

楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較

山田 純平* 金谷 健一* 菅谷 保之†

* 岡山大学大学院自然科学研究科 † 豊橋技術科学大学情報工学系

本論文では画像上の点列に楕円を当てはめる問題を最尤推定として定式化し、KCR の下界との関係を述べる。次に、その数値解法として FNS 法、HEIV 法、くりこみ法のアルゴリズムを述べ、ガウス・ニュートン法を追加する。そして、シミュレーションおよび実画像を用いてこれらの反復解法の収束性を実験的に比較し、反復の初期値や当てはめる楕円弧の形状への依存性を明らかにする。

High Accuracy Ellipse Fitting and Its Performance Evaluation

Junpei Yamada,* Kenichi Kanatani,* and Yasuyuki Sugaya†

*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

This paper studies numerical schemes for fitting an ellipse to points in an image. First, the problem is posed as maximum likelihood estimation, and the relationship to the KCR lower bound is stated. Then, we describe the algorithms of FNS, HEIV, and renormalization, to which a new method based on Gauss-Newton iterations is added. Using simulated and real image data, we compare their convergence properties and reveal their dependence on the initial value for iterations and the shape of the elliptic arc to which an ellipse is to be fitted.

1. まえがき

シーン中の円形や球形の物体を撮影すると一般に楕円に投影され、その投影像からその物体の 3 次元位置が解析できる [8]。このため、画像から抽出した点列に円や楕円を当てはめることは視覚ロボットを含む広範な応用の基本的な処理の一つである。実際、画像から抽出したエッジ点列が楕円をなすかどうかを判定して、楕円弧を抽出する種々の研究がなされている (文献 [16, 20] に詳細なリストがある)。

本論文では、楕円上にあることが既知の点列に楕円を当てはめる方法を考える。過去に多くの方法が提案されたが [1, 5, 17, 19]、最尤推定解を求める方法として代表的なものに FNS 法 [3]、HEIV 法 [15]、くりこみ法 [7, 6, 10, 11, 14] がある。これらは高次の誤差項を除いて精度の理論限界 (KCR 下界) を達成している [2, 9, 10, 13]。

FNS 法、HEIV 法、くりこみ法はいずれも反復解法であり、データの誤差が大きいときは収束までの反復回数に差が表れ、場合によっては収束しないこともある。筆者らは最尤推定を上回る超精度の楕円当てはめ法が存在することを示したが [20]、これは最尤推定解に対する補正であり、最尤推定解が得られることが前提である。そこで本論文では最尤推定の計算の収束性をシミュレーションおよび実画像実験によって比較する。

楕円当てはめの問題を抽象化すると「幾何学的当てはめ」として定式化され、2 画像の対応点から基礎行列を計算する問題と同一の形となる [11, 12, 13]。基礎行列の最尤推定の計算法は菅谷ら [18] が比較実験を行い、一般に FNS 法が収束性において最も優れたことを指摘されている。

しかし、基礎行列の推定と楕円当てはめは性格が異なる部分が多い。特に楕円を当てはめる楕円弧の形状への依存は楕円当てはめ独自の問題点である。本論文では菅谷ら [18] が比較した FNS 法、HEIV 法、くりこみ法、ガウス・ニュートン法を楕円当てはめ

*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173
{yamada,kanatani}@suri.it.okayama-u.ac.jp
†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1
sugaya@ics.tut.ac.jp

に適用し，基礎行列の推定の場合との収束性の類似点および相違点を考察する．

FNS 法と HEIV 法については菅谷ら [18] と同様に，原理通りの方法とその改良法を比較し，反復の初期値もランダム，最小二乗法，Taubin 法の 3 通りを比較する．最後に実画像を用いた実験を示す．これらの実験によって各手法の反復の初期値や当てはめる楕円弧の形状への依存性が明らかになる．

2. 楕円の当てはめ

楕円は次のように表せる [8]．

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2f_0(Dx + Ey) + Ff_0^2 = 0 \quad (1)$$

ただし， f_0 は定数である¹．ベクトル u ， ξ を

$$u = (A, B, C, D, E, F)^\top \quad (2)$$

$$\xi = (x^2, 2xy, y^2, 2f_0x, 2f_0y, f_0^2)^\top \quad (3)$$

と置けば，式 (1) は次のように書ける²．

$$(u, \xi) = 0 \quad (4)$$

ベクトル u の大きさは不定であるから $\|u\| = 1$ と正規化する．このように，画像上の点 (x_α, y_α) ， $\alpha = 1, \dots, N$ に楕円を当てはめる問題は 6 次元空間 \mathcal{R}^6 の N 点 $\{\xi_\alpha\}$ に式 (4) の超平面を当てはめる問題に帰着する．

式 (1) で表されるのは楕円とは限らず，放物線，双曲線，およびそれらの退化も含み，総称して「コニック」(「円錐曲線」)とも呼ばれる [8]．実際，誤差が大きいと楕円上の点列に双曲線が当てはまったりする．それを防ぐ方法もあるが [5]，本論文ではそのような場合も解とみなす．

3. KCR の下界

データベクトル ξ_α を次のように書く．

$$\xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha + \Delta\xi_\alpha \quad (5)$$

ここに $\bar{\xi}_\alpha$ は誤差のない理想値であり， $\Delta\xi_\alpha$ は誤差項である． ξ_α の共分散行列を次のように定義する．

$$V[\xi_\alpha] = E[\Delta\xi_\alpha \Delta\xi_\alpha^\top] \quad (6)$$

¹スケールをそろえる目的である．本論文の実験では $f_0 = 600$ としたが， $f_0 = 1$ としても実際的な問題はないであろう．

²本論文ではベクトル a ， b の内積を (a, b) と書く．

式中の $E[\cdot]$ は誤差分布に関する期待値である．各点の各座標に期待値 0，標準偏差 σ の誤差が独立に加わるとき，式 (3) より，共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ は $O(\sigma^4)$ の項を除いて次のように書ける．

$$V[\xi_\alpha] = 4\sigma^2 \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 \\ f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

ただし $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ はデータ点 (x_α, y_α) の真の位置であり，計算過程では (x_α, y_α) に置き換える³．

推定値 \hat{u} の共分散行列 $V[\hat{u}]$ を次のように定義する．

$$V[\hat{u}] = E[(P_u \hat{u})(P_u \hat{u})^\top] \quad (8)$$

ここに P_u は次の射影行列である (I は単位行列)．

$$P_u = I - uu^\top \quad (9)$$

これを作用させるのは， u が単位ベクトルに正規化されているため，その定義域が \mathcal{R}^6 の単位 (超) 球面であり，これを真値 u における接平面に射影して，その接平面上で誤差を評価するという意味である．

このとき，式 (5) の $\Delta\xi_\alpha$ を期待値 0，式 (7) の共分散行列をもつ独立な正規分布に従うとみなすと， \hat{u} の任意の不偏推定量に対して次の不等式が成り立つ [9, 10, 12]．

$$V[\hat{u}] \succ \sigma^2 \left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha] u)} \right)^- \quad (10)$$

ただし， \succ は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味し， $(\cdot)^-$ は Moore-Penrose の一般逆行列を表す．また $V_0[\xi_\alpha]$ は式 (7) 右辺の行列の部分であり，正規化共分散行列と呼ぶ．Chernov ら [2] は式 (10) の右辺を KCR (Kanatani-Cramer-Rao) 下界 と呼んだ．そして， \hat{u} が不偏推定量でなくても， $\sigma \rightarrow 0$ で $\hat{u} \rightarrow u$ であれば $O(\sigma^4)$ を除いて上式 (10) が成立することを示した．

4. 楕円当てはめの最尤推定

楕円当てはめの最尤推定とは

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha]^- (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (11)$$

³そうしても計算結果はほとんど左右されないことがシミュレーションで確認される．

を拘束条件 $(u, \bar{\xi}_\alpha) = 0, \alpha = 1, \dots, N$ のもとで最小にすることである。これは ξ に対応する 6 次元空間 \mathcal{R}^6 に N 点 $\{\xi_\alpha\}$ が与えられたとき、式 (4) で表される超平面を各点からのマハラノビス距離の二乗和が最小になるように当てはめる問題と解釈できる。

ラグランジュ乗数を導入して拘束条件を除去すれば、式 (11) は次式となる [10, 13]。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} \quad (12)$$

これを最小にする解 \hat{u} の共分散行列 $V[\hat{u}]$ は式 (10) の右辺の KCR の下界に $O(\sigma^4)$ の項を除いて一致する [10, 13]。

式 (12) を最小化するには次式を解けばよい。

$$\begin{aligned} \nabla_u J &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha) \xi_\alpha}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2 V_0[\xi_\alpha]u}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)^2} \\ &= (M - L)u = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 6×6 行列 M, N を次のように置いた。

$$M = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\xi_\alpha \xi_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)}, \quad L = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2 V_0[\xi_\alpha]}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)^2} \quad (14)$$

正規化条件 $\|u\| = 1$ は考慮しなくてよい。なぜなら式 (12) は u の 0 次同次式であり、 u を定数倍しても J の値は変化しないので、 $\nabla_u J$ は u のノルムを変化させる方向 (= u の方向) の成分が 0 だからである。

4.1 FNS 法

Chojnacki ら [3] の FNS 法は次の反復によって式 (13) を解くものである。

1. u の初期値を与える。
2. 式 (14) の行列 M, L を計算する。
3. 固有値問題

$$(M - L)u' = \lambda u' \quad (15)$$

の絶対値最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル u' を計算する。

4. 符号を除いて $u' \approx u$ なら u' を返して、終了する。
5. そうでなければ $u \leftarrow u'$ としてステップ 2 に戻る。

Chojnacki ら [4] は後にステップ 3 で絶対値最小ではなく、最小固有値を選ぶほうが収束性が優れていることを述べている。そこで上記を「オリジナル FNS

法」、最小固有値を用いるものを「改良 FNS 法」と呼ぶ。どのように固有値を選んで、収束時には $\lambda = 0$ である (菅谷ら [18] 参照)。

4.2 HEIV 法

次のように置く。

$$\xi_\alpha = \begin{pmatrix} z_\alpha \\ f_0^2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$V_0[\xi_\alpha] = \begin{pmatrix} V_0[z_\alpha] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

そして、 5×5 行列 \tilde{M}, \tilde{L} を次のように定義する。

$$\tilde{M} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tilde{z}_\alpha \tilde{z}_\alpha^\top}{(v, V_0[z_\alpha]v)}, \quad \tilde{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(v, \tilde{z}_\alpha)^2 V_0[z_\alpha]}{(v, V_0[z_\alpha]v)^2} \quad (18)$$

ただし、次のように置いた。

$$\tilde{z}_\alpha = z_\alpha - \bar{z} \quad (19)$$

$$\bar{z} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{z_\alpha}{(v, V_0[z_\alpha]v)} \bigg/ \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{(v, V_0[z_\beta]v)} \quad (20)$$

すると、式 (13) は次のように書き直せる。

$$\tilde{M}v = \tilde{L}v, \quad (v, \bar{z}) + f_0^2 F = 0 \quad (21)$$

第 1 式を満たす 5 次元単位ベクトル v が求めれば、第 2 式から F が求まり、 u が次のように与えられる。

$$u = N \left[\begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \right] \quad (22)$$

ただし、 $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す。Leedan ら [15] の HEIV 法は式 (21) の第 1 を満たす単位ベクトル v を次の反復法によって計算するものである。

1. v の初期値を与える。
2. 式 (20) の $\bar{z}, \tilde{z}_\alpha$ と式 (18) の行列 \tilde{M}, \tilde{L} を計算する。
3. 一般固有値問題 (解法は菅谷ら [18] 参照)

$$\tilde{M}v' = \lambda \tilde{L}v' \quad (23)$$

の 1 に最も近い固有値 λ に対する単位固有ベクトル v' を計算する。

4. 符号を除いて $v' \approx v$ なら v' を返して終了する。
5. そうでなければ $v \leftarrow v'$ としてステップ 2 に戻る。

しかし, Leedan ら [15] はステップ 3 で 1 に最も近い固有値ではなく, 最小固有値を選ぶほうが収束性が優れていることを述べている. そこで以下では, 上記を「オリジナル HEIV 法」, 最小固有値を用いるものを「改良 HEIV 法」と呼ぶ. どのように固有値を選んで, 収束時には $\lambda = 1$ である (菅谷ら [18] 参照).

4.3 くりこみ法

くりこみ法 [6, 10, 11] は式 (14) の第 2 式の L を次のように近似するものである.

$$L \approx cN, \quad N = \sum_{\alpha=1}^N \frac{V_0[\xi_\alpha]}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)}. \quad (24)$$

そして $M - cN$ が固有値 0 を持つように定数 c を定める. これは次の反復によって計算できる.

1. u の初期値を与え, $c = 0$ と置く.
2. 式 (14) の行列 M と式 (24) の行列 N を計算する.
3. 固有値問題

$$(M - cN)u' = \lambda u' \quad (25)$$

の最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル u' を計算する.

4. $\lambda \approx 0$ なら u' を返して, 終了する.
5. そうでなければ

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(u', Nu')}, \quad u \leftarrow u' \quad (26)$$

と更新してステップ 3 に戻る.

このような反復で得られる解の誤差は理論的には FNS 法, HEIV 法と同じ次数をもつ [13].

4.4 ガウス・ニュートン法

菅谷ら [18] は基礎行列の計算のために式 (11) の J を最小化するガウス・ニュートン法を導入した. これは楕円当てはめでも同じであり, 次のように書ける.

1. u の初期値を与える.
2. 式 (14) の行列 M, L を計算する.
3. u' を次のように計算する.

$$u' = N[u - (P_u M P_u)^-(M - L)u] \quad (27)$$

ただし P_u は式 (9) の射影行列である.

4. $u' \approx u$ なら u' を返して, 終了する.
5. そうでなければ $u \leftarrow u'$ としてステップ 2 に戻る.

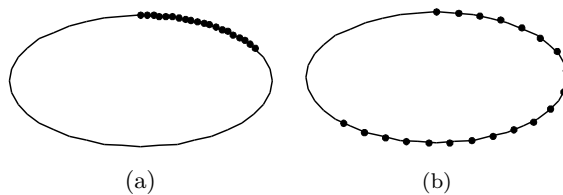


図 1: 楕円弧上の 20 個のデータ点. (a) 短い楕円弧. (b) 長い楕円弧.

5. 初期値の設定

以上はどれも反復法であり, 初期値が必要である. そこで菅谷ら [18] と同様に次の 3 種類を比較する.

5.1 ランダム初期化

平均 0, 標準偏差 1 の正規乱数を独立に 6 個発生させ, それらを成分とするベクトルを単位長に正規化したものを u とする.

5.2 最小二乗法

行列

$$M_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N \xi_\alpha \xi_\alpha^\top \quad (28)$$

の最小固有値に対する単位固有ベクトルを u とする.

5.3 Taubin 法

式 (16) のように置き, 5×5 行列 $\tilde{M}_{LS}, \tilde{N}_{TB}$ を次のように置く.

$$\tilde{M}_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N \tilde{z}_\alpha \tilde{z}_\alpha^\top, \quad \tilde{N}_{TB} = \sum_{\alpha=1}^N V_0[z_\alpha] \quad (29)$$

ただし, 次のように置いた.

$$\tilde{z}_\alpha = z_\alpha - \bar{z}, \quad \bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N z_\alpha \quad (30)$$

そして一般固有値問題 (解法は菅谷ら [18] 参照)

$$\tilde{M}_{LS}v = \lambda \tilde{N}_{TB}v \quad (31)$$

の最小固有値に対応する 5 次元単位固有ベクトルを v を求め, u を式 (22) のように定める.

6. シミュレーション実験

6.1 実験の設定条件

図 1(a), (b) はそれぞれ楕円

$$\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{50^2} = 1 \quad (32)$$

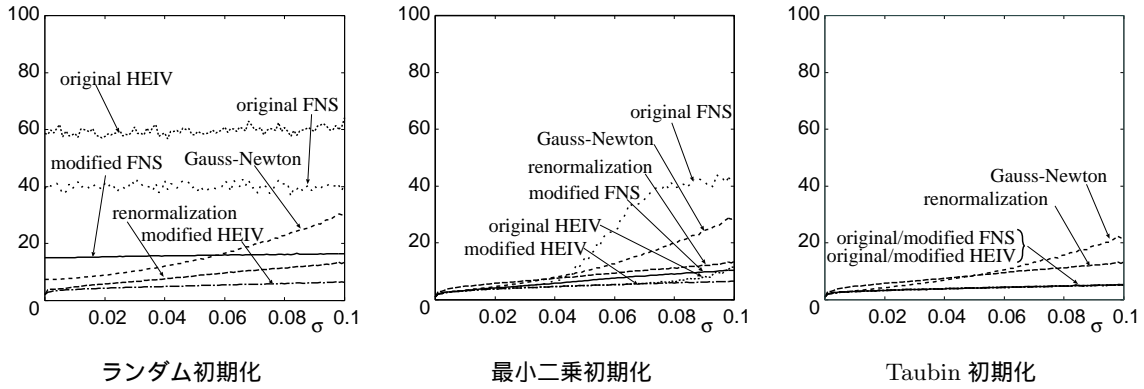


図 2: 図 1(a) の点列への楕円当てはめに対する平均反復回数 .

上に指定した区間に等間隔に $N = 20$ 個の点をとったものである . 各点の x, y 座標に独立に期待値 0, 標準偏差 σ の正規分布に従う誤差を加えたものをデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ とし, FNS 法, HEIV 法, くりこみ法, ガウス・ニュートン法によって楕円の当てはめを行った . 反復の初期値はランダム, 最小二乗法, Taubin 法の 3 種類を比較する . それぞれ誤差の標準偏差 σ を横軸にとり, 各 σ に対して 1000 回独立に試行し, 収束までの反復回数の平均値をプロットした .

反復回数は収束の判定条件に依存するので, すべての手法に対して更新値 u' と前回の反復の値 u が $\|u' - u\| < 10^{-6}$ となったときに終了した⁴ .

実験によると, 当てはめる点が図 1(a) のような短い楕円弧上にある場合と図 1(b) のような長い楕円弧上に分布している場合では挙動が大きく異なるので, 以下別々に調べる .

6.2 短い楕円弧への当てはめ

図 2 は図 1(a) の点列に対する反復回数である . オリジナル FNS/HEIV 法と改良 FNS/HEIV 法を比較すると, 常に改良 FNS/HEIV 法のほうが収束性がよいわかる . そして改良 HEIV 法のほうが改良 FNS 法より収束性がよく, これはランダム初期化に対して顕著である . ランダム初期化ではオリジナル FNS 法では試行回数のほぼ 16%, オリジナル HEIV 法ではほぼ 49% が収束しなかった . その場合は反復を 100 回で打ち切り, 反復回数を 100 と数えた .

このことは, 基礎行列の場合 [18] と同様に説明される . FNS 法と HEIV 法でどのように固有値を選んでも, 収束時点ではそれぞれ 0, 1 となるが, 式 (14) 中の行列 L も式 (18) 中の行列 \tilde{L} も O に近い値とな

⁴ u と $-u$ とは同じ解を表すので, 実際には $\|u' \pm u\|$ の小さいほうを用いた .

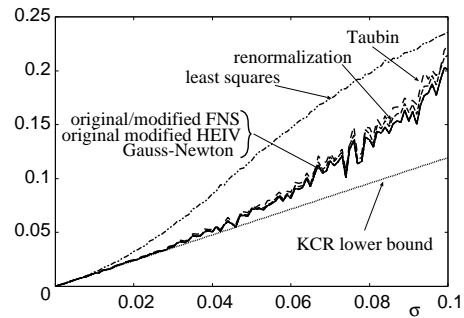


図 3: 図 1(a) の点列への楕円当てはめの各手法の精度 . 横軸は加えた誤差の標準偏差, 縦軸は 1000 回の独立な試行に対する平方平均二乗誤差 .

る . しかし, ランダムに初期値を選ぶと L や \tilde{L} が O からかけ離れた値になる . 式 (15), (23) はそれぞれ次のように書ける .

$$(M - L - \lambda I)u' = 0, \quad (\tilde{M} - \lambda \tilde{L})v' = 0 \quad (33)$$

L も \tilde{L} も正値対称行列であるから, その影響を打ち消すためには第 1 式では λ を負に, 第 2 式では λ を 1 より小さい値を選ぶほうが解に近くなると考えられる .

しかし, 図 2 からわかるように, 最小二乗法やさらに精度が高い Taubin 法から出発すると, オリジナル FNS/HEIV 法と改良 FNS/HEIV 法の差が少なくなる . これも上述の考察から予想されることである .

一方, 初期値が向上すると FNS 法, HEIV 法, およびガウス・ニュートン法の収束性が向上するが, くりこみ法はほとんど変化していない . これも基礎行列の場合 [18] と同様に次のように考えられる .

くりこみ法では式 (25) において $c = 0$ から出発するので, 最初に計算される u は M の最小固有値に対する固有ベクトルであり, 初期値が何であれ最小二乗法の解に近い解が計算される . それに対して,

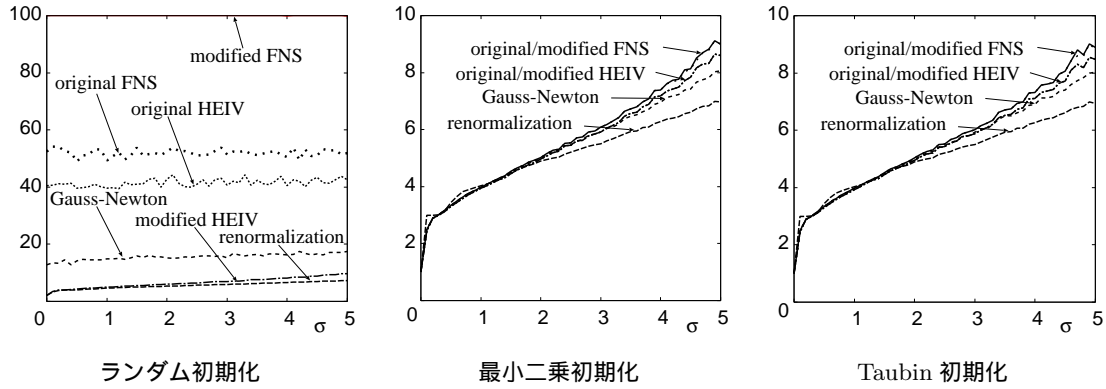


図 4: 図 1(b) の点列への楕円当てはめに対する平均反復回数。

FNS 法と HEIV 法では上述のように、ランダムな初期値に対して L や \tilde{L} が O から離れた値をもつので、計算される u も解から離れる。ガウス・ニュートン法は当然、解に近い値から出発するほど収束しやすくなる。

以上を総合すると、最も収束性が優れているのは初期値によらず改良 HEIV 法である。ただし Taubin 法で初期化すると (オリジナルまたは改良)FNS/HEIV 法の差は見られない。

最後に各手法の精度を比較したものが図 5 である。横軸は加えた誤差の標準偏差 σ であり、縦軸は各 σ に対する独立な 1000 回の試行に対する次の平方平均二乗誤差である。

$$E = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{a=1}^{1000} \|P_u \hat{u}^{(a)}\|^2} \quad (34)$$

ここに、 u は真値、 $\hat{u}^{(a)}$ は a 回目の試行の値である。初期値には Taubin 法を用いた。点線は式 (10) の右辺の KCR 下界から導かれる理論限界である。

図からわかるように、Taubin 法は最小二乗法に比べて非常に高精度である。FNS 法、HEIV 法、ガウス・ニュートン法は同一の関数を最小化するので解も同一であり、誤差が小さいときは KCR 下界にほぼ一致している。くりこみ法もそれに近い解を与えている。

6.3 長い楕円弧への当てはめ

図 4 は図 1(b) の点列に対する結果である。ただし、最小二乗法および Taubin 法を初期値とする場合はすべてが 10 回以内の反復で収束したので、縦軸は 10 までとした。

図 2 と比べると著しい差が見られる。まず、図 2 と

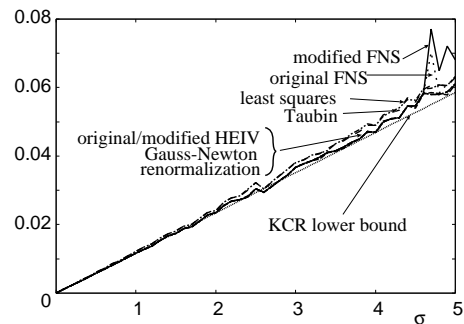


図 5: 図 1(b) の点列への楕円当てはめの各手法の精度。横軸は加えた誤差の標準偏差、縦軸は 1000 回の独立な試行に対する平方平均二乗誤差。

は逆に改良 FNS 法がオリジナル FNS 法に比べて収束性が悪化している。特にランダム初期化では、オリジナル FNS 法が収束しない割合はほぼ 24% だったのに対して改良 FNS 法では常に収束しなかった。

この原因の厳密な解析は現時点では困難であるが、楕円当てはめの特異点と関係があると思われる。長い弧に対する当てはめの特徴は、式 (12) の右辺の総和中のある項が無限大に発散する可能性があることである (その場合も収束回数は 100 と数えて中断した)。これは当てはめようとする楕円の中心にデータ点がある場合に生じる (付録参照)。データ点が厳密に中心になくても、中心に近い場合は計算が不安定になりやすいと考えられる。長い弧ではデータ点の分布する範囲が広がるため、誤差が大きい場合にこのようなことが生じやすいと思われる。

図 4 からわかるように、常に収束性が安定しているのはくりこみ法である。これは、くりこみ法では式 (25) で $c = 0$ とする最小二乗に相当する解から出発し、長い弧では最小二乗解の精度がよいためと考えられる。

一方、ガウス・ニュートン法もくりこみ法に次い



図 6: 円形物体をわずかに含む画像から検出したエッジ画像 (左), および楕円弧をなす 148 点に当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの (右): 細線は最小二乗法, 白線は Taubin 法, 太線は最尤推定解.



図 7: 円形物体を大きく含む画像から検出したエッジ画像 (左), および楕円弧をなす 414 点に当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの (右): 細線は最小二乗法, 白線は Taubin 法, 太線は最尤推定解.

で安定している. これは, FNS 法や HEIV 法では毎回 (通常, または一般) 固有値問題を解くため解が振動する可能性があるのに対して, ガウス・ニュートン法は初期値から滑らかに出発するためと思われる.

図 5 は各手法の精度を図 3 と同様にして比較したものである. このような長い弧に対しては偏差が少ないので, 予想されるように最小二乗法でも十分な精度があり, Taubin 法とほとんど差がない. さらに (オリジナルまたは改良) FNS/HEIV 法, ガウス・ニュートン法, くりこみ法を適用するとすべてがほぼ同じ結果となり, 精度がやや改善され, KCR 下界に非常に近い解が得られる.

7. 実画像実験

図 6 の左は円形物体をわずかに含む画像から岡部ら [16] の方法で検出したエッジ画像である. 右はその楕円弧をなす 148 点に最小二乗法, Taubin 法, および最尤推定で当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したものである. 最尤推定には Taubin 法を初期値としてオリジナル/改良 FNS 法, オリジナル/改良 HEIV 法, ガウス・ニュートン法, くりこみ法を用いたが, いずれも図示すると差のない結果となる. 図 7 は円形物体を大きく含む画像 (414 点) の場合である.

図 6 から, 短い楕円弧の場合は最小二乗法は精度

表 1: 図 6, 7 の楕円当てはめに対する各手法の反復回数.

手法	図 6	図 7
オリジナル FNS 法	5 回	3 回
オリジナル HEIV 法	5 回	3 回
改良 FNS 法	5 回	3 回
改良 HEIV 法	5 回	3 回
ガウス・ニュートン法	5 回	3 回
くりこみ法	7 回	4 回

が低いことがわかる. それに対して Taubin 法の精度はかなり高く, 最尤推定による改良はわずかである. 一方, 長い楕円弧の場合は図 7 からわかるように, 最小二乗法でも十分な精度があり, 手法間にほとんど差が現れない.

これらの反復回数を比較したのが表 1 である. Taubin 法が既に高い精度をもつので, これを初期値として出発するとくりこみ法以外は収束回数に手法の差がない. くりこみ法は実質的に最小二乗解から出発するので, Taubin 法の初期値のよさが活かされず, 反復が 1, 2 回増加していると考えられる.

8. まとめ

本論文では, 画像上の点列に楕円を当てはめる問題を最尤推定として定式化し, その KCR 下界との関係を述べた. 次に, 数値解法として FNS 法, HEIV 法, くりこみ法のアルゴリズムを述べ, ガウス・ニュートン法を追加した. そして, シミュレーションおよび実画像を用いてこれらの反復解法の収束性を実験的に比較した. 初期値はランダムに, 最小二乗法で, および Taubin 法で定める 3 通りで比較した.

その結果, 楕円当てはめの収束性は基礎行列の計算 [18] とは異なり, 当てはめる楕円弧の形状に大きく依存することがわかった. 短い弧に対しては基礎行列の場合 [18] とほぼ同様に, 初期値の誤差が大きいときにはオリジナル FNS/HEIV 法よりも改良 FNS/HEIV 法のほうが収束性に優れていることを示し, その理由を考察した. またくりこみ法は初期値の影響がほとんどないことを示し, その理由を考察した. 全体的には改良 HEIV 法が最も収束性に優れていると結論された.

一方, 長い弧の場合は短い弧の場合と逆に, 改良 FNS 法はオリジナル FNS 法より収束性が悪化することを示し, その理由を考察した. そして, 誤差が非常に大きい場合はくりこみ法が収束性に最も優れ

ていると結論された。

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 17500112) によった。有益な討論を行って頂いた米国 Alabama 大学の Nikolai Chernov 博士, オーストラリア Adelaide 大学の Wojciech Chojnacki 博士に感謝します。

参考文献

- [1] F. J. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Comput. Graphics Image Process.*, **9** (1979) 56–71.
- [2] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47-4** (2004-11), 713–728.
- [3] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11** (2000-11), 1294–1303.
- [4] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, FNS, CFNS and HEIV: A unifying approach, *J. Math. Imaging Vision*, **23-2** (2005-9), 175–183.
- [5] A. Fitzgibbon, M. Pilu and R. B. Fisher, Direct least square fitting of ellipses, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **21-5** (1999-5), 476–480.
- [6] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35-2** (1994-2), 201–209.
- [7] K. Kanatani, Statistical bias of conic fitting and renormalization, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16-3** (1994-3), 320–326.
- [8] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [9] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-8** (1995-8), 1865–1873.
- [10] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.
- [11] 金谷 健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.
- [12] 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- [13] 金谷 健一, くりこみ法の謎を解く, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-149-3 (2005-5), 15–22.
- [14] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Optimal conic fitting and reliability evaluation, *IEICE Trans. Inf. & Sys.*, **E79-D-9** (1996-9), 1323–1328.
- [15] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37-2** (2000-6), 127–150.
- [16] 岡部光生, 金谷健一, 太田直哉, 楕円成長法による円形物体の自動検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J85-D-II-12** (2002-12), 1823–1831.
- [17] P. D. Sampson, Fitting conic sections to “very scattered” data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm, *Comput. Graphics Image Process.*, **18** (1982), 97–108.
- [18] 菅谷保之, 金谷健一, 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告 2006-CVIM-153-32 (2006-3), 207–214.
- [19] G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13-11** (1991-11), 1115–1138.
- [20] 山田純平, 金谷健一, 超精度の楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-151-15 (2005-11), 197–114.

付録: 楕円当てはめの特異点

式 (5) の誤差項 $\Delta\xi_\alpha$ は第 1 近似において次のように書ける。

$$\Delta\xi_\alpha = \frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{x=x_\alpha, y=y_\alpha} \Delta x_\alpha + \frac{\partial\xi}{\partial y}\bigg|_{x=x_\alpha, y=y_\alpha} \Delta y_\alpha \quad (35)$$

仮定より $E[\Delta x_\alpha^2] = E[\Delta y_\alpha^2] = \sigma^2$, $E[\Delta x_\alpha \Delta y_\alpha] = E[\Delta x_\alpha]E[\Delta y_\alpha] = 0$ であるから, 式 (6) の共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ は次のように書ける。

$$V[\xi_\alpha] = \sigma^2 \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\xi^\top}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\xi^\top}{\partial y} \right) \bigg|_{x=x_\alpha, y=y_\alpha} \quad (36)$$

式 (12) の関数 J の特異点は右辺の分母が 0 になるとき, すなわち次の場合に生じる。

$$\left(\mathbf{u}, \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) = \left(\mathbf{u}, \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) \bigg|_{x=x_\alpha, y=y_\alpha} = 0 \quad (37)$$

このようなことが生じるのは

$$\left(\mathbf{u}, \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) = \left(\mathbf{u}, \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) = 0 \quad (38)$$

となる点 (x_α, y_α) が存在する場合である。

ベクトル ξ は式 (3) のように x, y の関数であり, xyz 空間の曲面 $z = (\mathbf{u}, \xi(x, y))$ は上に開いた曲面である。この xy 平面との断面が式 (1) の楕円となる。この楕円の中心はこの曲面が最小値をとる (x, y) である。したがって, その点では

$$\frac{\partial(\mathbf{u}, \xi)}{\partial x} = \left(\mathbf{u}, \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial(\mathbf{u}, \xi)}{\partial y} = \left(\mathbf{u}, \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) = 0 \quad (39)$$

が成り立つ。ゆえに, どれかのデータ点 (x_α, y_α) がベクトル \mathbf{u} の表す楕円の中心にあると式 (12) の関数 J が発散する。