

$$H^- \cap H^+ = S \tag{1}$$

とする。ところで、 R^3 において、格子点 (i, j, k) を中心とする単位立方体 $C(i, j, k)$ を

$$C(i, j, k) = \{ (x, y, z) \in R^3 \mid i - \frac{1}{2} \leq x < i + \frac{1}{2}, \\ j - \frac{1}{2} \leq y < j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \leq z < k + \frac{1}{2} \}$$

と定義すると、 X における H^- と H^+ にそれぞれ対応して、 Y 内に以下のような2つの集合を得る。

$$I^- = \{ (i, j, k) \in Y \mid H^+ \cap C(i, j, k) = \emptyset \}, \tag{2}$$

$$I^+ = \{ (i, j, k) \in Y \mid H^- \cap C(i, j, k) = \emptyset \}. \tag{3}$$

式 (1) より、 H^- と H^+ は両方とも S を含む。一方、 I^- と I^+ は、その定義より、 S が通る $C(i, j, k)$ の中心点である格子点 (i, j, k) を含まず、以下の式が必ず成立する。

$$I^- \cap I^+ = \emptyset,$$

$$Y \setminus (I^- \cup I^+) = \{ (i, j, k) \in Y \mid S \cap C(i, j, k) \neq \emptyset \}.$$

図2に式 (1), (2), (3) の関係を簡単に図示する。

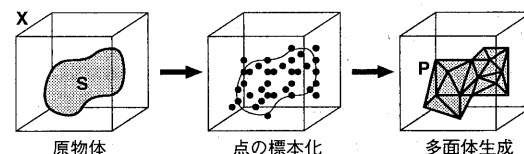


図1: 3次元物体の離散化手順。物体の離散化は点の標本化と多面体生成の2段階の処理に分けられる。

2.2 多面体生成

まず、組合せトポロジーを用いて離散空間における組合せ的多面体の定義を与えた後、 I^- と I^+ の各々に対し多面体が生成できることを示す。

2.2.1 離散組合せ多面体の定義

Z^3 において、点 x の近傍として以下の三種類を考える。

$$N_m(x) = \{y \in Z^3 \mid \|x - y\| \leq \sqrt{t}\}.$$

ただし、 $m = 6, 18, 26$ のとき、それぞれ $t = 1, 2, 3$ とし、各 $N_m(x)$ をそれぞれ x の 6 近傍、18 近傍、26 近傍と呼ぶ。

これらの近傍を用いると、 Z^3 において n 次元多様体の基本単位である n 次元離散単体を構成することができる。0次元離散単体は孤立点として Z^3 に定義され、1次元離散単体は互いに近傍の位置関係にある Z^3 の2点から成り、2次元離散単体は複数の1次元離散単体によって囲まれる面積最小の2次元凸多角形の頂点の集合として定義される(離散単体の具体的な構成法については文献[??,9]を参照)。表1にすべての1次元、2次元離散単体を各近傍ごとに示す。ただし、回転対称のものは表1から除いてある。

離散単体が Z^3 の k 個の点 x_1, x_2, \dots, x_k から成るとき、それを Z^3 の部分集合として

$$[x_1, x_2, \dots, x_k] = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

と表記する。表1のように、離散単体の点 x_1, x_2, \dots, x_k を R^3 上におき、 R^3 内でそれらを頂点とした凸多面体を考えるとき(ただし、端点や境界点を含む閉集合とする)、その凸多面体を $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ の埋め込み単体と呼び、 $|x_1, x_2, \dots, x_k|$ で表す。 n_1 次元離散単体 $[a]$ の埋め込み単体が n_2 次元離散単体 $[b]$ の埋め込み単体の境界部分に含まれているとき($n_1 < n_2$)、 $[a]$ は $[b]$ の n_1 次元面であるという。例えば、0次元離散単体は1次元離散単体や2次元離散単体の0次元面であり、1次元離散単

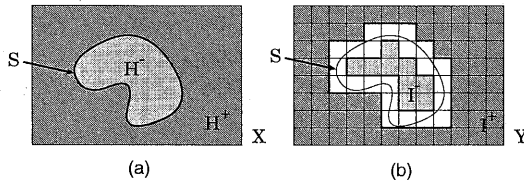


図2: 2次元閉曲面 S による空間 X の分割 (a) と空間 Y の分割 (b) の断面図。

体は2次元離散単体の1次元面である。 n 次元面を使って、離散組合せ多面体の定義を行なう。

定義1 2次元離散単体の集合を P とする。 P が以下の2つの条件を満たすとき、 P は離散組合せ多面体であるという。

1. P の一対の2次元離散単体 $[a], [b]$ が、 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ であるとき、 $[a] \cap [b]$ は必ず $[a]$ と $[b]$ の共通の0次元面あるいは1次元面になる。
2. P に含まれるすべての1次元面は必ず2つの2次元離散単体に含まれる。

2.2.2 単体分割

I^- (あるいは I^+) から離散組合せ多面体を生成するためには、 I^- (あるいは I^+) を多面体の構成要素である離散単体に分割しなければならない。このような単体による組合せ的多面体生成を単体分割と呼ぶ。

まず、 I^- の場合における単体分割の手順を説明する。 Y において、 I^- に含まれる点を黒点、含まれない点を白点とすると、すべての格子点は黒点あるいは白点のどちらかに決定できる。今、 Y 内に、格子点を頂点とする単位立方体を

$$D(i, j, k) = \{(i + \epsilon_1, j + \epsilon_2, k + \epsilon_3) \mid \epsilon_l = 0 \text{ or } 1, l = 1, 2, 3\}$$

と定義すると、 $D(i, j, k)$ 内の8点も黒点あるいは白点のどちらかになる。そして、その点の配置の仕方は、回転対称のものを除くと、表2に示してある23通りが考えられる。そして、表2のそれぞれの配置に対し、以下の4つのルールに従って離散組合せ多面体を構成する2次元離散単体の組合せを考えると、表3が得られる。

- 離散組合せ多面体の内部に含まれる点および頂点はすべて黒点である。

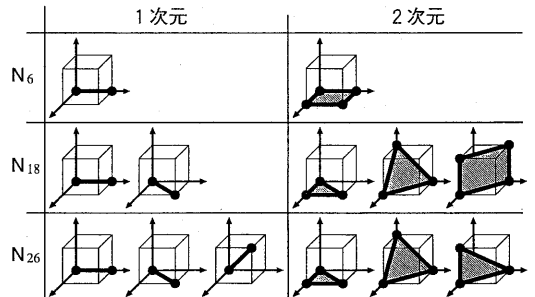


表1: 離散単体

- 離散組合せ多面体が X 内に占める領域の体積を出来る限り大きくする。
- 黒点と白点の配置が対称性を持つとき、離散組合せ多面体の構成要素となる 2 次元離散単体の配置もその対称性を保存する。
- 離散組合せ多面体は閉曲面 S と交わらない。

ここで、表 3 において 2 次元離散単体に添付している矢印の向きは、2 次元離散単体の法線ベクトルの向きのうち、離散組合せ多面体に対して外向きのものを表している。離散組合せ多面体は以下の手順で生成される。

[多面体生成アルゴリズム]

1. Y 内のすべての $D(i, j, k)$ に対し、その黒点と白点の配置から表 3 を参照し、2 次元離散単体の集合 C_2 を得る。
2. 図 3 のように正反対の向きの 2 つの矢印を持つ重なり合う 2 つの 2 次元離散単体を C_2 から削除する。
3. 1 8 近傍を考えている場合、図 4 の左図のように配置 $P5a$ が隣合って出現したとき、図 4 に示す例外処理を施す。

上記のアルゴリズムにより、各近傍ごとに I^- から離散組合せ多面体 ∂I_m^- ($m = 6, 18, 26$) を生成することができる。同様に、 I^- を I^+ に置き換えることで、各近傍ごとに I^+ から離散組合せ多面体 ∂I_m^+ ($m = 6, 18, 26$) を生成することができる。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 1 任意の I^- (あるいは I^+) に対し、必ず一意に ∂I_m^- (あるいは ∂I_m^+) ($m = 6, 18, 26$) を生成することができる。

この定理は、文献 [9,??] で示した単体分割の一意性と同一方法で導くことができるので、本稿では証明を省く。

3 離散組合せ多面体の性質

定理 1 において、 I^- (あるいは I^+) から ∂I_m^- (あるいは ∂I_m^+) ($m = 6, 18, 26$) が一意に求まることを示した。

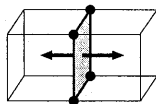


図 3: 正反対の向きの矢印を持つ、重なり合った 2 つの 2 次元離散単体。

| 黒点の個数 | 単位立方体における黒点の配置 | | | |
|-------|----------------|--|--|--|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |

単位立方体
● 黒点
閉曲面 S が通らない領域

表 2: Y において、 I^- (あるいは I^+) に含まれる点を黒点、含まれない点を白点としたときの、8 格子点を頂点とする単位立方体における黒点と白点の配置。ただし、表中は黒点のみを表示しているため、表中の黒点以外の格子点を白点とみなす。また、それぞれの配置について、閉曲面 S が存在し得る領域を網かけしてない領域として単位立方体内に図示している。

| 黒点の個数 | 多面体を構成する2次元離散単体 | | |
|-------|-----------------|-------------------------|-------------------------|
| | N ₆ | N ₁₈ | N ₂₆ |
| 3 | | P3a | |
| 4 | P4a | P4a, P4b, P4c, P4d, P4e | P4a, P4b, P4c, P4d, P4e |
| 5 | P5a | P5a, P5b, P5c | P5a, P5b, P5c |
| 6 | P6a, P6b | P6a, P6b, P6c | P6a, P6b, P6c |
| 7 | P7 | P7 | |

表3: 表2の各配置とそれぞれの近傍系に対応した、離散組合せ多面体を構成する2次元離散単体の集合。離散組合せ多面体を構成する要素がない配置は表から除かれている。

また、式(2) (あるいは(3))より、 S から一意に I^- (あるいは I^+) が決まることが分かる。以上から次の定理が導かれる。

定理2 与えられた任意の開曲面 $S \subset X$ に対し、必ず2つの離散組合せ多面体 $\partial I_m^-, \partial I_m^+$ ($m = 6, 18, 26$) を Y に一意に生成することができる。

次に、 S と ∂I_m^- (あるいは ∂I_m^+) ($m = 6, 18, 26$) の関係を調べるため、 Y 上に定義された ∂I_m^- (あるいは ∂I_m^+) を X に埋め込む。 ∂I_m^- と ∂I_m^+ ($m = 6, 18, 26$) のそれぞれに対応して、

$$S_m^- = \bigcup_{[a] \in \partial I_m^-} |a|$$

$$S_m^+ = \bigcup_{[a] \in \partial I_m^+} |a|$$

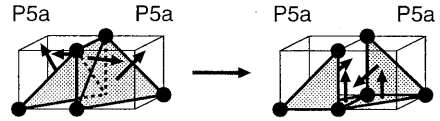


図4: 離散組合せ多面体生成過程において、18近傍のときのみ適用する例外処理。左図のように配置P5aが隣合って出現した場合、左図から右図への2次元離散単体の置き換えを行なう。

が得られる。 S_m^- と S_m^+ は X に存在する多面体であることから、 S が X を H^- と H^+ の2つの領域に分けたように(図2(a)), S_m^- と S_m^+ も X を図5のように分割する。ただし、

$$H_m^- \subseteq H^-,$$

$$H_m^+ \subseteq H^+,$$

$$H_m^- \cap \overline{(H_m^-)^c} = S_m^-,$$

$$H_m^+ \cap \overline{(H_m^+)^c} = S_m^+$$

が成り立つとする。分割された領域 H_m^-, H_m^+ ($m = 6, 18, 26$) の関係を次の定理で明らかにする。

定理3 X 内の任意の開曲面 S に対し、必ず以下の関係が成り立つ。

$$H_6^- \subseteq H_{18}^- \subseteq H_{26}^- \subseteq H^-, \quad (4)$$

$$H_6^+ \subseteq H_{18}^+ \subseteq H_{26}^+ \subseteq H^+. \quad (5)$$

(証明) X において、格子点を頂点に持つ単位立方体を $(i, j, k) \in Y$ に対して

$$E(i, j, k) = \{(x, y, z) \in X \mid i \leq x \leq i+1, j \leq y \leq j+1, k \leq z \leq k+1\}$$

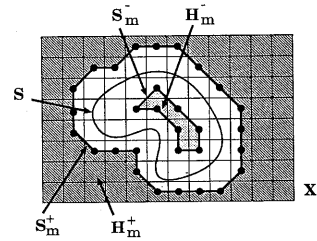


図5: S_m^- と S_m^+ による空間 X の分割の断面図。

と定義する。そして、各 $E(i, j, k)$ において

$$H^-(i, j, k) = H^- \cap E(i, j, k)$$

$$H_m^-(i, j, k) = H_m^- \cap E(i, j, k)$$

とし、まず、 $H^-(i, j, k)$ と $H_m^-(i, j, k)$ ($m = 6, 18, 26$) の $E(i, j, k)$ における関係を調べる。表 3 において、 $H_6^-(i, j, k)$, $H_{18}^-(i, j, k)$, $H_{26}^-(i, j, k)$ を比較すると、必ず

$$H_6^-(i, j, k) \subseteq H_{18}^-(i, j, k) \subseteq H_{26}^-(i, j, k)$$

の関係が成り立つ。また、表 2 において、 S は網かけしていない領域を通ることから、 $H^-(i, j, k)$ は網かけ領域を完全に含んだそれ以上の領域を占めることが分かる。一方、表 3 より $H_m^-(i, j, k)$ ($m = 6, 18, 26$) は必ず表 2 の対応する配置の網かけ領域に含まれる。表 3 にない配置についても同様に $H_m^-(i, j, k)$ は網かけ領域に含まれ、特に配置が P8 の場合は $H_m^-(i, j, k) = E(i, j, k)$ となる。したがって、すべての $E(i, j, k)$ において

$$H_6^-(i, j, k) \subseteq H_{18}^-(i, j, k) \subseteq H_{26}^-(i, j, k) \subseteq H^-(i, j, k)$$

が成立し、それらを重ね合わせることで式 (4) が得られる。式 (5) も同様に導くことができる。(証明終)

4 収束性と近似精度

前章までは、格子点からなる空間 Y として、格子幅が 1 のものを考えたが、本章では格子幅を $1/2^r$ (r は非負整数) とし可変にする。例えば、 $r = 0$ のとき格子幅は 1 となり、 X における格子点の集合はこれまでの Y と等しくなり、 $r = 1$ のとき格子幅は $1/2$ となる。以降、 X における $1/2^r$ の格子幅を持つ格子点の集合を $Y(r)$ と表すことにする。また、各 $Y(r)$ に対応して、 S の離散組合せ多面体 S_m^- と S_m^+ ($m = 6, 18, 26$) が決まることから、それらを $S_m^-(r)$, $S_m^+(r)$ と表記することにする。それらにともない、 $Y(r)$ における ∂I_m^- , ∂I_m^+ , H_m^- , H_m^+ をそれぞれ $\partial I_m^-(r)$, $\partial I_m^+(r)$, $H_m^-(r)$, $H_m^+(r)$ と表すことにする。まず、 $H_6^-(r)$ と $H_6^+(r)$ が Heijmans の離散化条件を満たしていることを示す。

定理 4 任意の r に関して次の関係式

$$H_6^-(r) \subseteq H_6^-(r+1) \subseteq H^-, \quad (6)$$

$$H_6^+(r) \subseteq H_6^+(r+1) \subseteq H^+ \quad (7)$$

が成り立つ。

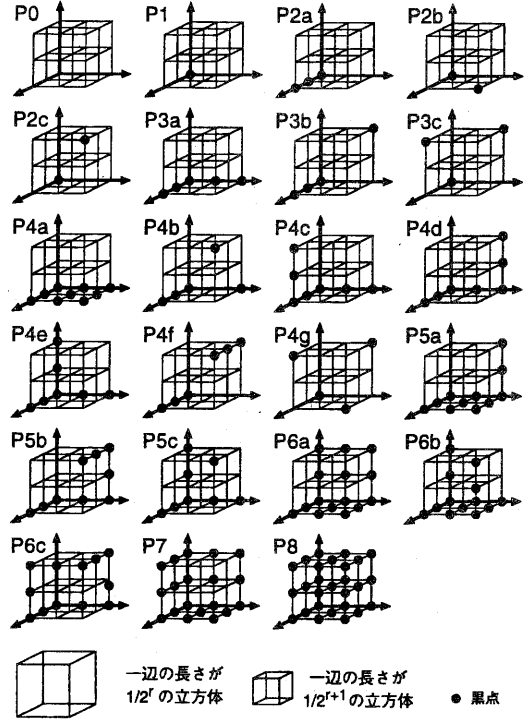


図 6: 格子幅が $1/2^r$ の離散空間 $Y(r)$ と格子幅が $1/2^{r+1}$ の離散空間 $Y(r+1)$ について、黒点の配置の変化の様子を示す。 $Y(r)$ における黒点の配置に対応して、 $Y(r+1)$ の格子点で必ず黒点となるものを示している。図中の黒点が描かれて $Y(r+1)$ の格子点は、 S の配置により黒点あるいは白点になる。

(証明) まず、式 (6) が成り立つことを証明する。 $Y(r)$ から $Y(r+1)$ へと格子幅を変えたとき、 $Y(r)$ の格子点の間に $Y(r+1)$ の格子点が生じる。新たに生まれた格子点は、 S の位置により黒点 (I^- に含まれる点) か白点 (I^- に含まれない点) になる。図 6 は、 $Y(r)$ における黒点の各配置 (表 2) に対し、 $Y(r+1)$ の格子点で必ず黒点になるものを図示している。図 6 における黒点以外の格子点 $(x, y, z) \in Y(r+1)$ は、

$$Cr(x, y, z) = \left\{ (a, b, c) \in X \mid x - \frac{1}{2^{r+1}} \leq a < x - \frac{1}{2^{r+1}}, \right. \\ \left. y - \frac{1}{2^{r+1}} \leq b < y - \frac{1}{2^{r+1}}, z - \frac{1}{2^{r+1}} \leq c < z - \frac{1}{2^{r+1}} \right\}$$

において、

$$H^+ \cap Cr(x, y, z) = \emptyset$$

が成り立つとき黒点となり、成り立たないときは白点となる。そこで、それらの点を灰色点を呼ぶことにする。も

し、それらの灰色点がすべて白点となる場合、

$$\mathbf{H}_6^-(r) = \mathbf{H}_6^-(r+1)$$

が成り立つ。もし、いくつかの灰色点が黒点となる場合、表3より以下の関係が得られる。

$$\mathbf{H}_6^-(r) \subseteq \mathbf{H}_6^-(r+1).$$

以上より、任意の r に対して

$$\mathbf{H}_6^-(r) \subseteq \mathbf{H}^-$$

は常に成り立つことから、式(6)が導かれる。式(7)も同様に導かれる。(証明終)

\mathbf{S}_m^- と \mathbf{S}_m^+ ($m = 6, 18, 26$) で挟まれる領域を

$$\mathbf{A}_m(r) = \overline{\mathbf{H}_m^-(r)} \cap \overline{\mathbf{H}_m^+(r)} \quad (8)$$

とすると、 $\mathbf{A}_m(r)$ は \mathbf{S}_m^- と \mathbf{S}_m^+ を含む閉集合となる。まず、 $\mathbf{A}_6(r)$ について以下の定理を証明する。

定理5 集合列 $\{\mathbf{A}_6(r)\}$ は r に関し単調減少であり、

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathbf{A}_6(r) = \mathbf{S} \quad (9)$$

が成り立つ。

(証明) 定理4より、

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{H}_6^-(r)} &\supseteq \overline{\mathbf{H}_6^-(r+1)} \supseteq \mathbf{H}^+ \\ \overline{\mathbf{H}_6^+(r)} &\supseteq \overline{\mathbf{H}_6^+(r+1)} \supseteq \mathbf{H}^- \end{aligned}$$

を得る。よって、式(1)、(8)から

$$\mathbf{A}_6(r) \supseteq \mathbf{A}_6(r+1) \supseteq \mathbf{S}.$$

したがって

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathbf{A}_6(r) \supseteq \mathbf{S}.$$

一方、

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathbf{A}_6(r) \setminus \mathbf{S} \quad (10)$$

なる \mathbf{x} が存在すると仮定する。ここで、 \mathbf{x} と \mathbf{S} の距離を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (11)$$

と定義すると、 $\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathbf{A}_6(r)$ と \mathbf{S} はともに閉集合なので、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{S}) > 0$$

が成り立つ。したがって、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{S}) > \frac{\sqrt{3}}{2^s}.$$

を満たす十分大きな s が必ず存在する。しかし、 $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}_6(s)$ となり、これは式(10)に矛盾する。したがって、式(9)が得られる。(証明終)

$\mathbf{A}_{18}(r)$ と $\mathbf{A}_{26}(r)$ については以下の定理が導かれる。

定理6 集合列 $\{\mathbf{A}_m(r)\}$ ($m = 18, 26$) について、

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathbf{A}_m(r) = \mathbf{S} \quad (12)$$

が成り立つ。

(証明) 定理3から、以下の2つの関係式

$$\overline{\mathbf{H}_6^-(r)} \supseteq \overline{\mathbf{H}_{18}^-(r)} \supseteq \overline{\mathbf{H}_{26}^-(r)} \supseteq \mathbf{H}^+$$

$$\overline{\mathbf{H}_6^+(r)} \supseteq \overline{\mathbf{H}_{18}^+(r)} \supseteq \overline{\mathbf{H}_{26}^+(r)} \supseteq \mathbf{H}^-$$

が得られる。それらの関係式と式(8)より、

$$\mathbf{A}_6(r) \supseteq \mathbf{A}_{18}(r) \supseteq \mathbf{A}_{26}(r) \supseteq \mathbf{S}$$

が導かれる。したがって、定理5より、式(12)が成立する。(証明終)

定理5と6では、集合列 $\{\mathbf{A}_m(r)\}$ にその和集合として極限集合が存在し、それが \mathbf{S} と一致することを示した。次に、Hausdorff 距離を用いて、 \mathbf{S} と $\mathbf{S}_m^-(r)$ (あるいは $\mathbf{S}_m^+(r)$) ($m = 6, 18, 26$) の間の距離を測り、 r が増加していくにしたがいその距離が小さくなっていくことを示す。 \mathbf{X} における閉集合 \mathbf{A} と \mathbf{B} の間の Hausdorff 距離は

$$H(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max(e(\mathbf{A}, \mathbf{B}), e(\mathbf{B}, \mathbf{A}))$$

で定義される。ただし

$$e(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} d(\mathbf{x}, \mathbf{B}).$$

とし、 $d(\mathbf{x}, \mathbf{B})$ は式(11)に従う。閉集合 \mathbf{A}, \mathbf{B} では、 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ のときに限り $H(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ が成り立つ。

定理7 以下の関係が $m = 6, 18, 26$ において成立する。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H(\mathbf{S}_m^-(r), \mathbf{S}) = \lim_{r \rightarrow \infty} H(\mathbf{S}_m^+(r), \mathbf{S}) = 0.$$

(証明) 定理3より、任意の r に対し、 $\mathbf{S}_{18}^-(r)$ と $\mathbf{S}_{26}^-(r)$ は常に $\mathbf{S}_6^-(r)$ と \mathbf{S} の間にあることから、

$$H(\mathbf{S}_{26}^-(r), \mathbf{S}) \leq H(\mathbf{S}_{18}^-(r), \mathbf{S}) \leq H(\mathbf{S}_6^-(r), \mathbf{S}).$$

十分大きな r に関して、 \mathbf{S} から $\sqrt{3}/2^{r-1}$ だけ離れた \mathbf{S} に平行な閉曲面 $\mathbf{Q}^-(r) \subset \mathbf{X}$ を考えると、明らかに

$$H(\mathbf{Q}^-(r), \mathbf{S}) = \frac{\sqrt{3}}{2^{r-1}}.$$

表2, 3より、 $\mathbf{S}_6^-(r)$ と \mathbf{S} は必ず $3 \times 3 \times 3$ 個の格子点から成る立方体領域に存在することから、

$$H(\mathbf{S}_6^-(r), \mathbf{S}) \leq H(\mathbf{Q}^-(r), \mathbf{S}).$$

よって,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H(Q^-(r), S) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{2^{r-1}} = 0,$$

となることから, $m = 6, 18, 26$ に対し,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H(S_m^-(r), S) = 0$$

が導かれる. $S_m^+(r)$ も同様の結果を得る. (証明終)

最後に異なる2つの閉曲面が与えられた場合について, それらの離散表現について考える.

定理 8 X において, 異なる2つの閉曲面 S_1, S_2 が与えられたとき, それぞれの離散組合せ多面体 $\partial I_{1m}^-(r)$ と $\partial I_{2m}^-(r)$ (あるいは $\partial I_{1m}^+(r)$ と $\partial I_{2m}^+(r)$) が異なるような十分大きな r が必ず存在する.

(証明) $S_1 \neq S_2$ であることから,

$$H(S_1, S_2) > 0$$

が成り立つ. したがって,

$$H(S_1, S_2) > \frac{\sqrt{3}}{2^r}$$

となる十分大きな r が必ず存在し, そのような r に関して,

$$\partial I_{1m}^-(r) \neq \partial I_{2m}^-(r), \quad \partial I_{1m}^+(r) \neq \partial I_{2m}^+(r)$$

が常に成り立つ.

(証明終)

5 あとがき

提案された離散化手法を用いると, 与えられた閉曲面 S に対し, S の外側と内側に, 各近傍ごとに多面体 $S_m^-(r)$, $S_m^+(r)$ ($m = 6, 18, 26$) が一意に生成される. 特に6近傍に関しては, 格子幅 $1/2^r$ を狭くしていくと, $S_6^-(r)$ と $S_6^+(r)$ に挟まれている領域が単調に減少していくというよい性質を持っており, それにより, その領域が集合論的に S に収束することを証明できた. 18近傍と26近傍に関しては, $S_{18}^-(r)$ と $S_{26}^-(r)$ (あるいは $S_{18}^+(r)$ と $S_{26}^+(r)$) が必ず $S_6^-(r)$ (あるいは $S_6^+(r)$) と S の間にあるという位置関係を利用して, それぞれ2つの多面体に挟まれた領域が S に収束することを示した. また, Hausdorff 距離を用いて, S と $S_m^-(r)$ (あるいは $S_m^+(r)$) の間の Hausdorff 距離を求め, 距離による収束性も保証した. 本稿で提案した離散化手法は, 収束性の保証がされているかわりに, その近似精度 (例えば, S との Hausdorff 距離による近さ) はあまり良くない. したがって, 近似精度のもっとよい多面体生成手法に対し, 本稿の収束性の証明が適用できるような工夫が必要である.

日頃から御教示いただいている本学, 宮原誠教授, 日比野靖教授に感謝致します. この研究の一部は, 日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業研究プロジェクト JSPS-RFTE97P00601 によるものである.

参考文献

1. L. Dorst and A. W. M. Smeulders, "Discrete representation of straight lines," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6(4), pp.450-463, 1984.
2. F. C. A. Groen and P. W. Verbeek, "Freeman-code probabilities of object boundary quantized contours," *Computer Graphics and Image Processing*, 7, pp. 391-402, 1978.
3. H. Freeman, "Boundary encoding and processing," in *Picture Processing and Psychopictorics*, B. S. Lipkin and A. Rosenfeld, eds., pp. 241-266, New York: Academic, 1970.
4. A. Rosenfeld, "Digital straight line segments," *IEEE Transactions on Computers*, c-23(12), pp. 1264-1269, 1974.
5. H. J. A. M. Heijmans, *Morphological Image Operators*, vol. 25 of *Advances in Electronics and Electron Physics*, Academic Press, 1994.
6. P. S. Aleksandrov, *Combinatorial Topology*, vol. 1, Graylock Press, Rochester, N.Y., 1956.
7. J. Françon. "Discrete combinatorial surface", *Graphical Models and Image Processing*, 57 (1), pp. 20-26, 1995.
8. V. A. Kovalevsky, "Finite topology as applied to image analysis", *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46, pp. 141-161, 1989.
9. Y. Kenmochi, "Discrete Combinatorial Polyhedra: Theory and Application", 博士論文, 千葉大学, 1998.
10. A. A. G. Requicha and H. B. Voelcker, "Solid modeling: A historical summary and contemporary assessment," *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2(2), pp. 9-24, 1982.
11. J. D. Foley, A. V. Dam, S. T. Feiner, and J. F. Hughes, *Computer Graphics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.
12. O. D. Faugeras, M. Hebert, P. Mussi, and J. D. Boissonnat, "Polyhedral approximation of 3-d objects without holes," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 25, pp. 169-183, 1984.