

球面エピポーラ幾何学における再投影誤差

藤木 淳[†] 鳥居 秋彦^{††}

球面画像に対してエピポーラ幾何学を計算するときの誤差評価関数として再投影誤差の二乗和が最小となるように推定されるが、球面上の図形に対してであるにもかかわらず、再投影誤差として3次元距離が用いられることが多い。しかし、球面上の図形に対する誤差であるから球面上で定義される量に従って定義されることが望ましい。そこで本稿では、測地線に沿う距離、エピポーラ大円を子午線とみなしたときの経度差および緯線に沿う距離の3つの球面上で定義される距離として提案する。そしてこれらの距離を再投影誤差として基本行列を計算し、それらの結果および、3次元距離を再投影誤差とみなす8点アルゴリズムによる結果を人工データの3次元復元誤差によって評価する。

Reprojection error on spherical epipolar geometry

JUN FUJIKI[†] and AKIHIKO TORII^{††}

To compute an epipolar geometry for spherical images, error evaluation function, which is defined as the sum of squares of reprojection errors, is minimized. Because of spherical image is the set of spherical data, reprojection error should be measured by not three dimensional distance but the quantities defined on sphere. In this paper, three types of distance is defined as the reprojection error. The distances are distance along geodesic, difference of longitude and difference along colatitude, which are defined by the quantities on sphere. The essential matrix is computed by the three types of reprojection error, and the performances are evaluated by comparing to the eight point algorithm under three dimensional reconstruction error of synthetic data.

1. はじめに

複数の2次元画像からカメラ運動と対象物体の立体形状を同時に復元する問題はコンピュータビジョンにおいて基本的かつ重要な問題であり、その問題の1つとしてピンホールカメラにおける透視射影のエピポーラ幾何学^{5),10)}が研究されてきた。

その一方で、近年、全方位カメラを用いたコンピュータビジョンの重要性が増しており、中心反射屈折光学系 (central-catadioptric)^{1),2)}、中心屈折光学系 (central-dioptic)¹⁷⁾などの広視野のカメラに対するエピポーラ幾何学が研究されてきた³⁾。全方位カメラを用いると、ピンホールカメラに比べ、2枚の画像が得られたときの共通視野が広く、対応点が全方位画像の広範囲に様に分布することが期待できることか

らより多くの対応点を得ることができる可能性がある。

全方位カメラのうち、カメラ中心をもつものを中心射影型全方位カメラ (central-omnidirectional camera)と呼ぶことにすると、中心射影型全方位カメラは鏡や屈折器等で構成されているため、ピンホールカメラとは異なった座標表現となる。そのため、中心射影型全方位カメラの内部パラメータの推定手法として中心射影型全方位カメラのエピポーラ幾何学が提案されてきた^{8),15),17)}。そして中心射影型全方位カメラの内部パラメータが推定されると、これらカメラは球面カメラ^{8),17)}として統一的に議論できる。

透視射影に基づくピンホールカメラでは画像面上の点は同次座標の第3座標が焦点距離に一致したものとなるが、球面透視射影に基づく球面カメラにおいては、画像面上の点は同次座標を長さが1となるように正規化したものと捉えることができる。つまり同一点のピンホールカメラの画像座標と、球面カメラの球面画像座標は同じ同次座標を持ち、その違いは長さだけとなる。そのため、ピンホールカメラと球面カメラにおける幾何学的特性の本質は同じである。具体的には、エピポーラ方程式 (epipolar equation) は同次座標

[†] 産業技術総合研究所
National Institute of Advanced Industrial Science and Technology

^{††} Center for Machine Perception, Department of Cybernetics Faculty of Elec. Eng., Czech Technical University in Prague, Karlovo nám. 13, 121 35 Prague, Czech Republic

に関する拘束条件であるから、球面カメラのエピポーラ方程式はピンホールカメラのエピポーラ方程式と完全に同じ表現となる⁴⁾。つまり、**8点法 (8-point algorithm)**を含め、校正されたピンホールカメラにおける**基本行列 (essential matrix)**の推定手法は基本的に球面カメラに対して適用可能である。

しかし本稿では、球面画像が球面データであることを利用して、平面画像の場合とは異なる誤差関数を利用して基本行列を推定する。誤差関数は、主に誤差をどう測るかということと、関数の誤差を変数とした表現の2点によって決定される。本稿では誤差関数の最小化を安定させるための正則化項やデータの構造から導かれる拘束条件については考えないことにする。

この誤差関数として一般的なものは、最小二乗基準によるユークリッド距離最小化である。名前の通り、データとモデルの距離である誤差をユークリッド距離で測り、その誤差の二乗和を最小 (**最小二乗基準; least squares criterion**) にする。

一般に最小二乗基準は**外乱値 (outlier)**の影響を受け易く、外乱値に対して**頑健な推定 (robust estimation)**を行なうために**最小二乗中央値推定 (LMedS; least median of squares)**¹⁴⁾や、様々な種類の **M -推定**が提案されている。一般に **M -推定**等の頑健性を持つ推定には**局所最小解 (local minimum)**が存在することが多い。そこで、頑健性には乏しいという潜在的な欠点を持つが、局所最小解が存在しない **L_∞ 距離 (L_∞ -norm)**の最小化¹²⁾、つまり**ミニマックス (minimax) 基準**が提案されている。

また、ピンホールカメラにおいて頻繁に用いられている再投影誤差はエピポーラ拘束の**代数的誤差***や**画像座標とエピポーラ直線との距離****であり、他に画像座標に等方のガウス雑音が添加されていると仮定した場合の**事後確率最大化 (MAP; maximum a posterior)**に対応する誤差¹⁶⁾も提案されている。これらはエピポーラ拘束などの拘束条件の下で画像座標の観測値と推定値の距離の最小化 (**最適三角測量; optimal triangulation**) 問題として統一化される^{12),13)}。

球面カメラにおいて最も用いられる再投影誤差は**測地線に沿う距離 (distance along geodesic)**¹¹⁾でありデータ点と推定値のなす角度である。これは球面上で定義される最も自然な距離であるが、本稿ではエピポーラ幾何学を求めるために良く用いられるデータとモデルの距離である**再投影誤差 (reprojection**

error)を再検討する。具体的には、測地線に沿う距離以外に、球面画像の**偏位修正 (rectification)**に基づいて定義される、エピポールを極としたときの**経度差 (difference of longitude)**⁷⁾、**補緯度**に沿う**弧長 (arc length along colatitude)**⁶⁾を再投影誤差とした評価関数を用いて基本行列を推定する。そして基本行列から復元される3次元形状の復元誤差を利用して各再投影誤差を比較する。

その結果球面カメラ画像の偏位修正に基づいた再投影誤差が良い復元結果を導くことが人工データを用いた数値実験により確認できた。なお本稿では誤差関数を最小二乗基準で最小化し、 **M -推定基準**や **L_∞ 距離基準**を用いた場合については今後の課題とする。

2. 球面カメラとそのエピポーラ幾何学

本稿で用いる球面カメラは校正済みであるとし、球の半径を1とする。このとき、球面カメラは3次元空間上の点 X_p から2次元単位球面上の3次元座標が点 z_p である点への写像

$$z_p = \frac{1}{\|X_p\|} X_p \quad (1)$$

と表現される (図1)。球面カメラ座標は、単位球面

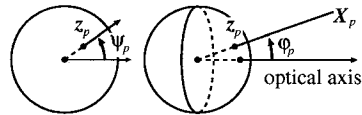


図1 球面カメラ座標。球面画像座標 z_p の経度 (左)、補緯度 (右)

と光軸の交点を北極 $\mathcal{N} = (0, 0, 1)^T$ としたときの**補緯度 (colatitude) $\phi_p \in [0, \pi]$** と**経度 (longitude) $\psi_p \in (-\pi, \pi]$** の2パラメータで表現され、その3次元ユークリッド座標 z_p は

$$z_p = (\sin \phi_p \cos \psi_p, \sin \phi_p \sin \psi_p, \cos \phi_p)^T \quad (2)$$

と表現される。つまり球面画像座標は極座標において動径の長さを1としたものである。ここで z_p から補緯度 ϕ_p と経度 ψ_p は次のように求まる:

$$\phi_p = \cos^{-1} z_p, \quad (3)$$

$$\psi_p = \text{sgn}(y_p) \times \cos^{-1} \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}. \quad (4)$$

さて、第1節で述べたように中心射影のカメラは球面カメラを用いて統一的に表現でき^{8),17)}、ピンホールカメラも例外ではない。校正されたピンホールカメラの画像座標は球面カメラ座標を**晷針射影 (gnomonic projection)**したもの (図2) であり、

* 第2節の $\hat{y}_{1p}^T E_{12} \hat{y}_{2p}$ の値そのものこと。

** これは代数的誤差に重みを付けたものとなる。

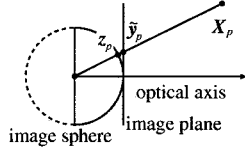


図2 球面カメラ座標とピンホールカメラ座標の関係

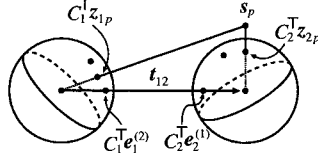


図3 球面カメラのエピポラ幾何学

球面画像座標が式(2)である点はピンホールカメラの画像座標が $y_p = (\tan \phi_p \cos \psi_p, \tan \phi_p \sin \psi_p)^T$ である点と一対一に対応する。つまり z_p と y_p の関係は

$$z_p = \frac{1}{\|y_p\|} \tilde{y}_p, \quad \tilde{y}_p = \frac{1}{(z_p)_3} z_p \quad (5)$$

と表現される。ここで $\tilde{y}_p = (y_p^T, 1)^T$ であり、 $(z_p)_3$ は z_p の第3成分である。

さて、 z_{1p} 及び z_{2p} をそれぞれ X_p を第1及び第2球面カメラへ射影したときの球面画像座標であるとする。また、行列 C_1 及び C_2 をそれぞれ球面カメラ座標を世界座標に変換する際の回転部分を表す行列とする。このときピンホールカメラには $\tilde{y}_{1p}^T E_{12} \tilde{y}_{2p} = 0$ ($E_{12} = C_1 [t_{12}] \times C_2^T$) というエピポラ方程式が成立するので、式(5)により、球面カメラに対してもピンホールカメラと同様のエピポラ拘束

$$z_{1p}^T E_{12} z_{2p} = 0 \quad \text{where} \quad E_{12} = C_1 [t_{12}] \times C_2^T \quad (6)$$

が存在する⁴⁾ (図3)。球面カメラに対してもピンホールカメラと同様に E_{12} 及び式(6)を基本行列及びエピポラ方程式と呼ぶ。ここで例えば第1球面画像から特徴点 z_{1p} を選んだとき、方程式 $(z_{1p}^T E_{12}) z = 0$ は第2球面画像における大円を表す。この大円をエピポラ大円 (epipolar great circle) と呼ぶ。エピポラ大円は $E_{12} e_2^{(1)} = 0$ をみたま第2球面画像上の第1球面カメラのエピポール (epipole) と呼ばれる点を必ず通る。これは第2球面画像上の第1球面カメラ中心の像である。同様に第1球面画像上の第2球面カメラのエピポールが $e_1^{(2)T} E_{12} = 0$ によって定まり、これは第1球面画像上の第2球面カメラ中心の像である。これらエピポールの表現は

$$e_1^{(2)} = \pm \frac{1}{\|t_{12}\|} C_1 t_{12}, \quad e_2^{(1)} = \mp \frac{1}{\|t_{12}\|} \cdot C_2 t_{12}$$

3. 偏位修正と球面エピポラ幾何学

3.1 平面画像の偏位修正

偏位修正とはカメラ中心を変えずに視線方向を変えて正面画像を得ることで、2枚の透視射影画像に対しては2つの視線方向が平行、すなわち2枚の平面画像が3次元空間内で平行となるように画像を変換することで、平面画像の射影変換によって実現できる¹⁰⁾。偏位修正を行なった後には全てのエピポラ直線が水平に射影され(図4(上))、対応する特徴点は同じ高さに並ぶことが知られている。

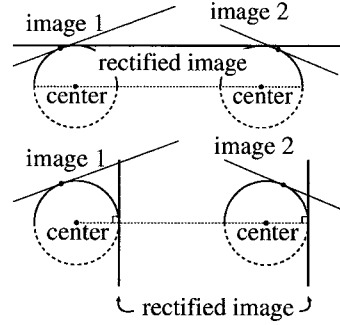


図4 ピンホールカメラ(上)及び球面カメラ(下)の偏位修正。

3.2 球面画像の偏位修正

球面カメラにおいてカメラ中心を変えずに視線方向を変えることは球面画像を回転させることであるから球面画像の偏位修正は球面画像の回転である⁶⁾。

球面画像の偏位修正をピンホールカメラの偏位修正と同様の観点から定義可能であるが、本稿では違った形で、球面カメラ画像のエピポールが北極または南極となるように球面画像を回転するという形で定義する。このとき2枚の球面画像に対応するピンホールカメラの画像は図4(下)のようになる。この偏位修正によりエピポラ大円は子午線となり、対応点は2つの球面画像において同じ経度をもつ(図5)。

さて、第1球面画像においてエピポールの一方 $e_1^{(2)}$ を北極に移す回転行列を R_1 とする。この回転行列はランダムに選ばれた特定の点 z_{1*} が経度が0である点となるように求められているとする。このとき、第1球面画像上の特徴点 z_{1p} とその偏位修正後の座標 x_{1p} の関係は $x_{1p} = R_1 z_{1p}$ と表現される。

同様に、第2球面画像のエピポールの一方 $e_2^{(1)}$ を極に移し、先程ランダムに選ばれた特定の点 z_{2*} が経度が0である点に移す回転行列を R_2 とする。ここで球面カメラにはエピポールが2個あるため、その一方

を選んだとき、そのエピポールを北極に移すか南極に移すかの2通りの選択肢がある。その選択肢のうち一方は経度が一致し、他方は経度が-1倍となる。

このとき第2球面画像上の特徴点 z_{2p} とその偏位修正後の座標 x_{2p} と関係は $x_{2p} = R_2 z_{2p}$ となる。

この偏位修正によって、 x_{1p} と x_{2p} の経度は等しくなり、 x_{1p} 、 x_{2p} 及び \mathcal{N} は同一平面上となるので、

$$\det(x_{1p} \ x_{2p} \ \mathcal{N}) = x_{1p}^T [\mathcal{N}]_x x_{2p} = 0 \quad (7)$$

が成立する。これは偏位修正後のエピポーラ方程式であり、数学的表現が簡単になっている。

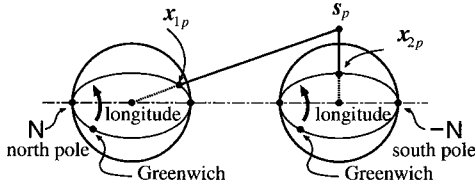


図5 経度に基づくエピポーラ幾何学

3.3 再投影誤差

球面画像上で、特徴点を z_p 、エピポールを e とする。 e を北極 \mathcal{N} に移し、特定の特徴点 z_p の経度が0となる点に移す回転行列を R とする。このとき $x_p = R z_p$ となる。ここで x_p の補緯度および経度を ϕ_p 、 ψ_p とし、対応するエピポーラ大円が表す子午線の経度を α_p とする。このとき、特徴点 x_p と経度 α_p のエピポーラ大円“誤差”を以下のように3種類与える：

- 測地線に沿う誤差：

$$Err_p = \sin^{-1} \{ \sin \phi_p \sin(\psi_p - \alpha_p) \}.$$

- 経度誤差： $Err_p = \psi_p - \alpha_p$.
- 補緯度に沿う弧長： $Err_p = \sin \phi_p (\psi_p - \alpha_p)$.

各“誤差”に対して誤差関数を $J = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P Err_p^2$ によって定義し、誤差関数 J を2つの回転行列のオイラー角を変化させ、Levenburg-Marquardt法(LM法；MATLABのOptimization Toolbox)で最小化*する(6パラメータ)。LM法で更新された

* パラメータのなす多様体が平坦でない場合、接ベクトルが多様体の外に出るため、回転行列をそのまま微分する形で通常のニュートン法を適用すると、回転行列の更新値は回転行列でなくなるため、その更新値を回転行列のなす多様体に射影し直す必要がある。本稿ではこれを避けるために回転行列をそのまま微分せずにオイラー角を用いてパラメータ表示した。これを避ける他の手法として多様体上の指数写像(exponential map)を利用したニュートン法である、リーマン空間におけるニュートン法(Riemannian Newton's Algorithm)¹³⁾も提案されている。回転行列の指数写像はロドリグの公式(Rodrigues's formula)で表現されるため、ロドリグの公式を利用した最急

回転行列を R^{new} とすると、更新されたエピポール、データ点の球面座標の表現は

$$e^{new} = (R^{new})^T \mathcal{N}, \quad x_p^{new} = R^{new} z_p. \quad (8)$$

4. アルゴリズム

4.1 初期推定量

- (1) 8点法による基本行列 E_{12} を推定。
- (2) エピポール $\pm e_1^{(2)}$ 及び $\pm e_2^{(1)}$ の計算。
- (3) 回転行列 R_1 の計算。
- (4) $e_2^{(1)}$ を北極及び南極に移す回転行列 $R_2^{\mathcal{N}}$ 及び $R_2^{-\mathcal{N}}$ を計算し、 J が小さい方を選ぶ**。

4.2 偏位修正に基づいたエピポールの推定

- (1) 初期推定量から $x_{ip} = R_i z_{ip}$ ($i = 1, 2$) を計算。
- (2) R_1 、 R_2 に対しLM法を用いて J を減少させる方向の微小回転行列を同時に計算する。
 - (a) x_{1p} の経度 α_{1p} 、及び x_{2p} の補緯度 ϕ_{2p} および経度 ψ_{2p} を計算し誤差関数を計算する。そして x_{2p} の経度 α_{2p} 、及び x_{1p} の補緯度 ϕ_{1p} および経度 ψ_{1p} を計算し誤差関数を計算して和をとる ($\alpha_{ip} = \psi_{ip}$)。
 - (b) LM法によって R^{new} を計算し、エピポール e_i 及びデータ x_p を更新する。
- (3) 収束後の回転行列が R_1 と R_2 の推定値となり、基本行列の表現は $E_{12} = R_1^T [\mathcal{N}]_x R_2$ 。

5. 人工データを用いた実験**

3次元空間の特徴点及び、特徴点の球面画像座標を以下のように生成する：

- 世界座標枠の原点を中心とする立方体内の一様分布から特徴点をランダムに生成する。
- 3次元空間内の特徴点をカメラ中心が c_1 及び c_2 である球面カメラに射影。このときの球面画像座標を z_{1p} 及び z_{2p} とする。
- z_{1p} 、 z_{2p} にノイズを添加。つまり z_p を中心とする半径 ϵ の円板の中から一様分布によって点 z'_p を選び、これをノイズが添加された観測値とする。この ϵ をノイズ分散(noise variance)と呼ぶ。

復元誤差は3次元空間における真値と推定値の距離の2乗和で評価する。一般に3次元復元誤差は並進3

降下法⁶⁾はリーマン空間における最小化問題と捉えられる。

** $R_2^{\mathcal{N}}$ 及び $R_2^{-\mathcal{N}}$ を計算した後に、さらに北極を中心に回転し、経度差の2乗和が最小となるように微調整すると、特定の特徴点を選んだ不公平さは是正される。

** MATLABによるプログラムは <http://cmp.felk.cvut.cz/~torii/public/release/s2lopt.zip>

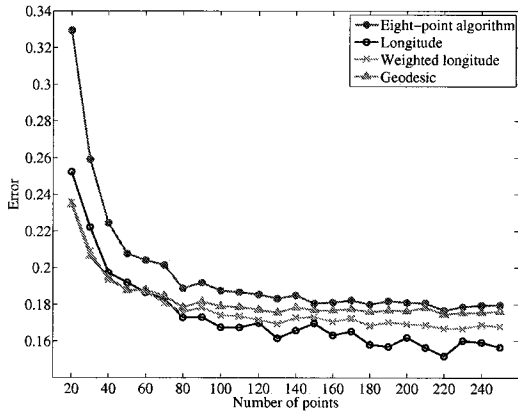


図 6 対応点の個数を変化させた場合の誤差評価.

自由度, 回転 3 自由度, グローバルスケールパラメータ 1 自由度の合計 7 自由度からなる. 復元誤差を評価するために, これらの自由度を以下のように固定する.

まず, 2 つのカメラ中心の真値を与えて 6 つの自由度が固定する. このとき残った 1 自由度はカメラ中心を結ぶ直線を軸とした回転となる. この自由度を推定値と真値との 3 次元距離の 2 乗和が最小となるように固定したときの最小値を 3 次元復元誤差とする.

この処理を T 回反復して統計的に評価した. 3 次元復元結果の平均誤差は T 回の反復の中央値を用いた. 全実験において R_1, R_2 の真値は $R_1 = R_2 = I$, 2 つのカメラの中心は $\mathbf{c}_1 = (4, 0, 0)^T$, $\mathbf{c}_2 = (-4, 0, 0)^T$, 特徴点を生成する立方体の 1 辺の長さは 40, 反復回数を $T = 1000$ とした.

5.1 対応点の個数を変化させた場合の誤差評価.

数値実験の結果を図 6 に示す. 対応する特徴点の数 P を 20 点から 200 点へと 10 点ずつ増やしたときの誤差を評価した. ここで球面画像の誤差分散を $\epsilon = 0.01$ で固定した. 図 6 において, 水平軸は特徴点の個数, 垂直軸は 3 次元復元誤差の中央値 (median) を表す. 図中において 8 点法の誤差及び提案した偏位修正に基づく手法の誤差は以下のように表現される:

- 8 点法: 黒丸 “●”.
- 経度差: 白丸 “○”.
- × 補緯度に沿う弧長: 罰点 “×”.
- △ 測地線: 三角 “△”.

偏位修正に基づく提案手法のいずれも, 8 点法より良い復元結果を与える. 対応点の個数が少ない場合は測地線に沿う距離及び補緯度に沿う距離が “誤差” として相応しく, 多い場合は経度差が “誤差” として相応しいことがわかった.

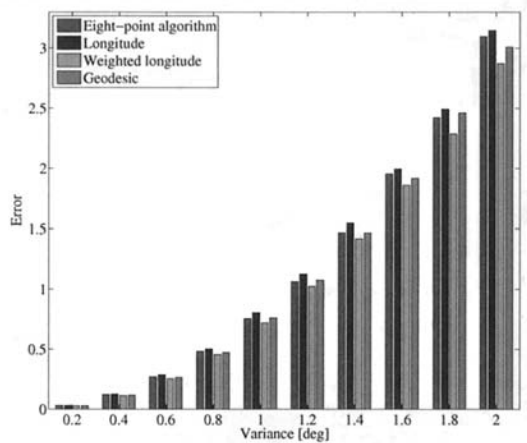


図 7 誤差分散を変化させた場合の誤差評価

5.2 誤差分散を変化させた場合の誤差評価

図 7 はノイズ誤差 ϵ を 0.2 から 2.0 まで 0.2 ずつ増やしたときの誤差を評価した. ここで対応点の数は $P = 100$ と固定した. 図 7 において, 水平軸はノイズ誤差, 垂直軸は 3 次元復元誤差の中央値 (median) を表す. 誤差は先程の実験と同じ記号で示す.

補緯度に沿う距離は 8 点法より良く, 測地線に沿う距離は 8 点法と同等か良く, そして経度差は 8 点法より悪い結果を与えた. この傾向は誤差が大きいく程顕著に現れた. 誤差分散が小さい場合は, その手法も大差ないが, 誤差分散が大きい場合は, 補緯度に沿う距離が “誤差” として相応しいことがわかった.

5.3 復元形状

参考のため図 8 に復元された立方体を示す. 真の形状は四角 “□” で表現した. 残りのデータは人工データにおける実験と同じ記号で表現した. 偏位修正に基づく提案手法のいずれも 8 点法より良い復元結果を与えた.

6. おわりに

球面カメラにおける偏位修正とはエピポールが極となるように球面画像を回転することであり, このときエピポーラ拘束とは対応点と同じ経度に並ぶことを意味する. 本稿では, この幾何学的性質から自然に導かれる 2 つの “誤差” である経度差及び補緯度に沿う弧長と, 球面上の距離として自然な “誤差” である測地線に沿う誤差 (データのなす角度) の 3 つの “誤差” を与え, それらと 8 点法を, 人工データによる 3 次元復元結果によって比較した.

誤差分散が十分に小さい, つまり特徴点が高精度で

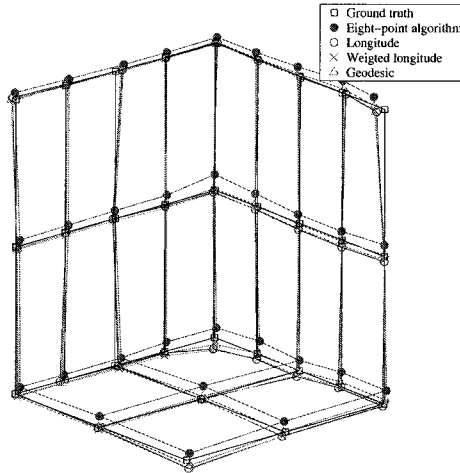


図 8 立方体の復元結果の比較.

得られる場合, 3つの“誤差”はいずれも8点法^{*}より良い復元結果を与え, さらに特徴点が十分な個数得られない場合は測地線に沿う距離及び補緯度に沿う距離が, 多い場合は経度差が“誤差”として相応しいことがわかった. そして誤差分散が大きくなると, 経度差は“誤差”としては相応しくなくなり, 補緯度に沿う距離が“誤差”として最良となることがわかった.

このような結果が得られた数理的背景については今後の課題であるが, “誤差”を経度または補緯度に沿う距離(補緯度の正弦という重みを付けた経度差)で測ることは, 極が固定されている, つまりエピポールが正しく推定されているという前提があると考えることができるため, 経度または補緯度に沿う距離はエピポールの位置に関して頑健な推定のために適した“誤差”であると考えられる. そしてその観点からすると, エピポール付近に誤差の大きい特徴点が存在する場合, 経度差は“誤差”として不向きであり, エピポールに近い程データの重みが小さくなる補緯度に沿う距離の方が“誤差”として向いているという定性的な議論がある程度可能となる.

参 考 文 献

- 1) S.Baker and S.K. Nayar. A theory of single-viewpoint catadioptric image formation. *International Journal of Computer Vision*, vol. 35(2), pp. 175–196, 1999.
- 2) J.P. Barreto and K.Daniilidis. Unifying image

plane liftings for central catadioptric and dioptric cameras. In *OMNIVIS '04*, pp. 151–162, 2004.

- 3) R. Benosman and S. B. Kang, editors. *Panoramic Vision: Sensors, Theory, Applications*. Springer-Verlag, 2001.
- 4) P. Chang and M. Hebert, Omni-directional structure from motion, In *OMNIVIS '00*, pp. 127–133, 2000.
- 5) O.Faugeras, Q.T. Luong, and T.Papadopoulou. *The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern The Formation of Images of A Scene and Some of Their Applications*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2001.
- 6) 藤木淳, 赤徳昭太郎, 球面カメラのエピポーラ幾何学とその計算, 信学技報 2005-41, pp.41–46, 2005.
- 7) J.Fujiki, A.Torii and S.Akaho, Epipolar Geometry via Rectification of Spherical Images, In *MIRAGE '07*, pp. 461–471, 2007.
- 8) C. Geyer and K. Daniilidis, Catadioptric projective geometry. *International Journal of Computer Vision*, vol. 45(3), pp. 223–243, 2001.
- 9) C.Geyer and K.Daniilidis, Properties of the catadioptric fundamental matrix, In *ECCV '02*, vol. 2, pp. 140–154, 2002.
- 10) R.Hartley and A.Zisserman. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University, Cambridge, 2nd edition, 2003.
- 11) R. I. Hartley and F. Kahl, Global optimization through searching rotation space and optimal estimation of the essential matrix, *ICCV '07*, 2007.
- 12) F.Kahl, Multiple view geometry and the L_∞ -norm, In *ICCV '05*, pp 1002–1009, 2005.
- 13) Y.Ma, J.Kosecka and S.Sasty, Optimization criteria and geometric algorithms for motion and structure estimation, *IJCV*, vol. 44(3), pp. 219–249, 2001.
- 14) R.J.Rousseeuw and A.M.Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley & Sons, NY, 1987.
- 15) T.Svoboda and T.Pajdla, Epipolar Geometry for Central Catadioptric Cameras. *IJCV*, vol. 49(1), pp. 23–37, 2002.
- 16) J.Weng, T.S.Huang and N.Ahuja, Optimal motion and structure estimation. *PAMI*, vol. 15(9), pp.864–884, 1993.
- 17) X. Ying and Z. Hu. Can we consider central catadioptric cameras and fisheye cameras within a unified imaging model. In *ECCV '04*, vol. 1, pp. 442–455, 2004.

^{*} 球面上のデータに対して重み付き 3 次元距離を誤差とする手法