

ノンユニフォームBスプラインを用いた文字輪郭線の近似

田崎 太† 山崎 一生‡
†新潟大学大学院自然科学研究科
‡新潟大学工学部情報工学科

あらまし

2次元平面上の点列として与えられる文字輪郭線をノンユニフォームBスプラインで近似して圧縮する方法について述べる。ノンユニフォームBスプラインで近似する際、節点の数と位置や各ノットの多重度の決め方が課題である。節点の位置と各ノットの多重度は、与えられた輪郭点列と近似曲線との間の平均2乗誤差を最小にするノットベクトルから決める。近似曲線の誤差が十分に小さくなるまでノットを逐次追加した後、ノットを削除して効率のよい近似を行う。文字輪郭点列を3次式Bスプラインで近似した結果、形状が急激に変化する部分には多重ノット点が配置され、少ない節点で効率よく近似できることを確認した。

キーワード：フォント、データ圧縮、曲線近似、ノンユニフォームBスプライン、可変ノット、多重ノット

Curve Fitting with Non-uniform B-spline for Contour of Character Pattern

Futoshi TASAKI† Issei YAMASAKI‡

†Graduate School of Science and Technology, Niigata University

‡Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Niigata University

abstract

This paper presents a method of curve fitting with non-uniform B-spline. The determination of knot points and multiplicities of each knots is an important problem for curve fitting with non-uniform B-spline. Knot points and multiplicities of each knots are determined by calculating the knot vector which minimizes the error between points of contour and an approximated curve. The good approximation is given by deleting knots, after adding knots while the error of approximated curve is more than a tolerance. Digital character patterns are approximated by the non-uniform cubic B-spline as an example. It has been shown that multiple knot points are located on portions with acute curvature or corners. It also has been shown that the approximated curve is constructed with fewer knots.

key words : font, data compression, curve fitting, non-uniform B-spline, variable knots, multiple knot

1. まえがき

近年、卓上出版（デスクトップパブリッシング）が普及し、見やすい印刷物が手軽に作成できるようになった。見やすい印刷物を仕上げるには、形やサイズの異なる種々のフォントを用意しておくことが望ましい。日本語のように字種が多い場合には、1種類のフォントでも膨大な記憶容量を必要とする。種々のフォントを用意するためには、文字データの圧縮が必要である。最近では文字の拡大や縮小が容易なアウトラインフォントが主流となっており、さまざまな種類のフォントが計算機上で扱えるようになった。そして、アウトラインフォントの自動的な生成を目的として、文字輪郭線をスプラインなどで近似する方法が提案されている [1]-[3]。

2次元平面上の線図形をBスプラインで近似する際、節点の数と位置や各ノットにおける多重度の3つの決め方が重要な問題である。節点の位置に関しては、与えられた曲線の導関数が不連続になる点を節点とする方法 [4]-[6]、動的計画法を用いて誤差が最小になるように節点を決定する方法 [2],[7] 輪郭点列の全ての点を節点としてスプラインで近似した後に冗長な節点を削除する方法 [8],[9]、節点を変数として扱い非線形最小2乗問題を解いて最適な節点の配置を決める方法 [10] などがある。また、節点の個数については、赤池の情報量基準 (AIC) などの統計量を用いて決定する方法 [5],[10] がある。

文字輪郭線は角を多く含む。そのため、文献 [2],[3] では予め角を抽出してから、文字輪郭線をスプラインで近似している。ところで、2次以上のBスプラインは多重ノットを含むことができ、その多重ノット点において曲線の連続性を変えることができる。すなわち、多重ノットを自動的に発生すれば、予め角を抽出しなくとも文字輪郭線が近似できる。そこで本論文では、多重ノットを考慮しながらBスプラインで近似して、文字輪郭線のデータを圧縮する方法について述べる。

まず、2. ではBスプライン曲線について述べる。3. では与えられた輪郭点列と近似曲線との間の誤差を定義する。4. ではノットベクトルの決め方について述べ、5. ではノットを追加、削除して、与えられた輪郭点列を近似する方法について述べる。そして、文字輪郭線に適用した例を6. に示す。

2. Bスプライン曲線

Bスプライン曲線は基底関数と制御点列との1次結合で表される。2次元 xy 平面上で K 個の曲線セグメントからなる $M-1$ 次の閉じたBスプライン曲線は次式で表現される [11]。

$$\begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{K+M-2} N_{i,M}(t; \xi) \begin{bmatrix} q_{x(i \bmod K)} \\ q_{y(i \bmod K)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $p_x(t), p_y(t)$ はそれぞれ曲線上の点の x, y 座標を表し、 t は曲線上を動くパラメータである。 $q_{xi}, q_{yi} (i = 0, 1, \dots, K-1)$ は制御点の x, y 座標を表す。 $N_{i,M}(t; \xi)$ はBスプラインの基底関数で、次の式 (2),(3) で定義される。ただし、 $0/0 = 0$ とする。

$$N_{i,M}(t; \xi) = \frac{t - \xi_i}{\xi_{i+M-1} - \xi_i} N_{i,M-1}(t; \xi) + \frac{\xi_{i+M} - t}{\xi_{i+M} - \xi_{i+1}} N_{i+1,M-1}(t; \xi) \quad (2)$$

$$N_{i,1}(t; \xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq t < \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 ξ はノット $\xi_k (k = 0, \dots, K+2M-2)$ を添字 k の昇順に並べたノットベクトルである。 $k = M-1, \dots, K+M-1$ のときの ξ_k を内部ノットと呼び、次式を満足するように任意に与える。

$$\xi_k \leq \xi_{k+1}, \xi_k \neq \xi_{k+M-1} \quad (4)$$

$$(k = M-1, \dots, K+M-1)$$

内部ノット ξ_k に対応する点 $(p_x(\xi_k), p_y(\xi_k))$ はBスプライン曲線上の節点を表す。なお式 (1) は閉じた曲線の式であるから、次式が成立している。

$$\begin{bmatrix} p_x(\xi_{M-1}) \\ p_y(\xi_{M-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(\xi_{K+M-1}) \\ p_y(\xi_{K+M-1}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

内部ノット以外の $2M-2$ 個のノットは付加ノットと呼ばれ、内部ノットから次式で決定される。

$$\xi_k = \xi_{K+k} - T \quad (6)$$

$$\xi_{K+M+k} = \xi_{M+k} + T$$

$$(k = 0, 1, \dots, M-2)$$

ここで、 T は曲線一周分のパラメータ t の増分を表し、

$$T = \xi_{K+M-1} - \xi_{M-1} \quad (7)$$

である。

式 (4),(6) を満たすようにノットベクトルを定めると、パラメータ t の動く範囲は次式で表される。

$$\xi_{M-1} \leq t < \xi_{K+M-1} \quad (8)$$

ところで、閉曲線は任意の整数 n に対して、次式が成立している。

$$\begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(t+nT) \\ p_y(t+nT) \end{bmatrix}$$

さてここで、以下の写像 $\phi(t)$ を導入しよう。

$$\phi(t) = t + nT \quad (9)$$

ただし、 n は任意の整数で、 $\phi(t)$ の値域は

$$\xi_{M-1} \leq \phi(t) < \xi_{N+M-1} \quad (10)$$

であるとする。この写像 $\phi(t)$ により関数 $B_{i,M}(t; \xi)$ を

$$B_{i,M}(t; \xi) = \begin{cases} N_{i,M}(\phi(t); \xi) + N_{i+K,M}(\phi(t); \xi) \\ \quad (i=0, \dots, M-2) \\ N_{i,M}(\phi(t); \xi) \\ \quad (i=M-1, \dots, K-1) \end{cases} \quad (11)$$

で定義すると、式 (1) は

$$\begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{K-1} B_{i,M}(t; \xi) \begin{bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

と書ける。

次に、パラメータ t の値が次式のように離散化されているものとする。

$$t \in \{t_0, t_1, \dots, t_{J-1}\} \quad (13)$$

そうすると、式 (12) は次のように行列形式で表現することができる。

$$\begin{aligned} p_x &= B(\xi) q_x \\ p_y &= B(\xi) q_y \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $p_x, p_y, q_x, q_y, B(\xi)$ はそれぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned} p_x &= [p_x(t_0) \ p_x(t_1) \ \dots \ p_x(t_{J-1})]^T \\ p_y &= [p_y(t_0) \ p_y(t_1) \ \dots \ p_y(t_{J-1})]^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} q_x &= [q_{x0} \ q_{x1} \ \dots \ q_{x(K-1)}]^T \\ q_y &= [q_{y0} \ q_{y1} \ \dots \ q_{y(K-1)}]^T \end{aligned} \quad (16)$$

$$B(\xi) = \begin{bmatrix} B_{0,M}(t_0; \xi) & \dots & B_{K-1,M}(t_0; \xi) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{0,M}(t_{J-1}; \xi) & \dots & B_{K-1,M}(t_{J-1}; \xi) \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、添字 T は転置を表す。

3. 近似誤差の定義

輪郭点列 $\{(f_{xj}, f_{yj})\} (j=0, 1, \dots, J-1)$ が与えられるとする。各点にはパラメータ t_j が対応するものとし、その値は $t_j = j$ とする。そうすると、曲線一周分のパラメータ t の増分 T は $T = J$ となる。輪郭点の x, y 座標をそれぞれ添字 j の昇順に並べたものを f_x, f_y で表す。即ち、

$$\begin{aligned} f_x &= [f_{x0} \ f_{x1} \ \dots \ f_{x(J-1)}]^T \\ f_y &= [f_{y0} \ f_{y1} \ \dots \ f_{y(J-1)}]^T \end{aligned} \quad (18)$$

とする。

任意のノットベクトル ξ を与えたときの B スプラインで、 f_x, f_y を近似したものを p_x, p_y で表す。このとき、もとの輪郭点列と近似曲線との間の平均 2 乗誤差 $e(\xi)$ は次式で定義される。

$$e(\xi) = e_x(\xi) + e_y(\xi) \quad (19)$$

ただし、

$$\begin{aligned} e_x(\xi) &= \|f_x - p_x\|^2 / J \\ e_y(\xi) &= \|f_y - p_y\|^2 / J \end{aligned} \quad (20)$$

である。

近似曲線の制御点数 K が輪郭点数 J より少ない、即ち $K < J$ であるとする。また、ノットベクトル ξ が既知で、行列 $(B^T(\xi)B(\xi))$ が正則であるとする。このとき、式 (19) を最小にする近似曲線の制御点列は次式で計算される [12]。

$$\begin{aligned} q_x &= B(\xi)^\dagger f_x \\ q_y &= B(\xi)^\dagger f_y \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、

$$B(\xi)^\dagger = (B(\xi)^T B(\xi))^{-1} B(\xi)^T \quad (22)$$

である。式 (14), (21) から、式 (20) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} e_x(\xi) &= \|f_x - B(\xi)B(\xi)^\dagger f_x\|^2 / J \\ e_y(\xi) &= \|f_y - B(\xi)B(\xi)^\dagger f_y\|^2 / J \end{aligned} \quad (23)$$

4. ノットベクトルの決め方

節点の位置と各ノットの多重度は、ノットベクトルの与え方で決まる。式 (19) を最小にするノットベクトルで、節点の位置と各ノットの多重度を決定するものとする。式 (19) を最小にする問題は非線形最小 2 乗問題である。本論文では、非線形最小 2 乗問題の解法の 1 つとして知られる最急降下法 [13] を利用し

て、ノットベクトルを決定する。ここで、近似曲線の節点は輪郭点列から選ぶことにする。言い換えれば、ノット $\xi_k (k=0, \dots, K+2M-2)$ は

$$\xi_k \in \{t_j, t_j \pm T\} \quad (j=0, \dots, J-1) \quad (24)$$

から選ぶ。

4.1 近似誤差を最小化するノットベクトル

式(19)を最小にするノット ξ_k が満たすべき条件は、任意の k について次式が成立することである。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} e(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_k} e_x(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi_k} e_y(\xi) = 0 \quad (25)$$

ただし、

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} e_x(\xi) = -\frac{2}{J} f_x^T(\mathbf{B}(\xi)^\dagger)^T \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B}(\xi)^T \{I - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{B}(\xi)^\dagger\} f_x \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} e_y(\xi) = -\frac{2}{J} f_y^T(\mathbf{B}(\xi)^\dagger)^T \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B}(\xi)^T \{I - \mathbf{B}(\xi)\mathbf{B}(\xi)^\dagger\} f_y \quad (27)$$

である。この式(26), (27)の導出を付録に示す。式(26), (27)の $\partial \mathbf{B}(\xi) / \partial \xi_k$ は行列 $\mathbf{B}(\xi)$ の各要素を ξ_k で偏微分した行列で、この行列の各要素 $\partial B_{j,i}(\xi) / \partial \xi_k$ は次に示すとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} B_{j,i}(\xi) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{i,M}(\phi(t_j); \xi) \\ + \frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{i+K,M}(\phi(t_j); \xi) \\ \quad (i=0, \dots, M-2) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{i,M}(\phi(t_j); \xi) \\ \quad (i=M-1, \dots, K-1) \end{cases} \quad (28)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{i,M}(t; \xi) = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{t - \xi_i}{\xi_{i+M-1} - \xi_i} \right) \right\} N_{i,M-1}(t; \xi) \\ & + \left(\frac{t - \xi_i}{\xi_{i+M-1} - \xi_i} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{i,M-1}(t; \xi) \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\xi_{i+M} - t}{\xi_{i+M} - \xi_{i+1}} \right) \right\} N_{i+1,M-1}(t; \xi) \\ & + \left(\frac{\xi_{i+M} - t}{\xi_{i+M} - \xi_{i+1}} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{i+1,M-1}(t; \xi) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} N_{i,1}(t; \xi) = 0 \quad (30)$$

である。

方程式(25)を最急降下法で解く手順は、次のとおりである。この手順では、反復回数を l で表すものとし、第 l 回目の反復におけるノットベクトルを ξ^l と表記する。

Step 1. 式(4), (6)を満足する初期ノットベクトル ξ^1 を任意に与えておく。

Step 2. 式(19)で近似誤差 $e(\xi^l)$ を計算する。次式を満たすとき、ノットベクトル ξ^l を求める解とし、このアルゴリズムを停止する。

$$|e(\xi^l) - e(\xi^{l-1})| \leq \delta \quad (31)$$

ここで、 δ はある定数である。また、 $e(\xi^0) = \infty$ とする。

Step 3. 次式の1次元探索を行う。

$$\min_{\alpha \geq 0} e(\xi^l + \alpha d^l) \quad (32)$$

ここで、 d^l は第 l 回目の反復における探索方向を表すベクトルであり、 α は半直線上を動くパラメータである。この1次元探索については4.2で詳しく述べる。

この1次元探索において、 $e(\xi^l + \alpha d^l)$ が最小値であるとき、 $\xi^{l+1} = \xi^l + \alpha d^l$ とする。そしてStep 2.に戻る。

4.2 1次元探索

ここでは、式(32)の1次元探索における方向ベクトル d^l の決め方とパラメータ α の範囲について述べる。

(1) 方向ベクトル d^l の決め方

まず、多重ノットを含まない場合について考えよう。一般に最急降下法における1次元探索の方向ベクトル d^l は次式で定義される。

$$\begin{aligned} d^l &= \begin{bmatrix} d_0^l & d_1^l & \dots & d_{N+2M-2}^l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial e(\xi)}{\partial \xi_0} & -\frac{\partial e(\xi)}{\partial \xi_1} & \dots & -\frac{\partial e(\xi)}{\partial \xi_{K+2M-2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

ところで、付加ノットは式(6)で決定され、曲線一周分のパラメータの増分 T は輪郭点列から一意に決定される。そこで、方向ベクトル d^l の初めの $M-1$ 個と終りの M 個の要素は次式で定義する。

$$d_k^l = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \xi_{K+k}} e(\xi) & (k=0, 1, \dots, M-2) \\ -\frac{\partial}{\partial \xi_{k-K}} e(\xi) & (k=K+M-1, \dots, K+2M-2) \end{cases} \quad (34)$$

次に、多重ノットを含む場合について考えよう。いま、ノット ξ_k, ξ_{k+1} が多重ノット、即ち $\xi_k = \xi_{k+1}$ であるとする。式(4)を考慮すると、ノット $\xi_k + \alpha d_k^l$ と

$\xi_{k+1} + \alpha d_{k+1}^l$ との間には次の関係式が成り立つ必要がある。

$$\xi_k + \alpha d_k^l \leq \xi_{k+1} + \alpha d_{k+1}^l, \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (35)$$

ここで方向ベクトルの要素 d_k^l, d_{k+1}^l の大小関係に注目して、式 (35) が成立するか否かを調べる。

- i) $d_k^l \leq d_{k+1}^l$ のとき、式 (35) は成立する。
- ii) $d_k^l > d_{k+1}^l$ のとき、 $\alpha > 0$ なら式 (35) は成立しない。そこで、 d_k^l, d_{k+1}^l を

$$d_k^l = 0, \quad d_{k+1}^l = 0 \quad (36)$$

とし、多重ノット ξ_k, ξ_{k+1} の値が変化しないようにする。

(2) パラメータ α の範囲

ノット $\xi_k + \alpha d_k^l$ と $\xi_{k+1} + \alpha d_{k+1}^l$ との間には関係式 (35) が成り立つ必要がある。方向ベクトルの要素 d_k^l, d_{k+1}^l の大小関係に注目して、式 (35) が成立するパラメータ α の範囲を調べよう。

- i) $d_k^l > d_{k+1}^l$ のとき、 $\xi_k + \alpha d_k^l$ と $\xi_{k+1} + \alpha d_{k+1}^l$ とが同じ値になるまで探索が可能であるから、 α の範囲は

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{d_k^l - d_{k+1}^l} \quad (37)$$

である。

- ii) $d_k^l \leq d_{k+1}^l$ のときは常に式 (35) が成立するので、 α の範囲は $\alpha \geq 0$ である。

以上より式 (32) のパラメータ α の範囲は、次式で限定される。

$$0 \leq \alpha \leq \min \left\{ \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{d_k^l - d_{k+1}^l} \mid d_k^l > d_{k+1}^l \right\} \quad (38)$$

$$(k = M - 1, \dots, K + M - 2)$$

式 (24) を考慮すると、1次元探索で調べるノットベクトル $\xi^l + \alpha d^l$ は有限個に限定される。そこで式 (32) の1次元探索では、探索可能なノットベクトルに対して全探索を行う。

5. 与えられた輪郭点列の近似

5.1 ノットの追加による近似精度の向上

Bスプラインによる曲線近似において、セグメントの数を多くするほど近似誤差は小さくなる。この性質は、曲線全体についてだけでなく、曲線の一部分

についてもいえる。誤差の大きい部分を分割してセグメント数を増やすと、即ち誤差の大きいセグメントにノットを追加すると、近似精度は向上する。

セグメントの誤差には、平均2乗誤差と累積2乗誤差とが考えられる。ノットを追加するセグメントとして、平均2乗誤差が最大のセグメントを選ぶものとする、短いセグメントが選ばれる場合がある。この短いセグメントにノットを追加して近似しても、曲線全体の近似誤差はほとんど減少しない。一方で、ノットを追加するセグメントとして、累積2乗誤差が最大のセグメントを選ぶものとする、長いセグメントほど選ばれる。この長いセグメントにノットを追加して近似すると、曲線全体の近似誤差は減少する。

本論文では、累積2乗誤差が最大のセグメントの中央にノットを逐次追加して近似する。以下にその手順を示す。この手順では、セグメントの数を K で表すものとする。また、セグメント数が K のときのノットベクトルを ξ^K と、各ノットを $\xi_k (k = 0, \dots, K + 2M - 2)$ と表記する。

Step 1. 閉曲線を表現するには、少なくとも3つのセグメントが必要である。そこで、内部ノットを

$$\{\xi_{M-1}, \xi_{M-1} + \frac{1}{3}T, \xi_{M-1} + \frac{2}{3}T, \xi_{M-1} + T\}$$

と定め、この内部ノット列と式 (6) とからノットベクトル ξ^l を定める。そして、次の最小化問題を解く。

$$\min \{e(\xi^l) \mid t_0 \leq \xi_{M-1} \leq t_0 + T/3\} \quad (39)$$

近似誤差 $e(\xi^l)$ が最小となるときのノットベクトルを ξ^3 とする。

Step 2. 初期ノットベクトルとして ξ^K を与えて、4. で述べたアルゴリズムを適用する。得られたノットベクトルを ξ^K とする。近似誤差 $e(\xi^K)$ がある許容値 ϵ_1 以下、即ち

$$e(\xi^K) \leq \epsilon_1 \quad (40)$$

を満たすとき、 ξ^K を求める解として、このアルゴリズムを停止する。

Step 3. ノットの区間 $[\xi_k^K, \xi_{k+1}^K]$ ($k = M - 1, \dots, K + M - 2$) に対応する各セグメントにおいて、累積2乗誤差を計算する。ここで、各セグメントの累積2乗誤差を $a(k)$ ($k = M -$

1, ..., K + M - 2) と表記する。いま、セグメントの累積 2 乗誤差 $a(k)$ が $k = \bar{k}$ で最大値をとるとする。このとき、新しい内部ノットを次式で定める。

$$\xi_k^{K+1} = \begin{cases} \xi_k^K & (k = M - 1, \dots, \bar{k}) \\ \frac{1}{2}(\xi_k^K + \xi_{k+1}^K) & (k = \bar{k} + 1) \\ \xi_{k-1}^K & (k = \bar{k} + 2, \dots, K + M) \end{cases}$$

この内部ノット列と式 (6) とから、ノットベクトル ξ^{K+1} を定める。そして Step 2. へ戻る。

5.2 ノットの削除によるデータの削減

ここでは、5.1 で述べたアルゴリズムにより得られたノットベクトルから、冗長なノットを削除してノット数の少ない B スプライン曲線を得る方法について述べる。削除しても近似誤差がほとんど増加しないノットを、冗長なノットと定義する。近似誤差が許容値を越えるまで冗長なノットを削除する。以下にその手順を示す。この手順では、セグメントの数を K で表すものとし、セグメント数が K のときのノットベクトルを ξ^K と、各ノットを $\xi_k^K (k = 0, \dots, K + 2M - 2)$ と表記する。

Step 1. 内部ノット $\xi_k^K (k = M - 1, \dots, K + M - 2)$ のうち、任意の 1 つ ξ_k^K を取り除いたノットベクトルを $\xi^K - \{\xi_k^K\}$ と表記することにする。ただし、ノット ξ_{M-1}^K を取り除いた場合は、ノット ξ_{K+M-1}^K の値を $\xi_M^K + T$ に変更して、ノットベクトル $\xi^K - \{\xi_{M-1}^K\}$ を作成する。

$k = M - 1, \dots, K + M - 2$ において、近似誤差 $e(\xi^K - \{\xi_k^K\})$ を計算する。

Step 2. Step 1. で計算した近似誤差 $e(\xi^K - \{\xi_k^K\})$ のうち、

$$\min_k e(\xi^K - \{\xi_k^K\}) \quad (41)$$

となる ξ_k^K を探す。このときのノットを $\bar{\xi}_k^K$ とする。

Step 3. 初期ノットベクトルとして $\xi^K - \{\bar{\xi}_k^K\}$ を与えて、4. で述べた方法を適用する。得られたノットベクトルを ξ^{K-1} とする。このときの近似誤差 $e(\xi^{K-1})$ が許容誤差 ϵ_2 より大きいとき、即ち

$$e(\xi^{K-1}) > \epsilon_2 \quad (42)$$

であるとき、ノットを削除する前のノットベクトル ξ^K を求める解として、このアルゴリズムを停止する。そうでなければ Step 1. に戻る。

なお、このアルゴリズムは 5.1 で述べたアルゴリズムの後に適用する。そこで、5.1 のアルゴリズムにおける許容値 ϵ_1 は $\epsilon_1 < \epsilon_2$ とする必要がある。

6. 処理例とその検討

文字パターンは、2 次元 xy 平面上の 256×256 の碁盤目状の領域に白黒 2 値の画像として表現されているものとする。この文字パターンにおいて、白領域に隣接する黒画素を 8 連結の点列として抽出したものを輪郭点列とする。ここでは、輪郭線の形状が比較的単純な「大」とそれより複雑な「新」の 2 文字を選んだ。それぞれの輪郭点列を図 1 に示す。見やすいように、図では輪郭点列を直線で結んでいる。輪郭点数は、「大」が 1265 点、「新」が 2520 点である。

この点列を、近似曲線の平均 2 乗誤差が 0.1 (画素幅²) 以下となるように 3 次式 B スプライン曲線 ($M = 4$) で近似し、配置された節点と各ノットの多重度を観察する。ここで述べた方法で用いるパラメータ $\delta, \epsilon_1, \epsilon_2$ は、それぞれ $\delta = 0.001, \epsilon_1 = 0.05, \epsilon_2 = 0.1$ とする。近似した結果を図 2 に示す。この図の十字記号は節点を、黒塗りの四角形は多重ノット点を表す。図 2 を見ると、角や急激に変化している曲線部分に多重ノット点が配置されている。また、多重ノット点が配置されていない角の付近には、多くの節点が配置されている。一方、直線部分や緩やかな曲線部分には、節点はほとんど配置されていない。以上より、ここで述べた方法は効率の良い節点配置を行なっているといえる。

次に、データ圧縮の効果について調べよう。ここでは、(1) ユニフォーム B スプラインで近似する方法、及び (2) 5.1 で述べたアルゴリズムだけで近似する方法と、ここで述べた方法 (以後、提案法と呼ぶ) とを比較する。近似曲線の平均 2 乗誤差が 0.1 (画素幅²) 以下になるように近似する。このときの、近似曲線の内部ノット数、制御点数、近似曲線の再構成に必要なデータ数を表 1 に示す。ただし、近似曲線の再構成に必要なデータ数は、方法 (1) の場合には

$$(\text{データ数}) = (\text{制御点数}) \times 2$$

で、方法 (2) と提案法の場合には

$$(\text{データ数}) = (\text{制御点数}) \times 2 + (\text{内部ノット数})$$

である。

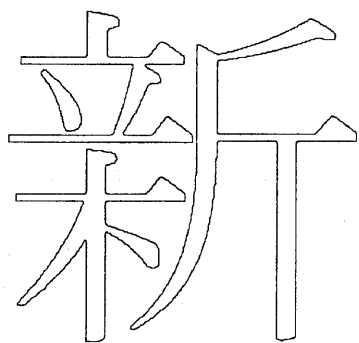
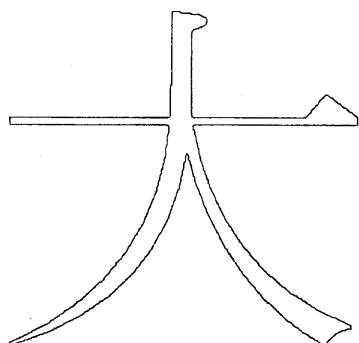


図 1: 近似対象図形

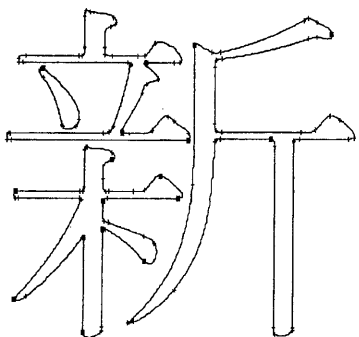
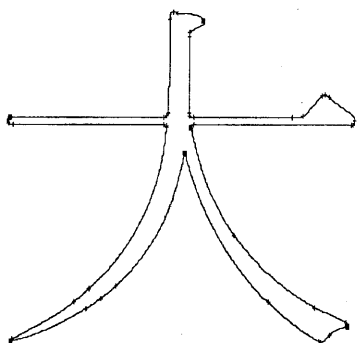


図 2: 近似曲線と選択された節点

表 1: 近似曲線の再構成に必要なデータ数

	文字	提案法	方法(1)	方法(2)
近似誤差 (画素幅 ²)	大	0.0957	0.0991	0.0996
	新	0.0960	0.0953	0.0979
内部ノットの 個数	大	52	161	62
	新	146	347	173
制御点数	大	51	160	61
	新	142	343	169
必要な データ数	大	154	320	184
	新	430	686	511

まず、提案法と方法(1)とを比較しよう。提案法によって近似した曲線を再構成するのに必要なデータ数は、「大」においては方法(1)のデータ数の約48%に、「新」においては約63%に減少している。ノンユニフォームBスプラインで近似する方がユニフォームBスプラインでの近似よりも圧縮効率が高いことがわかる。次に、提案法と方法(2)とを比較しよう。提案法によって近似した曲線を再構成するのに必要なデータ数は、「大」、「新」ともに方法(2)のデータ数の約84%に減少している。節点を追加して近似精度を向上させるだけでなく、その後の節点の削除が圧縮効率を高めていることがわかる。

7. むすび

文字輪郭点列をノンユニフォームBスプライン曲線で近似して圧縮する方法について述べた。ノンユニフォームBスプライン曲線で近似する際に問題となるのは、節点の数と位置、各ノットにおける多重度の3つの決め方である。与えられた輪郭点列と近似曲線との平均2乗誤差がノットベクトルの関数で表されることに着目し、この平均2乗誤差を最小にするノットベクトルを最急降下法で計算して、節点の位置と各ノットの多重度を定める手順を述べた。そして、累積2乗誤差の大きなセグメントにノットを追加して近似精度を向上させた後に、冗長なノットを削除して近似曲線を再構成するのに必要なデータ数を削減する手順を述べた。明朝体漢字の「大」、「新」の輪郭線を近似した結果、形状が急激に変化している部分に多重ノット点が配置され、効率的な近似がなされていることを確認した。

本論文ではBスプラインで近似する方法を述べたが、今後は有理式Bスプラインで近似する方法について検討したい。また、曲面近似への応用も今後の課

題である。

謝辞

本研究の機会を与えて頂いた、日本精機(株)の川又光博R & Dセンター長、山崎隆一総務部長に感謝致します。

参考文献

- [1] 齊藤, 穂坂: “拡張2次有理 Bézier 曲線による高品位文字フォントの生成とその特徴,” 情処学論, 31, 4, pp.562-570, 1990.
- [2] 山崎, 鳥島, 勝野: “区分的3次多項式を用いた文字輪郭線の近似,” 情処学論, 31, 5, pp.701-709, 1990.
- [3] 堀内, 大瀬, 寅市: “マルチフォントの自動関数化における接合点の多段階抽出法,” 電学論, 113-C, 12, pp.1136-1143, 1993.
- [4] C. de Boor: “A Practical Guide to Splines,” Springer-Verlag, pp. 180-186, 1978.
- [5] 吉本, 市田, 清野: “区分的3次関数を用いたデータ平滑化,” 情報処理, 17, 3, pp.200-206, 1976.
- [6] Y. Hu: “An algorithm for data reduction using splines with free knots,” IMA J. Numerical Analysis, 13, pp.365-381, 1993.
- [7] 石村, 橋本, 辻本, 有本: “修正動的計画法による線図形のスプライン近似,” 信学論 (D), J68-D, 2, pp.169-176, 1985.
- [8] T. Lyche, K. Mørken: “Knot removal for parametric B-Spline curves and surfaces,” CAGD, 4, pp.217-230, 1987.
- [9] L. L. Schumaker, S. S. Stanley: “Shape-preserving knot removal,” CAGD, 13, pp.851-872, 1996.
- [10] P. Dierckx: “Curve and Surface Fitting with Splines,” Clarendon Press, Oxford, pp. 53-73, 1993.
- [11] 山口 富士夫: “コンピュータディスプレイによる形状処理工学 (II),” 日刊工業新聞社, pp. 110-113, 1982.
- [12] P. Lancaster, K. Salkauskas: “Curve and Surface Fitting,” Academic Press, pp. 113-125, 1990.
- [13] 今野, 山下: “非線形計画法,” 日科技連, 1978.

付録 1. 式 (26), (27) の導出

まず, 式 (26) を導出する. 表記の都合上, 以下の式では $\mathbf{B}(\xi)$ を \mathbf{B} で表すことにする. 式 (23) の $e_x(\xi)$ は次式に変形できる.

$$e_x(\xi) = \frac{1}{J} (\mathbf{f}_x - \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{f}_x)^T (\mathbf{f}_x - \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{f}_x) \quad (43)$$

行列 $(\mathbf{B}^T \mathbf{B})$ が正則であることに注意すると, $\partial e_x(\xi) / \partial \xi_k$ は以下のように変形される.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} e(\xi)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{J} \mathbf{f}_x^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{B}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T) \right\} \\ &\quad \{ \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} \} \mathbf{f}_x \\ &= -\frac{2}{J} \mathbf{f}_x^T \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B} \right) (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \right) \mathbf{B}^T \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B}^T \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B} \right) (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{B} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B}^T \right) \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \right\} \mathbf{f}_x \\ &= -\frac{2}{J} \mathbf{f}_x^T \left\{ \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B}^T \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B}^T \right) \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \right\} \mathbf{f}_x \\ &= -\frac{2}{J} \mathbf{f}_x^T \left\{ (\mathbf{B}^T)^T \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathbf{B}^T \right) \right\} \{ \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \} \mathbf{f}_x \quad (44) \end{aligned}$$

式 (27) についても同様に導出される.