

## 輪郭線図形の多重解像度解析への Crystalline Flow の導入

本谷秀堅\* , 杉本光伸\* , 儀我美保\*\* , 儀我美一\*\* , 出口光一郎\*\*\*

\*山形大学工学部, \*\*北海道大学大学院理学研究科, \*\*\*東北大学大学院情報科学研究科

概略: 本稿では Crystalline flow を紹介する. 通常の曲率流と異なり, crystalline flow においては多角形が多角形のまま発展する. 各辺は法線の方向に nonlocal curvature により定められる速度で移動する. Nonlocal curvature は辺の長さや Wulff 図形と呼ばれる図形に基づき決まる量であり, 正確な値を容易に計算できる. 通常の曲率流と異なり辺の追跡が容易であるため, 多重解像度解析に有用である. 与えられた多角形の crystalline flow を算出する手法について解説する.

Keywords: 輪郭線図形, 多重解像度解析, Crystalline flow, 曲率流

### Introducing a crystalline flow for a multi-scale contour figure analysis

H. Hontani, M. Sugimito, M.-H. Giga, Y. Giga, and K. Deguchi

\*Yamagata Univ., \*\*Hokkaido Univ., \*\*\*Tohoku Univ.

**Abstract:** We introduce a crystalline flow for a multi-scale contour figure analysis. In the crystalline flow, a given polygon remains polygonal through the evolution. Each facet in the evolving polygon moves toward the normal direction at the velocity that is determined by a *nonlocal curvature*. The *nonlocal curvature* depends on the length of the facet and Wulff shape, which plays a role of a unit circle for usual curvature flow. Because it is not difficult to trace each facet in a given polygon through the evolution, a crystalline flow is useful for multi-scale analysis of a contour figure.

Keywords: Contour figure, Multi-scale analysis, Crystalline flow, curvature flow

## 1 はじめに

輪郭線図形の多重解像度解析に, 曲率流と呼ばれる, 曲線を発展させる操作が広く利用されている [1][2]. 中でも輪郭線上の各点を曲率に比例した速度で法線方向に移動させる curve shortning flow は, 時間に関する半群の性質や曲率の変曲点の数が決して増えないことなど, 形状解析に都合の良い性質を有しており, 古くから数多くの研究がなされてきた.

与えられた輪郭線図形より curve shortning flow を求めるためには, 輪郭線図形の各点を法線方向に曲率に比例した速度で移動させなければならない. この際, 曲率を精度良く計算することや輪郭線の弧長が時間の経過とともに短くなることに対応するこ

とはそれほど容易ではない. 特に後者については, 形状に依存して弧が短くなる速度が異なるため注意が必要である.

例えば輪郭線を弧に沿ったパラメータ  $s$  を用いて  $(x(s), y(s))$  と表現するとき,  $x(s), y(s)$  をガウシアンフィルタで平滑化することを利用して curve shortning flow を得る手法が提案されている [3]. 曲線の発展により輪郭線が短くなるため, 時刻  $t=0$  で弧長を表していたパラメータ  $s$  が, 平滑化後は弧長を表さなくなる. そこで文献 [3] では微小なスケールによる平滑化のあとサンプリングをしないことを繰り返すことにより curve shortning flow を得ている. 輪郭線図形の多重解像度解析においては, 発展する輪郭線上の各点の移動を追跡することが多い. しかしサンプリングをしないこの手法では元

図形上の点の追跡が容易ではない．特にスケールスペースにおけるフィンガープリントを作成するための変曲点の追跡や変曲点の消滅の検出をおこなう際に注意が必要となる．

弧の長さの変化を考えずに curve shortning flow が得られる手法に等高線の方法 (level set method) が有り，広く利用されている [4][5][6][7]．等高線の方法では時刻  $t$  における曲線を，画像上で定義された関数  $f(x, y; t)$  の等高線 (例えば  $f(x, y; t) = 0$ ) で表現する．輪郭線の曲率は弧に沿った微分により定義される量であるが，等高線的手法では曲率など弧に沿った変化を表す特徴量を関数  $f(x, y; t)$  の  $x$  微分と  $y$  微分から算出する．このため輪郭線を弧に沿ったパラメータにより表現する必要がなく，曲線どうしの融合や分離などを自然に扱うことができる．このことは等高線的手法が有する大きな長所であるが，実は，curve shortning flow においては曲線の融合・分離がおこらないため，curve shortning flow に適用してもあまり長所が活かされない．むしろ，関数  $f(x, y; t)$  を  $x$  や  $y$  で微分する際，実際には画像上で  $3 \times 3$  ピクセル程度の演算子を用いることになるため，輪郭線に演算子の大きさより狭い部分があるとき，そこで正確な曲率が算出できなくなるなどの問題がある．実際，注意深く実装しないと，curve shortning flow で輪郭線が千切れてしまうなど，起こってはならないことが起こる．また，弧に沿ったパラメータがないため，輪郭線上の各点の追跡も容易ではない．

そこで本稿では，上で述べた弧の長さの変化や曲率の算出などの問題に煩わされることなく，与えられた図形から多重解像度解析に有用な flow を得る手法を紹介する．本稿で紹介する flow は crystalline flow と呼ばれるものであり，結晶成長学や材料科学の分野から研究が進み，近年数学の分野で研究がすすめられているものである．crystalline flow は curve shortning flow を含む従来の曲率流を離散化することで導出される．curve shortning flow などと異なり，crystalline flow においては，初期図形として多角形が与えられた場合多角形のまま発展する．曲率流では各点が曲率に依存して法線方向に移動したが，crystalline flow においては多角形の各辺が nonlocal curvature に依存して法線方向に移動する．この nonlocal curvature は辺の長さなど計算が容易な量の組み合わせで算出される．計算が容易な量の組み合わせで flow を求めることができる上に，発展する輪郭線が多角形でありつづけるため，多重

解像度解析に有用な点の追跡などが容易である．

画像上の輪郭線はチェーンコードで表現されている場合を代表として，多角形である場合が多い．近年，初期図形として自己交差しない一般の多角形が与えられた場合の crystalline flow について研究が進んだ．与えられた一般の多角形から crystalline flow を求める際，時刻 0 の直後に一度だけ新たな辺を与えられた図形に挿入する必要がある．本稿ではこの，辺の挿入手法を提案する．

## 2 Crystalline Flow

本節では crystalline flow について説明する．crystalline flow は前節で述べたとおり，従来の曲率流 (curvature flow) の離散版である．まず 2.1 節において，重み付き曲率  $\Lambda_\gamma$  について界面エネルギー密度関数  $\gamma$  を用いて説明する．従来の曲率も nonlocal curvature も，界面エネルギーの，輪郭線図形の面積に関する第一変分として導出される．従来の曲率は  $\gamma$  が等方的な ( $\gamma(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|$ ) 場合に対応しており，一方 nonlocal curvature は  $\gamma$  が滑らかではない場合に拡張して導出されたことを述べる．

本稿では，輪郭線上の各点の法速度  $V$  の方程式  $V = \Lambda_\gamma$  を考える．この方程式について第 2.2 節では初期図形が essentially admissible crystal と呼ばれる多角形である場合について述べ，続く第 2.3, 2.4 節において初期図形が一般の場合について述べる．

### 2.1 Weighted Curvature Flow

まず weighted curvature (重み付き曲率) について述べる．界面エネルギー密度関数と呼ばれる関数  $\gamma$  は平面  $\mathbf{R}^2$  で定義された連続な凸関数で， $\gamma(\lambda \mathbf{p}) = \lambda \gamma(\mathbf{p})$  を任意の  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$  と  $\lambda > 0$  について満たす．原点以外で  $\gamma(\mathbf{p}) > 0$  を仮定し，またとりあえず (次の段落までは) 原点以外で  $\gamma$  は滑らかであると仮定する．曲線  $S$  の重み付き曲率  $\Lambda_\gamma$  は次式で定義される．

$$\Lambda_\gamma(\mathbf{n}) = -\text{div}(\xi(\mathbf{n})), \quad (1)$$

ただし  $\mathbf{n}$  は曲線  $S$  の外向き単位法線ベクトルで， $\xi = \nabla \gamma$  である．曲線  $S$  の弧に沿った長さを表すパラメータを  $s$  で表すとき，曲線  $S$  の界面エネルギー  $I(S)$  は次式で与えられる．

$$I(S) = \int_S \gamma(\mathbf{n}) ds. \quad (2)$$

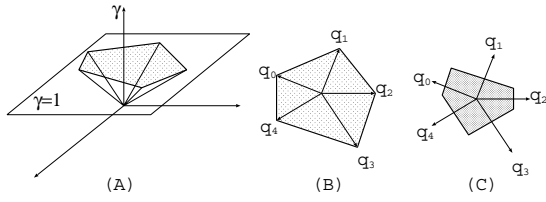


図 1: (A): crystalline エネルギー  $\gamma$ , (B): Frank  $\gamma$ , (C): Wulff 図形 .

式 (1) で表される重み付き曲率  $\Lambda_\gamma(\mathbf{n})$  は, 閉曲線  $S$  の面積に関する界面エネルギー  $I(S)$  の第一変分である . 面積が等しい閉曲線の中で界面エネルギーを最小にする図形の形状は一意に定まり, Wulff 図形  $W_\gamma$  と呼ばれる .

$$W_\gamma = \bigcap_{|\mathbf{m}|=1} \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 ; \mathbf{x} \cdot \mathbf{m} \leq \gamma(\mathbf{m}) \}.$$

定義により  $W_\gamma$  はいつも凸である . 例えば  $\gamma(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|$  の場合,  $\Lambda_\gamma$  は通常の曲率となり, Wulff 図形は単位円となる . 任意の  $\gamma$  について, Wulff 図形の周上の重み付き曲率は常に  $\Lambda_\gamma = -1$  となる . Wulff 図形は与えられた界面エネルギー密度関数  $\gamma$  に対して, 単位円の役割を果たす .

輪郭線図形の多重解像度解析のために, 下記の式で表される非等方な曲率流を  $\Gamma_\gamma$  上で考える . ただし時刻  $t$  における輪郭線を  $\Gamma_t$  で表し, 外向き法線方向の速度を  $V$  で表す .

$$V = \Lambda_\gamma(\mathbf{n}). \quad (3)$$

$\gamma(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|$  の場合には式 (3) は  $V = \kappa$  となり, 良く知られた curve shortening equation となる . 与えられた輪郭線図形から式 (3) の解を求める手法は等高線的手法 (level set method) を含めて幾つか知られている [4][6][7] .  $\gamma$  が原点以外で  $C^2$  級である場合に, 式 (3) が大域的に解けることが示されている [6][7] .

しかし,  $\gamma$  が原点以外にも角を持つとき, 式 (3) の解に関して粘性解を含めた古典的な考え方は適用できていなかった .  $\gamma$  の性質を表すために, しばしば Frank diagram が用いられる .  $\gamma$  の Frank diagram は次式で定義される (図 1) .

$$\text{Frank } \gamma = \{ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^2 ; \gamma(\mathbf{p}) \leq 1 \}.$$

Frank  $\gamma$  が凸多角形である場合,  $\gamma$  は crystalline エネルギー密度と呼ばれる .  $\gamma$  が crystalline エネルギー密度関数である場合について, 式 (3) の解の概

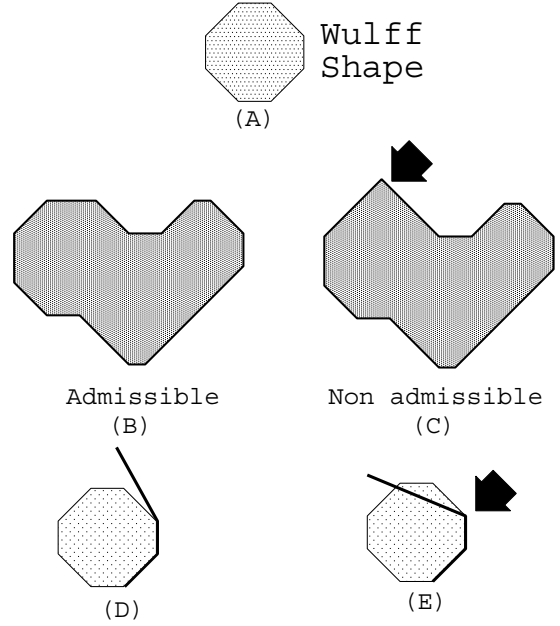


図 2: (A)Wulff 図形, (B)Admissible crystal, (C)Nonadmissible な多角形 . 矢印の部分で Wulff 図形と比較して法線方向が急に変化している . (D)Essentially admissible な角 . (E)Essentially inadmissible ではない角 . 角が急過ぎて, Wulff 図形を内接させることができない .

念が [8] と [9] において独立に考案された . [8][9] においては, 発展する曲線  $\Gamma_t$  を admissible と呼ばれる特殊な多角形に限定していた .

その後研究が進み, [10] において  $\gamma$  に角があり必ずしも crystalline エネルギー密度ではない場合にまで等高線の方法が拡張された . 初期図形が必ずしも admissible ではない単純な一般の輪郭線についても, 大域的に一意に式 (3) は解けることが示された . 次節において式 (3) に従って発展する多角形を求めるために利用する, 辺の長さに関する常微分方程式について述べる .

## 2.2 Crystalline Flow

以降  $\gamma$  を crystalline エネルギー密度関数であると仮定する . すなわち, Frank  $\gamma$  を凸  $M$  角形であるとす . この仮定の下, crystalline flow と呼ばれる, 式 (3) に従って発展する多角形について考える .

Frank  $\gamma$  の頂点を  $\mathbf{q}_i (i = 1, 2, \dots, M)$  で表す . 自己交差しない向きづけられた多角形  $S$  の各辺の外向き法線ベクトルのうち, 任意の隣あう二つのベク

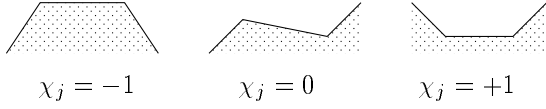


図 3: Transition number  $\chi_j$

トル  $m$  と  $\hat{m}$  が任意の  $\lambda \in (0, 1)$  に対して次式を満たすとき,  $S$  を essentially admissible crystal と呼ぶ (図 2) .

$$\frac{(1-\lambda)m + \lambda\hat{m}}{|(1-\lambda)m + \lambda\hat{m}|} \notin \mathcal{N}, \quad (4)$$

ただし  $\mathcal{N} = \{\mathbf{q}_i/|\mathbf{q}_i|; i = 1, 2, \dots, M\}$  である. 時刻の区間を  $J$  で表す. 任意の時刻  $t \in J$  において  $S(t)$  が essentially admissible crystal であり, なおかつ各頂点の移動が時間変化に対して連続微分可能である場合, 多角形の族  $\{S(t)\}_{t \in J}$  を essentially admissible evolving crystal と呼ぶ.  $S(t)$  の  $j$  番目の辺を  $S_j(t)$  で表し, その法線方向を  $\mathbf{n}_j$  で表すことにする.  $S(t) = \cup_{j=1}^M S_j(t)$  である. 辺の番号  $j$  は時計回りに付すことにする. このとき,  $S_j(t)$  の長さ  $L_j(t)$  について下に示す輸送方程式が得られる.

$$\frac{dL_j(t)}{dt} = (\cot \phi_j + \cot \phi_{j+1})V_j - \frac{1}{\sin \phi_j}V_{j-1} - \frac{1}{\sin \phi_{j+1}}V_{j+1}. \quad (5)$$

ただし  $\phi_j = \theta_j - \theta_{j-1}$  であり,  $\theta_j$  は辺  $S_j(t)$  の法線方向  $\mathbf{n}_j = (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$  である.  $V_j$  は  $S_j(t)$  の法線方向の速度である.

Essentially admissible crystal  $\{S(t)\}_{t \in J}$  のうち  $V_j$  が次式を満たすものを式 (3) の  $\gamma$ -regular flow と呼ぶ.

$$V_j(t) = \chi_j \frac{\Delta(\mathbf{n}_j)}{L_j(t)}. \quad (6)$$

ここで  $\Delta(\hat{m}) = \hat{\gamma}(\hat{\theta} + 0) - \hat{\gamma}(\hat{\theta} - 0)$  である. ただし  $\hat{m} = (\cos \hat{\theta}, \sin \hat{\theta})$  であり,  $\theta$  方向の単位ベクトルに対する  $\gamma$  の値を  $\hat{\gamma}(\theta) = \gamma(\cos \theta, \sin \theta)$  で表す.  $\hat{m}$  が  $\mathcal{N}$  に含まれているなら  $\Delta(\hat{m})$  は Wulff 図形  $W_\gamma$  の辺のうち外向き法線が  $\hat{m}$  と平行なものの長さを表し,  $\hat{m}$  が  $\mathcal{N}$  に含まれていなければ,  $\Delta(\hat{m}) = 0$  である.  $\chi_j$  は辺の凹凸を示す数で, transition number と呼ばれる.  $j$  番目の辺の近傍が凹ならば  $\chi_j = +1$ , 凸ならば  $\chi_j = -1$ , それ以外ならば  $\chi_j = 0$  である (図 3).  $\Lambda_j \equiv \chi_j \Delta(\mathbf{n}_j)/L_j(t)$  を  $\gamma$  に対する  $j$  番目の辺の nonlocal weighted curvature と呼ぶ. 通常の曲率は, 内接円の半径の逆数で定義された. nonlocal weighted curvature は内接する Wulff 図形の辺の長



図 4: 左: 通常の曲率は内接円の半径の逆数. 右: nonlocal weighted curvature は Wulff 図形を拡大または縮小して内接させたときの倍率の逆数.

さの逆数で定義される (図 4). 式 (5) と (6) が辺の長さ  $L_j(t)$  に関する連立常微分方程式である.

まず, 与えられた (閉じた) 輪郭線図形  $S(0)$  が essentially admissible crystal であると仮定する.  $\gamma(\mathbf{p}) = \gamma(-\mathbf{p})$  という条件のもと連立常微分方程式 (5)(6) を計算すると, 輪郭線  $S(t)$  は点へと縮んでしまうまで essentially admissible crystal でありつづける. 自己交差もしない [10]. 時刻の経過とともに一部の  $\chi = 0$  の辺の長さが 0 となり消えることがあるが, それでも多角形は essentially admissible crystal でありつづける. 辺が消えても連立常微分方程式 (5)(6) を計算しつづけて得られる essentially admissible crystal の属  $\{S(t)\}_{t \in J}$  を crystalline flow と呼ぶ. 式 (5)(6) により得られる crystalline flow は, 式 (3) を [10] で導入されたの等高線の方法により解いたものと一致する [11].

## 2.3 初期図形が一般の多角形の場合

次に, 初期図形  $S(0)$  が必ずしも essentially admissible crystal ではない, 自己交差しない一般の (閉じた) 多角形の場合について考える. この一般の場合についても, crystalline エネルギー密度関数  $\gamma$  に対して式 (3) の解を与える唯一の level set flow が存在することが示されている [10]. しかし, その解が連立常微分方程式 (5)(6) により記述できるか否かは自明ではない. 一般の多角形が初期図形である場合, 与えられた初期図形のうち条件 (4) を満たさない角に, 時刻 0 の直後に, 法線が  $\mathcal{N}$  に属する新たな辺が生じる (図 5). このため新たな辺が生じることで辺の隣接関係が変化する上に, 新たに生じた辺に関して式 (5)(6) は特異となる.

初期の多角形  $S(0)$  の辺  $S_j(0)$  と  $S_{j+1}(0)$  の外向き単位法線を  $\mathbf{m}$  と  $\hat{m}$  で表す. 仮に

$$\mathcal{M} \equiv \left\{ \frac{(1-\lambda)m + \lambda\hat{m}}{|(1-\lambda)m + \lambda\hat{m}|} \in \mathcal{N}; 0 < \lambda < 1 \right\}$$

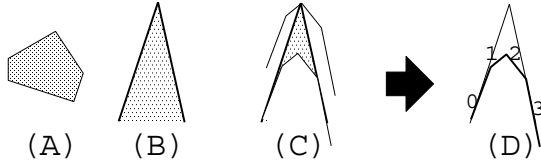


図 5: 比較原理により non-admissible な角に新たな辺が生じる。(A): Wulff 図形, (B): non-admissible な角. (C): 二つの essentially admissible な曲線. 比較原理は, この 2 つの曲線が時間が経過しても接したり追い越したりしないことを保証する. (D): 新たに辺が生じることで essentially admissible になる. 本稿では, この新たに生じる辺の長さの算出法を示す.

が空でないならば, 比較原理に基づき, 辺  $S_j(0)$  と  $S_{j+1}(0)$  の間に法線方向が  $\mathcal{M}$  に属する辺  $R_1(t), \dots, R_n(t)$  が  $t = 0$  の直後に生じる (図 5). 充分小さな  $t > 0$  に対して,  $R_i(t)$  の transition number  $\chi_i$  は  $S_j(0)$  と  $S_{j+1}(0)$  の間の角が凸なら  $-1$  であり, 凹なら  $+1$  となる. 新たな辺が生じることにより,  $t > 0$  において  $S(t)$  は essentially admissible になる. 以下説明を簡単にするために, 時刻 0 の直後に新たに生じる辺も含めて辺の番号を時計回りにふりなおす. 時刻 0 ではその直後に新たに生じる辺の長さは 0 である. このとき, 前節と同様の連立常微分方程式 (5)(6) が得られるが,  $L_j(0)$  の値は 0 となりうる.

式 (5)(6) は次式のように書き直すことができる.

$$\frac{dL_j(t)}{dt} = \frac{\tilde{p}_j}{L_j(t)} + \frac{\tilde{q}_{j-1}(t)}{L_{j-1}(t)} + \frac{\tilde{r}_{j+1}(t)}{L_{j+1}(t)}. \quad (7)$$

ただし  $\tilde{p}_j, \tilde{q}_j, \tilde{r}_j$  の値は発展させる図形と Wulff 図形が与えられたら定まる量であり, それぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j &= (\cot \phi_j + \cot \phi_{j+1}) \chi_j \Delta(\mathbf{n}_j), \\ \tilde{q}_j &= -(\sin \phi_{j+1})^{-1} \chi_j \Delta(\mathbf{n}_j), \\ \tilde{r}_j &= -(\sin \phi_j)^{-1} \chi_j \Delta(\mathbf{n}_j) \end{aligned} \text{である. 式 (7) を解くために } L_j(t) \text{ を Puiseux 級数で表現する.}$$

$$L_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} t^{k/2}, \quad (8)$$

ただし  $a_{jk}$  は実数である.  $L_j(0) = 0$  ならば,  $a_{j0} = 0$  である.

与えられた初期多角形  $S(0)$  において  $n$  本の続いた辺  $S_1(t), \dots, S_n(t)$  が, 時刻 0 の直後に生じる辺であると仮定する.  $L_1(0) = \dots = L_n(0) = 0$  である. また, これら  $n$  本の辺の両脇の辺を  $S_0(t)$  と

$S_{n+1}(t)$  で表し,  $L_0(0) = L_{n+1}(0) > 0$  とする. 式 (8) を (7) に代入し両辺を比較することにより, 全ての係数を求めることができる. 特に最初の係数  $\{a_{j1}\}_{j=1}^n$  の値は重要である.  $S_0(0)$  と  $S_{n+1}(0)$  の transition number  $\chi$  が 0 の場合は, 辺  $S_0$  と  $S_{n+1}$  が時刻 0 では動かないため, 式 (8) を解く際に辺  $S_1$  から  $S_n$  までだけを考えれば良くなる. このときの解  $\{a_{j1}\}_{j=1}^n$  を用いて自己相似発展解を得ることができる. 自己相似解の解法について次に述べる.

## 2.4 自己相似発展解

$\{S(t)\}_{t>0}$  を次式で表される essentially admissible evolving crystal であるとする. ただし  $S_0(t)$  と  $S_{n+1}(t)$  は平行ではない半直線であるとする. このとき  $\tilde{q}_0 = \tilde{r}_{n+1} = 0$  である.

$$S(t) = \bigcup_{j=0}^{n+1} S_j(t).$$

次式を満たす essentially admissible crystal  $S_*$  が存在するとき,  $\{S(t)\}_{t>0}$  は自己相似であると言う.

$$S(t) = t^{1/2} S_* = \{t^{1/2} \mathbf{x}; \mathbf{x} \in S_*\}, \quad t > 0.$$

$\{S(t)\}_{t>0}$  が (7) の解であるとき,  $\{S(t)\}_{t>0}$  は (3) の自己相似発展解であると言う. 定義より  $S(+0) = \lim_{t \downarrow 0} S(t)$  は原点を端点とする 2 本の半直線から構成されている.

式 (8) の係数  $a_{j1}$  から新たに生じる辺の長さ  $t^{1/2} a_{j1}$  が求まる. 2 本の半直線から成る角  $C$  が与えられたとき, 自己相似発展解  $S(t)$  が存在し, 一意に定まることが証明されている. 証明は, 式 (7) より導出される下記代数方程式 (9) に正値解が存在し, しかもその解が一意に定まることを示すことによりなされる [12].

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = H_n \begin{bmatrix} 1/a_n \\ 1/a_{n-1} \\ \vdots \\ 1/a_2 \\ 1/a_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし,

$$H_n = \begin{bmatrix} p_n & q_{n-1} & & & & & \\ r_n & p_{n-1} & q_{n-2} & & & & 0 \\ & r_{n-1} & p_{n-2} & q_{n-3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ 0 & & & r_3 & p_2 & q_1 & \\ & & & & r_2 & p_1 & \end{bmatrix},$$

$p_j = 2\tilde{p}_j$ ,  $q_j = 2\tilde{q}_j$ ,  $r_j = 2\tilde{r}_j$ ,  $a_j = a_{1j}$  である .

### 3 Crystalline Flow の計算方法

本節において, 必ずしも essentially admissible ではない与えられた多角形に対して, crystalline flow を求める手法を述べる . 特に, 時刻 0 の直後に, essentially admissible ではない角すべてに挿入される辺の長さを求める手法を提案する .

辺の挿入は時刻 0 の直後にのみおこなわれ, その後新たな辺は生じず, 辺の本数が増えることはない . 辺を挿入するにあたり式 (9) を解き, 挿入する辺の長さを定める . 非線型方程式 (9) を解く際, 式 (9) の解の存在の証明手順に基づき解法を定めた .

ひとたび辺の挿入がなされたら, あとは式 (5)(6) を Euler 法により逐次解くことで各辺の長さを更新する .

式 (9) の解の存在の証明は, 行列  $K_n(s)$  をあらたに導入し, 式 (9) を  $\alpha_j = 1/a_j$  とおくことにより得られる次式について考察することでなされる .

$$\begin{bmatrix} 1/\alpha_n \\ 1/\alpha_{n-1} \\ \vdots \\ 1/\alpha_2 \\ 1/\alpha_1 \end{bmatrix} = K_n(s) \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし  $K_n(s) =$

$$\begin{bmatrix} p_n & sq_{n-1} & & & \\ sr_n & p_{n-1} & sq_{n-2} & & 0 \\ & sr_{n-1} & p_{n-2} & sq_{n-3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & sr_3 & p_2 & sq_1 \\ & & & & sr_2 & p_1 \end{bmatrix}$$

であり,  $K_n(1) = H_n$  となる . 解の存在はおおよそ次の手順で示される [12] .

1.  $s = 0$  のとき  $[1/\alpha_j] = K_n(0)[\alpha_j]$  は解を持つ .
2. 上記解は  $s = 1$  まで延長することができる .

$s = 0$  のとき  $K_n(0)$  は対角成分のみを有するようになるため, 式 (10) は容易に解ける . 解は  $\alpha_j = 1/\sqrt{p_j}$  である . 上記証明に導かれ, 次に示す手順で式 (9) を  $\alpha_j = 1/a_j$  として書き換えた式を解く .

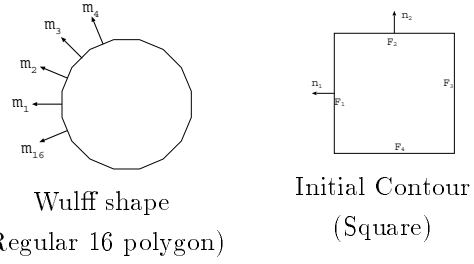


図 6: 正 16 角形の Wulff 図形 (左) と正方形の初期図形 (右)

1. 時間の刻み幅  $\Delta t$  と Wulff 図形を定める . Wulff 図形は凸多角形とする . Wulff 図形は通常の曲率流における単位円の働きをする .
2. 初期値として  $\alpha_j = 1/\sqrt{p_j}$  とおく . ただし  $n_j$  は与えられた多角形の  $j$  番目の辺の外向き法線であり,  $\Delta(n_j)$  は Wulff 図形の辺のうち法線が  $n_j$  であるものの長さである .
3. Newton-Rapson 法で (9) を  $\alpha_j$  について解く .
4.  $a_j = 1/\alpha_j$  として  $a_j$  を求め,  $L_j(\Delta t) = a_j\sqrt{\Delta t}$  とする .

### 4 実験結果

まず, Wulff 図形として正 16 角形を用意し, 正方形を初期図形とした (図 6) .  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 16$ ) で Wulff 図形の外向き単位法線を表す . 辺の番号を時計回りに付し,  $\arg m_i = \pi - (i - 1)\pi/8$  となるように向きを定める . 初期図形の各辺を  $F_j$  で表し,  $F_j$  の外向き法線を  $n_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) で表す . 正方形の向きを  $\arg n_j = \pi - (j - 1)\pi/2$  となるように定める . このとき, 時刻 0 の直後に, 初期正方形の各角に 3 本の辺が生じる . 例えば辺  $F_1$  と  $F_2$  の間には法線が  $m_2, m_3, m_4$  と平行な辺が生じる . 生じる 3 本の辺の長さは次式を  $a_j$  について解くことにより決定できる .

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ q & p & q \\ 0 & q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_3 \\ 1/a_2 \\ 1/a_1 \end{bmatrix}$$

ただし,  $p = 4/\tan \pi/8$ ,  $q = -2/\tan \pi/8$  である .  $\alpha = 1/a_1 = 1/a_3$ ,  $\beta = 1/a_2$  とおくと上式の解析的

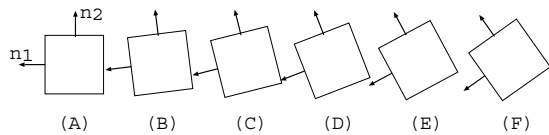


図 7: 初期図形の例． $\pi/80$  ずつ回転している．

解は次のようになる．

$$\begin{cases} \alpha = -1/2q(p\beta - 1/\beta), \\ \beta = \frac{[(p^2+q^2)+\sqrt{(p^2+q^2)^2-p^2(p^2-2q^2)}]}{p(p^2-2q^2)}. \end{cases}$$

$p, q$  の値を代入して値を求めると  $a_1 = a_3 \simeq 1.68$ ,  $a_2 \simeq 1.29$  となる．挿入される 3 本の辺は対称である．単位円の役割を果たしていた Wulff 図形は正 16 角形であるにも関わらず，挿入される辺の長さは初期図形の辺との関係から，全てが同じ長さでは無いことに注意する．前節で述べた Newton 法を用いる手法で数値解を求めたところ，解析解と十分に近い値が得られた．

初期図形が回転すると挿入される辺の長さも変化する．図 7 に示すように， $\pi/80$  ずつ回転させた初期図形のそれぞれについて，挿入される辺の長さを計算した．表 1 に計算により算出された  $a_j$  を示す．図 7 の正方形 (A) が初期図形の場合 3 本の辺が挿入されるが，それ以外の場合は 4 本の辺が挿入される．正方形の辺とほぼ平行な辺が挿入されるとき，より長い辺となることが確認された．表 1 の結果に対応する辺の挿入結果を図 8 に示す．

Wulff 図形を変化させることにより，同一の初期図形から様々な crystalline flow を求めることができる．得られた crystalline flow を図 9 に示す．非等方な flow を実現できている．また Wulff 図形が正 30 角形の場合は，通常の curve shortning flow の良い近似になっている．

## 5 まとめ

輪郭線図形の多重解像度解析に利用可能な操作として，crystalline flow を導入した．従来の曲率流では  $t > 0$  で解析的な曲線となるが，crystalline flow では初期図形が多角形であるなら，多角形のまま発展する．従来の手法で曲率流を求める際には，曲線の曲率を差分演算により近似して算出していた．しかし弧に沿った 2 階微分を精度良くおこなうことは，それほど容易ではない．また多重解像度解析に

表 1: 図 7 のそれぞれの正方形の辺  $F_1$  と  $F_2$  の間に生じる辺の長さの計算結果．算出された  $a_j$  の値を示す． $a_j$  の値は，法線が  $m_j$  と平行な辺の長さの成長速度を示す．

	(A)	(B)	(C)
Arg $n_1$	$\pi$	$\pi + \pi/80$	$\pi + 2\pi/80$
Arg $n_2$	$\pi/2$	$\pi/2 + \pi/80$	$\pi/2 + 2\pi/80$
$a_1$	-	5.891	3.924
$a_2$	1.682	1.464	1.382
$a_3$	1.287	1.232	1.223
$a_4$	1.682	1.719	1.806

(D)	(E)	(F)
$\pi + 3\pi/80$	$\pi + 4\pi/80$	$\pi + 5\pi/80$
$\pi/2 + 3\pi/80$	$\pi/2 + 4\pi/80$	$\pi/2 + 5\pi/80$
3.090	2.614	2.303
1.326	1.286	1.257
1.225	1.287	1.257
1.925	2.085	2.303

応用する際には，スケールスペースを利用するなどして，発展する曲線上の点を追跡する必要がある．数学的には滑らかな曲線を画像上で離散化して表現しているため，法線の方角を求めることなどを含めて，点の追跡を正確におこなうことも原理的に困難であった．一方本稿で導入した crystalline flow は，各辺の長さにより定まる non-local curvature に基づき辺の移動速度が決まる．辺の長さは正確に算出することが容易であり，また多角形でありつづけることから，初期図形の辺の追跡や辺の消滅の検出が容易に実現できる．このことは，crystalline flow が有する，従来の曲率流には無かった利点である．

## 参考文献

- [1] J. J. Koenderink. The structure of images. *Biological Cybernetics*, 50:363–370, 1984.
- [2] Luis Alvarez and Frederic Guichard. Axioms and Fundamental Equations of Image Processing. *Archive for rational mechanics and analysis*, 123:199–257, 1993.
- [3] Farzin Mokhtarian and Alan K. Mackworth. A Theory of Multiscale, Curvature-Based

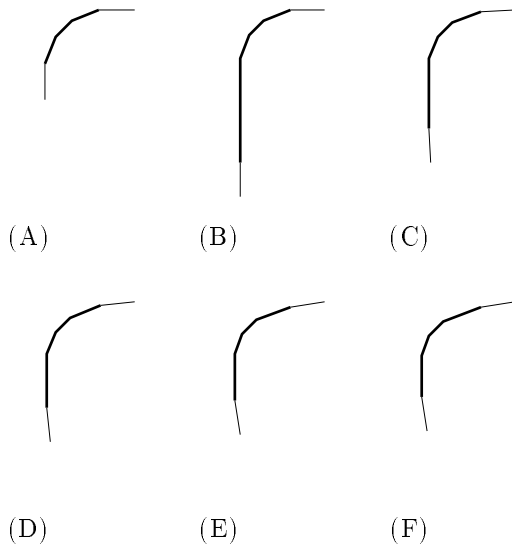


図 8: 図 7 の辺  $F_1$  と  $F_2$  の間に時刻 0 の直後に生じる辺 . 太線で示されているのが新たに生じる辺 .

Shape Representation for Planar Curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8):789–805, 8 1992.

- [4] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal Computer Physics*, pages 12–49, 1988.
- [5] Ron Kimmel, Doron Shaked, and Nahum Kiryati. Skeltonization via distance maps and level sets. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(3):382–391, 1995.
- [6] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level-sets by mean curvature, i. *Journal of Differential Geometry*, 33:635–681, 1991.
- [7] Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Remarks on viscosity solutions for evolution equations. *Journal of Differential Geometry*, 33:749–786, 1991.
- [8] S. B. Angenent and M. E. Gurtin. Multiphase thermomechanics with interfacial structure 2. evolution of an isothermal interface. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 108:323–391, 1989.
- [9] J. Taylor. Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry. In *Pro-*

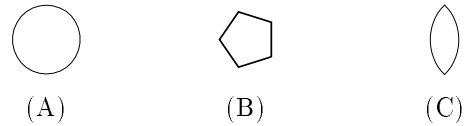
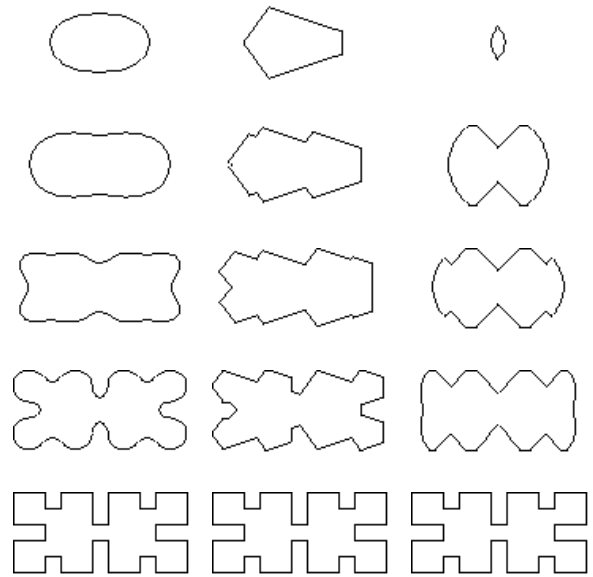


図 9: Wulff 図形を変えることにより同一の初期図形から得られた様々な crystalline flow . Wulff 図形は (A):正 30 角形, (B):正 5 角形, (C):30 角形 .

*ceedings of the Conference on Differential Geometry*, volume 52, pages 321–336. Pitman, London, 1991.

- [10] M.-H. Giga and Y. Giga. Generalized motion by nonlocal curvature in the plane. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 159:295–333, 2001.
- [11] M. H. Giga and Y. Giga. Crystalline and level-set flow – convergence of a crystalline algorithm for a general anisotropic curvature flow in the plane. *Free boundary problems: theory and applications I (ed. N. Kenmochi) Gakuto International Ser. Math. Sci. Appl.*, 13:pp. 64–79, 2000.
- [12] M.-H. Giga, Y. Giga, and H. Hontani. Self-similar solutions in motion of curves by crystalline energy. In *Proceedings of 5th International Congress on Industrial and Applied Mathematics*. (printing), Sydney, July, 2003.