

カーネルウィナーフィルタによるパターン認識

吉野 紘和[†] 山下 幸彦[†]

[†] 東京工業大学大学院理工学研究科, 東京都
E-mail: †{yoshino,yamasita}@ide.titech.ac.jp

あらまし ウィナーフィルタは、線形作用素の中で、観測信号からその原信号と雑音に関する平均 2 乗誤差を最小にする復元信号を与えるものであり、逆問題に広く利用されている。本論文では、パターン認識における識別部に、劣化・画像信号復元の分野で利用されるウィナーフィルタを拡張し、高次元特徴空間に写像することによって、非線形処理が可能になったカーネルウィナーフィルタを応用することを提案する。このとき、識別対象を観測信号と見なし、同じクラスに属す学習データの原信号を同一なものとする。そして、テストデータのクラスをその推定信号に最も近い学習データの原信号が属すクラスに決定する。さらに、カーネル関数における、非線形写像関数の一次近似を考え、観測信号空間での距離に基づく正則化を可能にし、汎化性能を向上させる。

キーワード パターン認識, ウィナーフィルタ, カーネル法, 逆問題

Pattern Recognition by Kernel Wiener filter

Hirokazu YOSHINO[†] and Yukihiro YAMASHITA[†]

[†] Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Ookayama 2-12-1, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan
E-mail: †{yoshino,yamasita}@ide.titech.ac.jp

Abstract Wiener filter is used widely for the inverse problem. From an observed signal, it provides the best restored signal with respect to the square error averaged over the original signal and the noise among linear operators. In this paper, we propose applying the kernel Wiener filter, which enables to handle signals nonlinearly by mapping signals to the high dimensional space with kernel trick, to the recognition part of the pattern recognition problem. Then, we regard a pattern as an observed signal and provide an identical original vector for the patterns belonging to the same class. Finally we classify an unknown pattern into the class of which vector is the nearest in the high dimensional space of the original space. In addition, we apply linear approximation to the kernel function to enable the regularization based on the distance in the observed signal space to enhance its performance of generalization.

Key words pattern recognition, Wiener filter, kernel based method, inverse problem

1. はじめに

逆問題とは工学、理学、医学等の多くの分野で、応答や結果の出力から、原因や入力を推定する問題のことである。その中でとくに線形逆問題は、劣化信号の復元、画像復元を初めとして広い分野に 응용されている [1]。

$\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_o$ を、それぞれ原信号空間、観測信号空間とする。 $f \in \mathcal{H}_s$ で原信号を表し、観測作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_o)$ により観測信号空間の元に変換され、これに雑音 n が加わり、観測信号 $g = Af + n$ が得られるものとする。ここで、 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_o)$ は、 \mathcal{H}_s から \mathcal{H}_o への有界線形作用素の全体である、また、観測信号 g から元の空間の推定信号 \hat{f} を求める作用素を X とする。この関係を式で表すと、

$$g = Af + n \quad (1)$$

$$\hat{f} = Xg \quad (2)$$

となる。この線形逆問題のモデルを図 1 に示す。すなわち、線形逆問題とは観測信号 g から原信号 f に対する最良な推定信号 \hat{f} を求める問題、または、そのための \mathcal{H}_o から \mathcal{H}_s の作用素 X を求める問題と考えることができる。

逆問題のための線形または非線形な様々な逆変換手法が提案されている。そのなかでウィナーフィルタ [2] は、原信号 f と推定信号 $\hat{f} = Xg$ の 2 乗誤差を、原信号と雑音について平均的に最小にする線形逆変換として提案されているものである。逆変換の評価基準には、観測信号空間で「復元の良さ」を評価するものが多いが、ウィナーフィルタにおいては評価基準が原信

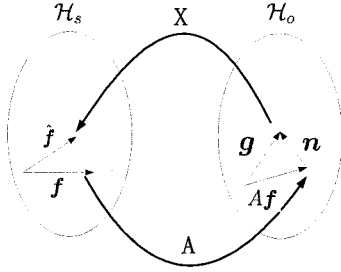


図1 線形逆問題

号と復元信号を、原信号空間で直接的に評価し、またその構成が容易であるという利点を持っており、極めて広い範囲で応用されている。

近年、パターン認識の分野で注目を集めている手法の一つとしてカーネル法がある。カーネル法では、入力となるベクトル空間から非線形写像を用いて高次元ベクトル空間（無限次元も含む）へ写像し、その空間でベクトルの処理を行う。高次元空間での線形処理は、元の空間では非線形処理となり、柔軟な処理が可能となる。また、カーネルトリックにより、写像した先の高次元空間での様々な計算を、直接その空間で計算するのではなく、サンプル数次元の空間で計算することが可能になり、計算コストを減らすことができる。そのため、カーネル法はその応用範囲を広げている。ただし、現実的にはどのような非線形写像に対しても計算量を削減できるわけではなく、それらは計算が容易なマースカーネルから導かれる非線形写像に限られている。

本論文では、ウィナーフィルタにカーネル法を適用し、高次元空間で非線形処理が可能になったカーネルウィナーフィルタ(KWF)を構成し、それをパターン認識に応用する。ここでは、パターン認識における学習・テストデータを観測信号と見なし、同じクラスに属する学習データの観測信号に対して、同一の原信号を与える。2クラス問題における上記モデルを図2に示す。

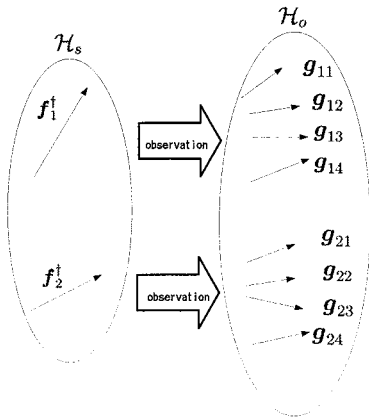


図2 原信号の観測

また、観測信号空間で非線形写像のテラ展開による1次近似を考え、観測信号空間での距離に基づく正規化を行う方法をKWF-2で提案する。

さらに計算機実験により、KWFの有効性を示すとともに、KWF-1とKWF-2を比較することによって観測信号空間の距離に基づく正規化が汎化性能を向上させることを示す。

2. ウィナーフィルタ (WF)

ウィナーフィルタは、復元信号と原信号の、原信号と雑音に関する平均2乗誤差を最小にするものである。\$E_f, E_n\$で、それぞれ、\$f, n\$に関するアンサンブル平均を表す。ベクトル \$f, g\$の内積を \$\langle f, g \rangle\$で、\$f\$のノルムを \$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}\$で表す。このとき、ウィナーフィルタは、以下の評価基準 \$J_{WF}\$を最小にする線形作用素 \$X\$として定義される。

$$J_{WF} = E_f E_n \|\hat{f} - f\|^2 = E_f E_n \|Xg - f\|^2 \quad (3)$$

そして、

$$R = E_f (ff^T) \quad (4)$$

$$Q = E_n (nn^T) \quad (5)$$

は、それぞれ原信号と雑音の相関作用素である。また、作用素 \$A\$の共役作用素を \$A^*\$で表し、\$ABA = A, BAB = B, (AB)^* = AB, (BA)^* = BA\$を満たす \$B\$を \$A\$に対する Moore-Penrose 一般逆と呼び、\$A^\dagger\$で表す。

以上の数学的準備の基にウィナーフィルタ \$X_{WF}\$は、原信号と雑音が無相関であるとすれば、以下の式で与えられる。

$$X_{WF} = RA^*(ARA^* + Q)^\dagger \quad (6)$$

3. カーネルウィナーフィルタ (KWF)

カーネル法では、マースカーネルから導かれる非線形写像 \$\Phi\$を用いて信号を再生核ヒルベルト空間へ写像する。この空間を特徴空間と呼ぶことにする。この特徴空間は一般に元の信号空間の次元より高い次元を持つ。本研究ではマースカーネルとして、以下に示す Gaussian カーネル \$k(x, y)\$を用いる。

$$k(x, y) = \exp(-\gamma\|x - y\|^2) \quad (\gamma > 0) \quad (7)$$

ここで、\$\gamma\$はパラメータである。

3.1 KWF-1

KWF-1においては、雑音 \$n\$を無視する。従ってここでは、カーネルウィナーフィルタ \$X_1\$は以下の評価基準 \$J_{KWF1}\$を最小にするような線形逆変換として表現される。\$\mathcal{H}_o\$を \$N\$次元ベクトル空間とする。実際には、信号に関する母集団平均は標本平均に置き換えることとする。

$$J_{KWF1} = E_f \|\Phi_s(f) - X\Phi_o(g)\|^2 \quad (8)$$

$$\simeq \frac{1}{L} \sum_i^L \|\Phi_s(f_i) - X_1\Phi_o(g_i)\|^2 \quad (9)$$

ここで、\$L\$は学習データ数、\$f_i\$と \$g_i\$はそれぞれ、原信号と観測

信号のサンプルである。また、 Φ_s, Φ_o はそれぞれ、原信号空間、観測信号空間からそれぞれの特徴空間への非線形写像関数である。そのモデルを図3に示す。

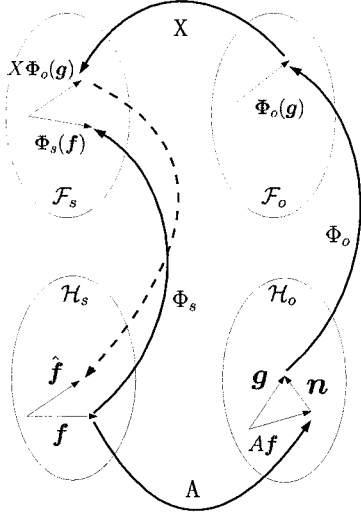


図3 カーネル法を適用した線形逆問題

式(9)より、 X_1 は以下のように求まる。

$$X_1 = \sum_{i=1}^L \Phi_o(f_i) \Phi_o(g_i)^T \left[\sum_{j=1}^L \Phi_o(g_j) \Phi_o(g_j)^T \right]^\dagger \quad (10)$$

ここで

$$U \equiv \sum_{j=1}^L \Phi_o(g_j) \Phi_o(g_j)^T \quad (11)$$

とし、 $S \equiv U^\dagger$ を求めるために実数 $h_{ij} \in \mathbf{R}$ ($1 \leq i, j \leq L$)に対して、 S を以下のようにおく。

$$S = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_{ij} \Phi_o(g_i) \Phi_o(g_j)^T \quad (12)$$

また $(L \times L)$ 行列、 H, K_g をそれぞれ次のように定義する。

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1L} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L1} & \dots & \dots & h_{LL} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$K_g = \begin{bmatrix} k_o(g_1, g_1) & k_o(g_1, g_2) & \dots & k_o(g_1, g_L) \\ k_o(g_2, g_1) & k_o(g_2, g_2) & \dots & k_o(g_2, g_L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_o(g_L, g_1) & \dots & \dots & k_o(g_L, g_L) \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} k_o(x, y) &= \Phi_o(x)^T \Phi_o(y) \\ &= \exp(-\gamma \|x - y\|^2) \end{aligned} \quad (15)$$

である。ここで式(12)に対して次の h_{ij} に関する等式を考える。

$$\begin{aligned} \Phi_o(g_i)^T S U \Phi_o(g_m) &= \Phi_o(g_i)^T \Phi_o(g_m) \\ &= k_o(g_i, g_m) \quad (1 \leq i, m \leq L) \end{aligned} \quad (16)$$

この $k_o(g_i, g_m)$ は、

$$k_o(g_i, g_m) = \begin{bmatrix} k_o(g_1, g_m) \\ k_o(g_2, g_m) \\ \vdots \\ k_o(g_L, g_m) \end{bmatrix}^T K_g H \begin{bmatrix} k_o(g_1, g_i) \\ k_o(g_2, g_i) \\ \vdots \\ k_o(g_L, g_i) \end{bmatrix} \quad (17)$$

と表すことができるので、これを解き、

$$H = K_g^\dagger K_g^\dagger \quad (18)$$

を得る。 K_g に正則化項 $e_1 I$ を加え、 K_g の一般逆 K_g^\dagger を以下のように近似する。

$$K_g^\dagger \simeq (K_g + e_1 I)^{-1} \quad (19)$$

ここで I は $(L \times L)$ の単位行列で、 $e_1 (> 0)$ は正則化パラメータである。

得られた H より S が求まる。未知のデータ g に対してクラス t ($1 \leq t \leq M$)に属する全ての観測信号 g_i の原信号 f_i を、 $f_i = f_t^\dagger$ とする。未知データの高次元空間におけるクラス t の原信号 f_t^\dagger との2乗誤差は以下の $d_t(g)$ で与えられる。

$$\begin{aligned} d_t(g) &\equiv \|\Phi_s(f_t^\dagger) - X \Phi_o(g)\|^2 \\ &= k_s(f_t^\dagger, f_t^\dagger) - 2 \begin{bmatrix} k_o(g_1, g) \\ k_o(g_2, g) \\ \vdots \\ k_o(g_L, g) \end{bmatrix}^T H K_g \begin{bmatrix} k_s(f_t^\dagger, f_1) \\ k_s(f_t^\dagger, f_2) \\ \vdots \\ k_s(f_t^\dagger, f_L) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし

$$k_o(x, y) = \Phi_o(x)^T \Phi_o(y) \quad (21)$$

である。

未知データ g は $d_t(g)$ を最も小さくするクラスへ分類するので、決定関数 $D_1(g)$ は式(22)で表現される。

$$D_1(g) = \arg \min_t [d_t(g)] \quad (22)$$

3.2 KWF-2

KWF-2においては、評価基準 J_{KWF2} を式(23)で与える。すなわち観測信号に雑音 $n_i = \{n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iN}\}$ が加わっていることを仮定し、カーネルウィナーフィルタの汎化性能を向上させることを考える。

$$J_{KWF2} = E n \sum_i \|\Phi_s(f_i) - X_2 \Phi_o(g_i + n_i)\|^2 \quad (23)$$

ここで、原信号と雑音 \mathbf{n} は独立とし、雑音の各要素は平均が 0 で、他の要素と無相関であるとする。従って、雑音の i 番目の要素の分散を σ_i^2 で表せば、 $Q = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2)$ と表すことができる。 \mathcal{H}_o を N 次元ベクトル空間とし、ベクトル \mathbf{x}_i についてスカラー x_{ij} は j 番目の要素を表すこととする。

式 (23) のままでは Φ_o が非線形であり、 $\Phi_o(\mathbf{g}_i + \mathbf{n}_i)$ を分解できないため、雑音に関しても標本平均を考えなくては行けない。従って、カーネルトリックを用いても非常に大きな次元の空間での計算が必要となる。そこで \mathbf{g}_i が \mathbf{n}_i に比べて十分大きいとして、以下の一次近似を行い、計算を簡略化する [3]。

$$\Phi_o(\mathbf{g} + \mathbf{n}) \simeq \Phi_o(\mathbf{g}) + \sum_{i=1}^N n_i \phi_{o,i}(\mathbf{g}) \quad (24)$$

これを代入すると、式 (23) は

$$\begin{aligned} J_{KWF2} &\simeq \sum_i^L \|\Phi_s(\mathbf{f}_i) - X_2 \Phi_o(\mathbf{g}_i) - X_2 \sum_j^N n_{ij} \phi_{o,j}(\mathbf{g}_i)\|^2 \\ &= \sum_i^L \{\|\Phi_s(\mathbf{f}_i)\|^2 + \|X_2 \Phi_o(\mathbf{g}_i)\|^2 \\ &\quad + E\mathbf{n} \|X_2 \sum_l^N n_{il} \phi_{o,l}(\mathbf{g}_i)\|^2 \\ &\quad - 2\langle \Phi_s(\mathbf{f}_i), X_2 \Phi_o(\mathbf{g}_i) \rangle \\ &\quad - 2E\mathbf{n} \langle \Phi_s(\mathbf{f}_i), X_2 \sum_l^N n_{il} \phi_{o,l}(\mathbf{g}_i) \rangle \\ &\quad + 2E\mathbf{n} \langle X_2 \Phi_o(\mathbf{g}_i), X_2 \sum_l^N n_{il} \phi_{o,l}(\mathbf{g}_i) \rangle \} \quad (25) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\phi_{o,i}(\mathbf{g}_i) \equiv \frac{\partial \Phi_o(\mathbf{g}_i)}{\partial \mathbf{g}_{i1}} \quad (26)$$

である。また、第 1 項は X_2 に依存せず、第 5, 6 項は 0 となるので、次の J' を最小にすればよい。

$$\begin{aligned} J' &= \sum_i^L \{\|X_2 \Phi_o(\mathbf{g}_i)\|^2 + E\mathbf{n} \|X_2 \sum_l^N n_{il} \phi_{o,l}(\mathbf{g}_i)\|^2 \\ &\quad - 2\langle \Phi_s(\mathbf{f}_i), X_2 \Phi_o(\mathbf{g}_i) \rangle \} \quad (27) \end{aligned}$$

この $\phi_{o,i}(\mathbf{g})$ は $\Phi_o(\mathbf{g})$ と同じ次元のベクトルになるため、実際には計算することが困難である。そこで、この関数に関係する内積をカーネル関数の微分を使って表すことにする。 $k_{o,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $k_o^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $k_{o,ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を以下のように定義する。

$$k_{o,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle \Phi_o(\mathbf{x}), \phi_{o,i}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\partial}{\partial y_i} k_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (28)$$

$$k_o^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle \phi_{o,i}(\mathbf{x}), \Phi_o(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} k_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (29)$$

$$k_{o,ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle \phi_{o,i}(\mathbf{x}), \phi_{o,j}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} k_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (30)$$

KWF-2 を現実的に計算するためには、上記の $\Phi_s, \Phi_o, \phi_{o,i}$ 等を使うことなく、式 (27) や識別関数をカーネル関数とその微分形を用いて計算できるようにする必要がある。

作用素 X_2 は次のように置くことができる。

$$X_2 = \sum_i^L \sum_j^{L(N+1)} \alpha_{ij} (\Phi_o(\mathbf{f}_i) \otimes \overline{\nu_j}) \quad (31)$$

$$\nu_i = \begin{cases} \Phi_o(\mathbf{g}_i) & (1 \leq i \leq L) \\ \varphi_{i-L} & (L+1 \leq i \leq L(N+1)) \end{cases} \quad (32)$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \phi_{o,1}(\mathbf{g}_i) & (1 \leq i \leq L) \\ \phi_{o,2}(\mathbf{g}_{i-L}) & (L+1 \leq i \leq 2L) \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{o,N}(\mathbf{g}_{i-(N-1)L}) & ((N-1)L+1 \leq i \leq NL) \end{cases} \quad (33)$$

これを J' に代入すれば、

$$\begin{aligned} J' &= \sum_i^L \left\{ \left\| \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L(N+1)} \alpha_{jk} (\Phi_o(\mathbf{g}_i), \nu_k) \right\|^2 \right. \\ &\quad + E\mathbf{n} \left\| \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L(N+1)} \sum_{l=1}^N n_{il} \alpha_{jk} \langle \phi_{o,l}(\mathbf{g}_i), \nu_k \rangle \Phi_s(\mathbf{f}_i) \right\|^2 \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{L(N+1)} \alpha_{jk} \langle \Phi_s(\mathbf{f}_i), \mathbf{f}_j \rangle \cdot \langle \nu_k, \Phi_o(\mathbf{g}_i) \rangle \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

となる。ここで、式 (34) を計算するために、以下のベクトルと行列を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{g}) &= [k_o(\mathbf{g}, \mathbf{g}_1), \dots, k_o(\mathbf{g}, \mathbf{g}_L), \\ &\quad k_{o,1}(\mathbf{g}, \mathbf{g}_1), \dots, k_{o,1}(\mathbf{g}, \mathbf{g}_L), \\ &\quad \dots, \\ &\quad k_{o,N}(\mathbf{g}, \mathbf{g}_1), \dots, k_{o,N}(\mathbf{g}, \mathbf{g}_L)]^T \quad (35) \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(L(N+1))} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{L1} & \dots & \alpha_{L(L(N+1))} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_s(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) & \dots & k_s(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_s(\mathbf{f}_L, \mathbf{f}_1) & \dots & k_s(\mathbf{f}_L, \mathbf{f}_L) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} k_o(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) & \dots & k_o(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_o(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_1) & \dots & k_o(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_L) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\tilde{K}_j = \begin{bmatrix} k_{o,j}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) & \dots & k_{o,j}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{o,j}(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_1) & \dots & k_{o,j}(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_L) \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\tilde{K}^j = \begin{bmatrix} k_o^j(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) & \dots & k_o^j(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_o^j(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_1) & \dots & k_o^j(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_L) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\tilde{K}_{ij} = \begin{bmatrix} k_{o,ij}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) & \dots & k_{o,ij}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{o,ij}(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_1) & \dots & k_{o,ij}(\mathbf{g}_L, \mathbf{g}_L) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$K = [\tilde{K} \quad \tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2 \quad \dots \quad \tilde{K}_N] \quad (42)$$

$$K_j = \sigma_j [\tilde{K}^j \quad \tilde{K}_{j1} \quad \tilde{K}_{j2} \quad \dots \quad \tilde{K}_{jN}] \quad (43)$$

以上の行列を用ると J' は次のように表すことができる。

$$J' = \text{tr} [KB^T K_1 B K^T] + \sum_{j=1}^N \text{tr} [K_j B^T K_1 B K_j^T] - 2\text{tr} [KB^T K_1] \quad (44)$$

これを B に関して変分すると、

$$J'(B + (\delta B)) - J'(B) = \text{tr} [K(B + (\delta B))^T K_1 (B + (\delta B)) K^T] + \sum_{j=1}^N K_j (B + (\delta B))^T K_1 (B + (\delta B)) K_j^T - 2K(B + (\delta B)) K_1 - J'(B) \quad (45)$$

となり、さらに (δB) に関する 2 次の項を無視すれば、

$$\delta J' \equiv J'(B + (\delta B)) - J'(B) \simeq \text{tr} [KB^T K_1 (\delta B) K^T + K (\delta B)^T K_1 B K^T] + \sum_{j=1}^N (K_j B^T K_1 (\delta B) K^T + K_j (\delta B)^T K_1 B K_j^T) - 2K(\delta B) K_1$$

となる、ここで $K_1 = K_1^T$ より、

$$\delta J' = 2 \text{tr} [(\delta B)^T K_1 B K^T K] + \sum_{j=1}^N (\delta B)^T K_1 B K_j^T K_j - (\delta B)^T K_1 K] \quad (46)$$

であるので、

$$K_1 B (K^T K + \sum_{j=1}^N K_j^T K_j) = K_1 K \quad (47)$$

が成立するとき $J'(B)$ は最小になる。これを解くと、

$$B = K(K^T K + \sum_{j=1}^N K_j^T K_j)^{\dagger} \quad (48)$$

となる。従って未知のベクトル \mathbf{g} に対して

$$X_2 \Phi_o(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \alpha_{ij} \langle \Phi_o(\mathbf{g}), \nu_j \rangle \Phi_s(\mathbf{f}_i) = \begin{bmatrix} \Phi_s(\mathbf{f}_1) \\ \vdots \\ \Phi_s(\mathbf{f}_L) \end{bmatrix}^T Bh(\mathbf{g}) \quad (49)$$

と表すことができる。

従って、クラス $t (= 1, \dots, M)$ に属する任意の学習データの原信号ベクトルを \mathbf{f}_t^{\dagger} とすれば、KWF-2 の識別関数 $D_2(\mathbf{g})$ は

$$D_2(\mathbf{g}) = \arg \max_t \left(2 \begin{bmatrix} k_s(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1^{\dagger}) & \dots & k_s(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_M^{\dagger}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_s(\mathbf{f}_L, \mathbf{f}_1^{\dagger}) & \dots & k_s(\mathbf{f}_L, \mathbf{f}_M^{\dagger}) \end{bmatrix}^T Bh(\mathbf{g}) - \begin{bmatrix} k_s(\mathbf{f}_1^{\dagger}, \mathbf{f}_1^{\dagger}) \\ \vdots \\ k_s(\mathbf{f}_M^{\dagger}, \mathbf{f}_M^{\dagger}) \end{bmatrix} \right) \quad (50)$$

となる。

4. 計算機実験

KWF-1, KWF-2 についてそれぞれ計算機実験を行った。また KWF-2 の X_2 を構成するためには、 $L(N+1)$ 次正方行列の一般逆行列の計算が必要になる。これは、原信号の標本点数と観測信号空間の積であり、信号空間の次元が高いときには、非常に大きな値になる。この計算を容易にするため、本実験では X_2 に含まれる $\phi_{o,i}(\mathbf{f}_i)$ の影響を無視した近似 X_2 を用いた。これは $K = \tilde{K}, K_j = \sigma_j \tilde{K}^j$ と置くことにより得られる。

式 (22), 式 (50) より、原信号の特微空間における原信号ベクトル同士のカーネル関数の計算は実際には行う必要は無く、その内積だけを与えればよい。($M=3$) の時のモデルを図 4 に示す。特微空間における $\Phi_s(\mathbf{f}_1^{\dagger})$ と $\Phi_s(\mathbf{f}_j^{\dagger})$ が成す角を θ_{ij} とす

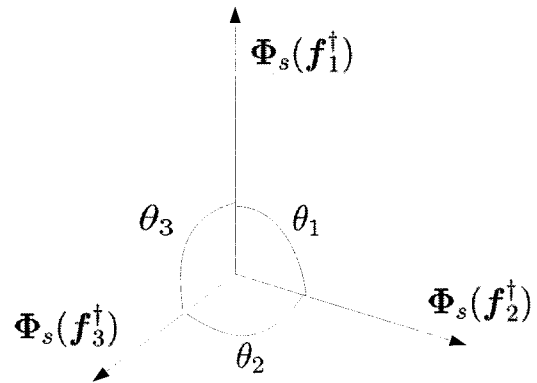


図 4 特微空間における原信号ベクトルの内積 ($M=3$)

れば、

表 1 計算機実験結果

Dataset Name	error rate	error rate	error rate	KWF-1	KWF-1	KWF-2	KWF-2
	SVM	KWF-1	KWF-2	γ	e_1	γ	σ
banana	11.53 ± 0.66	10.38 ± 0.45	10.29 ± 0.43	3.0×10^0	1.0×10^0	7.0×10^{-1}	2.25×10^{-2}
breast cancer	26.04 ± 4.47	25.05 ± 4.04	24.49 ± 4.29	1/3	5.0×10^0	5.0×10^{-3}	4.9×10^{-1}
diabetis	23.53 ± 1.73	23.04 ± 1.79	22.97 ± 1.83	1/30	1.0×10^0	2.0×10^{-2}	1.0×10^{-8}
flare solar	32.43 ± 1.82	33.48 ± 1.62	33.26 ± 1.76	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-1}	3.0×10^{-4}	2.25×10^{-2}
german	23.61 ± 2.07	23.50 ± 2.19	23.63 ± 2.24	1/30	1.0×10^0	2.0×10^{-2}	9.0×10^{-4}
heart	15.95 ± 3.26	16.38 ± 3.59	15.53 ± 3.12	1.0×10^{-1}	5.5×10^0	5.0×10^{-5}	8.1×10^{-3}
image	2.96 ± 0.60	2.79 ± 0.56	2.80 ± 0.52	1/15	1.0×10^{-3}	1.5×10^{-1}	1.0×10^{-8}
ringnorm	1.66 ± 0.12	4.00 ± 0.51	3.23 ± 0.50	1/30	1.0×10^{-1}	3.5×10^{-2}	7.2×10^{-1}
splice	10.88 ± 0.66	10.85 ± 0.70	10.83 ± 0.67	2.0×10^{-2}	1.0×10^{-4}	2.0×10^{-2}	1.09×10^{-1}
thyroid	4.80 ± 2.19	4.13 ± 2.04	4.13 ± 2.26	2.0×10^{-1}	1.0×10^{-1}	1.55×10^0	1.7×10^{-2}
titanic	22.42 ± 1.02	22.65 ± 0.73	22.36 ± 1.00	1.0×10^0	5.0×10^0	5.0×10^0	1.0×10^{-10}
twonorm	2.96 ± 0.23	2.38 ± 0.13	2.35 ± 0.11	1/15	5.0×10^0	7.0×10^{-6}	2.5×10^{-5}
waveform	9.88 ± 0.43	9.54 ± 0.49	9.50 ± 0.35	1.0×10^{-1}	1.0×10^0	3.5×10^{-2}	2.03×10^{-1}

カーネル関数の値は以下ようになる。

$$k_s(\mathbf{f}_i^{\dagger}, \mathbf{f}_j^{\dagger}) = \Phi_s(\mathbf{f}_i^{\dagger})^T \Phi_s(\mathbf{f}_j^{\dagger}) = \Phi_s(\mathbf{f}_i^{\dagger}) \Phi_s(\mathbf{f}_j^{\dagger}) \cos \theta_{ij} \quad (51)$$

今回の計算機実験では 2 クラス間距離だけを扱うので $\|\Phi_s(\mathbf{f}_i^{\dagger})\|^2 = 1$, $\theta = \pi$ とした。プログラミング言語は octave を用いた。 $\sigma_i = \sigma(\forall i)$ とし、パラメータ γ , e_1 , σ は 5 フォールドクロスバリデーションで決定した。表 1 にその誤認識率を示す。また、各データセットにおいて、最も誤認識率の低かったものを太字で示す。

KWF を用いた識別機はサポートベクターマシン (SVM) に対して 13 個のデータセットのうち、11 個でその優位性を示した。また、観測信号空間での距離に関する正規化を施した KWF-2 は、KWF-1 に対して 13 データセット中、10 データセットでより良い結果を示した。そうではなかった 3 つのデータセット german, image, thyroid に関しても KWF-2 は KWF-1 とほぼ同等の性能を示した。

5. おわりに

本論文ではウィナーフィルタにカーネル法を適用したカーネルウィナーフィルタを用いたパターン認識手法を提案し、その有効性を示した。また観測信号空間での距離に基づく正規化により、その汎化性能を向上させた。今後の課題としては、識別機を多クラスに対応させること、原信号の特徴空間での内積を普遍的に決定することなどが挙げられる。

文 献

- [1] 小川 英光, “講座: 信号と画像の復元,” “電子情報通信学会誌, vol.71, no.5-8, pp.491-497, 593-601, 739-748, 828-835, May-Oct. 1988.
- [2] H. Ogawa and E. Oja, “Projection filter, Wiener filter and Karhunen-Loeve subspace in digital image restoration,” J. Math. Anal. Appl., vol.114, no.1, pp.37-51, Feb. 1986.
- [3] 赤穂 昭太郎, “入力空間でのマージンを最大化するサポートベクターマシン,” “電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J86-D-II, no.7, pp.934-942, July 2003.

- [4] 鷲沢 嘉一, 山下 幸彦, “カーネルウィナーフィルタ,” 第 6 回情報論的学習理論ワークショップ, pp.143-148, 電子情報通信学会, Nov. 2003.
- [5] 鷲沢 嘉一, 山下 幸彦, “カーネルウィナーフィルタ,” 電子情報通信学会誌, vol.103, no.733, pp.73-78, 2003.
- [6] S. Abe, *Support Vector Machine for Pattern Classification*, Springer, 2005.
- [7] Y. Washizawa and Y. Yamashita, “Non-linear Wiener filter in reproducing kernel Hilbert space,” *icpr*, pp.967-970, 18th International Conference on Pattern Recognition(ICPR'06), 2006.
- [8] 荷見 守助, 関数解析入門, 第 2 版, Tokyo: UCHIDA ROKAKUHO PUBLISHING CO., LTD, 2006.