Ｆｕｚｚｙ論理文による あいまい情報の近似表現

武田明秀　　　　向殿政男
（株）ソフトピア）　（明治大学工学部）

§１　はじめに

現在、知識工学、及び、エキスパートシステムなど、様々な分野において、知識、概念をコンピュータシステム中で、適切な形で取り扱えるよう、研究が進められている。ところが、我々の日常もっている概念のほとんどは、実際、確実に定義できる事は稀で、あいまいな、あるいは、Yes 、Noで定義するのが困難である場合が多いので、あいまい情報を、一般的枠組みのなかで取り扱うことのできる手法が、望まれている。そこで、ここでは、実社会に存在するあいまいな情報を、コンピュータシステム内で表現する一手法として、Ｆｕｚｚｙ論理文と呼ばれる文を用いる方法を考察する。簡単に述べれば、概念は、ある対象領域Ｘ上のあいまい（Ｆｕｚｚｙ）集合で表現できるという単純な仮定の下、有限個の基本単語（これらも、Ｆｕｚｚｙ集合で表現されている）を、いくつかの論理結合子によって組み合わせ、文（これを、Ｆｕｚｚｙ論理文という）を構成し、与えられた任意の概念を近似表現する手法である。これは、Ｘ上の概念は無限個あり得るが、良く利用され共通になっている概念のみが単語として名前がつけられていて、我々が実際利用できる単語は、有限個であるという考え方に基づいている。このように、あいまい情報を、既に定義されている有限個の単語の組み合わせで近似表現することは、物理的制約のある実際のコンピュータシステム上であいまい情報を取り扱う上で必要なことであると同時に、このＦｕｚｚｙ論理文の理論的性質が明らかになっていれば、それに対する処理の意味付けもしやすくなると考えられる。実際、我々が、このＦｕｚｚｙ論理文を提案するのも、既にＦｕｚｚｙ論理関数とＢ－３値論理関数との基本的関係が証明されており[2] 、この枠組みに基づいているＦｕｚｚｙ論理文を用いることにより、従来、あいまいであるがために、モデル化が難しかった対象も取り扱えるのではないか、という動機があったからである。本報告では、Ｆｕｚｚｙ論理文と呼ばれる簡単な論理式の定義、そして、Ｆｕｚｚｙ集合として与えられた概念を、ある評価基準に従い、基本単語の組み合わせで近似し、それを表わすＦｕｚｚｙ論理文を求める手順について述べる。

§２　Ｆｕｚｚｙ論理文の定義

Ｘを対象領域（通常の２値集合）とし、Ａ1 ，…，Ａn をＸ上のＦｕｚｚｙ集合として、これらを基本単語と呼ぶ。これは、有限個（ｎ個）であり、このときＦｕｚｚｙ論理文はつぎのように定義される。

定義１

(1)　A1，…，An はＦｕｚｚｙ論理文である。

(2)　f1，f2 がＦｕｚｚｙ論理文ならば、（f1 ＋f2）、および（f1 ・f2）もＦｕｚｚｙ論理文である。

(3)　f がＦｕｚｚｙ論理文ならば、（～f）もＦｕｚｚｙ論理文である。

(4)　(1)、(2)、(3) で与えられるものだけがＦｕｚｚｙ論理文である。

この定義で、論理結合子 ＋（ＯＲ）、・（ＡＮＤ）、及び、～（ＮＯＴ）は、次のように定義される。

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$
$$\mu_{A \cdot B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$
$$\mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_A(x), \qquad x \in X.$$

ここで、μ_A はＦｕｚｚｙ集合Ａのメンバーシップ関数で、$\mu_A(x) \in [0, 1]$ である。なお、これより簡単のため、Ｆｕｚｚｙ集合とメンバーシップ関数とを同一視して、$\mu_A(x)$ のかわりにＡｘと書くことにする。また、Ｆｕｚｚｙ論理文自体も、Ｘ上のある一つのＦｕｚｚｙ集合を表わしており、容易に証明できるように、これらＦｕｚｚｙ論理文で表現されるＦｕｚｚｙ集合の数は、有限である。

［例］

図１に示すように、Ｘ上の基本単語、A1，A2，A3 がある時、例えばＦｕｚｚｙ論理文、Ｆ＝A1 ＋（A2 ・（～A3））は、太線で示されるＸ上のＦｕｚｚｙ集合Ａｘを表わしている。また、ここではＸを年齢としており、A1 を若い、A2 を中年、A3 を年寄りという基本単語に対応付けてみれば、Ｆは『若い、或いは（中年で、且つ年寄りでない）』というＦｕｚｚｙ集合を表現していることになる。

§３　Ｆｕｚｚｙ論理文で表現できるための必要十分条件

Ｘ上のあるＦｕｚｚｙ集合Ａが、Ｆｕｚｚｙ論理文で表現できるための必要十分条件は既に求められている[2]。

定理１

Ｆｕｚｚｙ論理文Ａは、次の条件を満たす時、及びそのときに限り、Ｆｕｚｚｙ論理文で表現できる。

(1)　Ｆｕｚｚｙ集合Ａの値は、各セル空間で、Ai，～Ai，又は、0，1のいずれかに等しい。

(2)　Ａの値は、各セル空間の境界において一価である。

セル空間とは、基本単語からなる、A1，…，An，～A1，…，～An，0，1 が、大きさのある順番を保持している $[0, 1]^n$ 上の部分集合

$$0 \leqq A'_{i1} \leqq \cdots \leqq A'_{in} \leqq 1/2 \leqq \sim A'_{in} \leqq \cdots \leqq \sim A'_{i1} \leqq 1 \quad \cdots \text{①}$$

（A'_{ij}は、A_{ij}、又は$\sim A_{ij}$、をあらわす）

のことであり最大で、$2^n \times n!$個存在する。

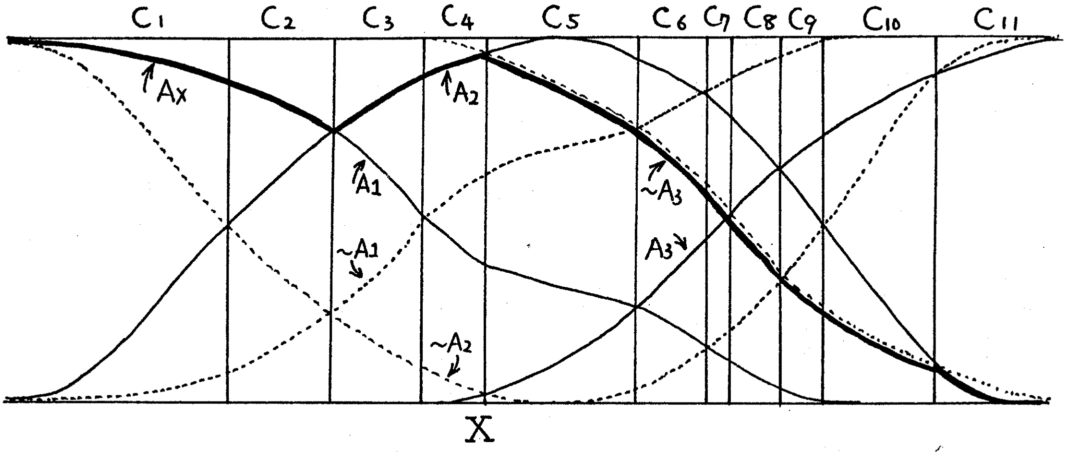

図　　1

図１では、セル空間は１１個ある。以下に、各セル空間に対応した①式を示したが、式のうち、右半分、つまり、１／２から１の間にあるリテラル（基本単語、又はその否定）だけを示し表現を簡単化した。この理由は、①式に示されているように、１／２を境として、左半分は右半分の順序を、そのまま反対にしているだけなので、リテラルの順序関係は、右半分だけで表示することができるからである。なお、基本単語Ａ　が全て連続関数ならば定理１の条件中(2) は、各セル空間の境界でＡの値は連続でなければならないことを表わしている。以下に示した式群で、…以後のリテラルは、そのセル空間でとるＡｘに対応するリテラルを示しており、Type 1, Type 0はおのおの、このリテラルが右半分に含まれるか、あるいは左半分に含まれるかを示している。

セル空間		基本単語の順序		Ａｘ	タイプ
Ｃ1	：	$1/2 \leqq \sim A2 \leqq A1 \leqq \sim A3 \leqq 1$，	…	Ａ1	Type 1
Ｃ2	：	$1/2 \leqq A2 \leqq A1 \leqq \sim A3 \leqq 1$，	…	Ａ1	Type 1
Ｃ3	：	$1/2 \leqq A1 \leqq A2 \leqq \sim A3 \leqq 1$，	…	Ａ2	Type 1
Ｃ4	：	$1/2 \leqq \sim A1 \leqq A2 \leqq \sim A3 \leqq 1$，	…	Ａ2	Type 1
Ｃ5	：	$1/2 \leqq \sim A1 \leqq \sim A3 \leqq A2 \leqq 1$，	…	～Ａ3	Type 1
Ｃ6	：	$1/2 \leqq \sim A3 \leqq \sim A1 \leqq A2 \leqq 1$，	…	～Ａ3	Type 1
Ｃ7	：	$1/2 \leqq \sim A3 \leqq A2 \leqq \sim A1 \leqq 1$，	…	～Ａ3	Type 1
Ｃ8	：	$1/2 \leqq A3 \leqq A2 \leqq \sim A1 \leqq 1$，	…	～Ａ3	Type 0
Ｃ9	：	$1/2 \leqq A2 \leqq A3 \leqq \sim A1 \leqq 1$，	…	～Ａ3	Type 0
Ｃ10	：	$1/2 \leqq \sim A2 \leqq A3 \leqq \sim A1 \leqq 1$，	…	～Ａ3	Type 0
Ｃ11	：	$1/2 \leqq A3 \leqq \sim A2 \leqq \sim A1 \leqq 1$，	…	Ａ2	Type 0

§4　Ｆｕｚｚｙ論理文による表現

前章で示した定理１の２条件(1),(2) を満たすＦｕｚｚｙ集合Ａx が与えられたとき、Ａx を表現するＦｕｚｚｙ論理文は、つぎのようにして構成できる。
『各セル空間Ｃｉ において、Ａx のとる値をＡ$'_i$ とする。Ｃｉ の①式において、Ａ$'_i$ を含めて、これより右に配列されているリテラルのすべてのＡＮＤ（・）からなる、積項をαｉ とする。この時

$$Ax = \bigvee_i \alpha i$$

が成立する。』

例で示したＣ1 からＣ11までの式ではType0 とType1 に分けているが、この時の操作は、それぞれ例えば
Type0 ：　例として、Ｃ10

Ｃ10　：　１／２≦～Ａ2 ≦　Ａ3 ≦～Ａ1 ≦１，　…　～Ａ3　Type 0

この場合、～Ａ3 に対応するＡ3 及び、それより左側にある～Ａ2 に対応するＡ2 が１／２より右側のリテラルに加わり、つぎのような積項となる。

～Ａ3 ・Ａ2 ・～Ａ2 ・Ａ3 ・～Ａ1

Type1 ：　例として、Ｃ1

Ｃ1　：　１／２≦～Ａ2 ≦　Ａ1 ≦～Ａ3 ≦１，　…　Ａ1　Type 1

この場合、Ａ1 より右側にあるリテラルだけの積項となり

Ａ1 ・～Ａ3

図１の例でＡｘは、先の２条件を満たしており、上述に従って、ＡｘのＦｕｚｚｙ論理文を構成すると次のようになる。

Ａx ＝Ａ1 ・～Ａ3 ＋Ａ1 ・～Ａ3 ＋Ａ2 ・～Ａ3 ＋Ａ2 ・～Ａ3 ＋
～Ａ3 ・Ａ2 ＋～Ａ3 ・～Ａ1 ・Ａ2 ＋～Ａ3 ・Ａ2 ・～Ａ1 ＋
～Ａ3 ・Ａ3 ・Ａ2 ・～Ａ1 ＋～Ａ3 ・～Ａ2 ・Ａ2 ・Ａ3 ・～Ａ1 ＋
～Ａ3 ・Ａ2 ・～Ａ2 ・Ａ3 ・～Ａ1 ＋
Ａ2 ・～Ａ3 ・Ａ3 ・～Ａ2 ・～Ａ1

更に、これを簡単化すると、Ａx ＝Ａ1 ＋（Ａ2 ・（～Ａ3 ））となる。
一方、基本単語が３個の場合、セル空間の数は最大、$2^3 \times 3! = 48$個存在する

はずで、残りの３７個のセル空間のうち、いくつかの値は未定義となっている。
従って、以上の表現は、不完全指定されたＦｕｚｚｙ論理関数の表現[3]、と一致する。

§５　Ｆｕｚｚｙ論理文によるあいまい情報の近似

これまで述べたようにＦｕｚｚｙ論理文は、有限個の基本単語の組み合わせで、かつ各セル空間でどれかの基本単語の値と一致しなければならないが、任意の概念がこの基本単語の軌跡と、必ずしも一致するとは限らないので、両者間で近似をとる必要がある。ここでは、その手法について述べる。
まずあるセル空間Ｃｉ において、近似すべき対象となるＦｕｚｚｙ集合をＡｘ とする。基本単語A'_{ij}(j=1, …,2n)とこのＡｘ との近似度の評価基準は幾通りかあり得るが、ここでは極めて簡単化して、境界におけるメンバーシップ関数の値の差の平均値を、１から減じた値をＣｉ における近似度a_{ij}とする。即ち、

$$a_{ij} = 1 - 1/2\ \{\, |\, \mu_{A'_{ij}}(d_{i-1}) - \mu_{Ax}(d_{i-1})\, | + |\, \mu_{A'_{ij}}(d_i) - \mu_{Ax}(d_i)\, |\,\}$$

ここで、d_i, d_{i-1}は境界のＸ軸の値である。

とする。次に、Ａｘ と、セル空間の間で連続な基本単語によってできる、条件(1)、(2) を満たす、Ｆｕｚｚｙ論理文$A_{1j_1} - A_{2j_2} - \cdots - A_{mj_m}$，との評価基準も幾通りかあり得るが、ここでは、今述べた各セル空間における近似度a_{ij}の最小値

$$\min\ (a_{1j_1},\ a_{2j_2},\ \cdots,\ a_{mj_m})$$

を採用する。なお、ｍはセル空間の数。
このような評価基準に基づいて近似度を行列によって表現すると

$$C_i = \begin{array}{c|ccccc|} & A'_{i1} & A'_{i2} & \cdots\ A'_{ij} & \cdots & A'_{i2n} \\ A'_{i1} & a_{i1} & & & & \\ A'_{i2} & & a_{i2} & & \emptyset & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ A'_{ij} & & & a_{ij} & & \\ \vdots & & \emptyset & & \ddots & \\ A'_{i2n} & & & & & a_{i2n} \end{array}$$

但し、$C_i = |C_{pq}|$　$C_{pp} = a_{ip}$, p=1,2,･･, 2n
$C_{pq} = 0$, $(p \neq q)$

また、基本単語のセル空間C　とC　　との間における接続関係も行列T　　で表現する。この場合二通りにわけて考えられ、つぎのようになる。

i）　セル空間の境界で、あるＦｕｚｚｙ集合A_{ij}と、その否定$\sim A_{ij}$とが交差している場合。

ii）　ある二つ以上のＦｕｚｚｙ集合A_{ij}，A_{ik}（A_{ij}，A_{ik}はそれぞれ異なる基本単語のＦｕｚｚｙ集合）が交差している場合。

i）の場合

A_{ij}がｓ、$\sim A_{ij}$がｔ行（列）にあったとすると

$$T_{i,i+1}=T_{s,t}=\begin{array}{c|ccccccc|} & A'_{i1} & \cdots & A'_{is} & \cdot & A'_{it} & \cdots & A'_{i2n} \\ A'_{i1} & 1 & & & & & \emptyset & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ A'_{is} & & & 1 & & 1 & & \\ \cdot & & & & \ddots & & & \\ A'_{it} & & & 1 & & 1 & & \\ \vdots & & \emptyset & & & & \ddots & \\ A'_{i2n} & & & & & & & 1 \end{array}$$

となる。

ii）の場合

A_{ij}がｓ、A_{ik}がｔ、$\sim A_{ij}$がｕ、$\sim A_{ik}$がｖ行（列）におのおのあったとすると

$$T_{i,i+1}=T_{s,t}\vee T_{u,v}=\begin{array}{c|ccccccccc|} & A'_{i1} & \cdots & A'_{is} & A'_{it} & \cdots & A'_{iu} & A_{iv} & \cdots & A'_{i2n} \\ A'_{i1} & 1 & & & & & & \emptyset & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & \\ A'_{is} & & & 1 & 1 & & & & & \\ A'_{it} & & & 1 & 1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \\ A'_{iu} & & & & & & 1 & 1 & & \\ A'_{iv} & & \emptyset & & & & 1 & 1 & & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \\ A'_{i2n} & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

となる。

そこで、つぎの演算をおこなう。

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{C}_1$$
$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i-1}\cdot\mathbb{C}_i\ (i=2,\ \cdots,\ m)$$

即ち

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}_1 \cdot \mathbb{T}_{1,2} \cdot \mathbb{C}_2 \cdot \mathbb{T}_{2,3} \cdot \cdots \mathbb{C}_{m-1} \cdot \mathbb{T}_{m-1} \cdot \mathbb{C}_m$$

但し、行列の掛け算　A’＝A・Bは

$$a'_{ij} = \bigvee_{k=1}^{2n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad \{\ \vee \text{はOR、} \cdot \text{はAND}\}$$

最終的な解Aの要素a_{ij}は、最初のセル空間C1 でｉ番目の基本単語を選択し、最後のセル空間Cm では　ｊ番目の基本単語を採用したとした時のＦｕｚｚｙ論理文の近似度の最大値を意味している。従って、Aの要素のうちの最大値をとって、それが$a_{s,t}$であるならば、C1 でS 番目で始まり、Cm でt 番目で終わる基本単語の軌跡を求めればよく、その近似度は$a_{s,t}$となる。
実際には、行列をすべて計算しなくても、接続関係のある近似度行列の要素に対してのみ計算を施せばよく、これを用いてアルゴリズムを高速化することができる。例えば

$$\mathbb{A}_i = \begin{array}{c|ccccccc|}
 & A'_{i1} & \cdots & A'_{is} & A'_{it} & \cdots & A'_{i2n} \\
\hline
A'_{i1} & 0.1 & & & & & \emptyset \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
A'_{is} & & & 0.7 & 0.0 & & \\
A'_{it} & & & 0.0 & 0.4 & & \\
\vdots & & \emptyset & & & \ddots & \\
A'_{i2n} & & & & & & 0.1
\end{array}
\qquad
\mathbb{T}_{i,i+1} = \begin{array}{c|cccccc|}
 & A'_{i1} & \cdots & A'_{is} & A'_{it} & \cdots & A'_{i2n} \\
\hline
A'_{i1} & 1 & & & & & \emptyset \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
A'_{is} & & & 1 & 1 & & \\
A'_{it} & & & 1 & 1 & & \\
\vdots & & \emptyset & & & \ddots & \\
A'_{i2n} & & & & & & 1
\end{array}$$

とすると

$$\mathbb{A}_{i+1} = \mathbb{A}_i \times \mathbb{T}_{i,i+1} = \begin{array}{c|cccccc|}
 & A'_{i+1,1} & \cdots & A'_{i+1,s} & A'_{i+1,t} & \cdots & A'_{i+1,2n} \\
\hline
A'_{i+1,1} & 0.1 & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
A'_{i+1,s} & & & 0.7 & 0.7 & & \\
A'_{i+1,t} & & & 0.4 & 0.4 & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
A'_{i+1,2n} & & & & & & 0.1
\end{array}$$

となる。
このように、行列の対角線上はそのままとし、交点の部分ではその値を転記するだけでよい。

§６　まとめ

以上述べたような手法により、あいまいな任意の概念が一つのＦｕｚｚｙ集合で与えられれば、これを有限個の基本単語の組み合わせで構成されたＦｕｚｚｙ論理文により近似表現することができる。ただ、本手法により最終的に求まったＦｕｚｚｙ論理文は、Ｆｕｚｚｙ論理関数の枠組みのなかで取り扱われるものであるため、必ずしも、われわれが普通用いている自然言語の表現とは感覚的には一致しない場合や、更に、あまりにも複雑な論理文が得られることある。　よって、具体化するにあたっては、論理演算子の数を制限するとか、実装には更に工夫が必要であるといえる。
なお、次段階としては、Ｆｕｚｚｙ論理文をＦｕｚｚｙ推論、　データベースの検索などに適用したいと考えている。

§７　参考文献

[1]　M.Mukaidono ：　Towords an Approximate Representation of Concepts with Fuzzy Logic Sentences

Int. Conf. On Policy Analysis and Information Systems, 1981, Taipei

[2]　M.Mukaidono ：　A Neccesary and Sufficient condition for Fuzzy Logic Functions

9-th Int. Symp. On Multiple-Valued Logic, 1979, IEEE

[3]　藤井、向殿　：　不完全指定されたＦｕｚｚｙ論理関数の表現

昭和５７年度電子通信学会総合全国大会、１２２１

[4]　向殿、武田　：　Ｆｕｚｚｙ論理文によるあいまい情報の表現

昭和５９年度情報処理学会秋期全国大会、１１８５

[5]　向殿、武田　：　Ｆｕｚｚｙ論理文によるあいまい情報の近似

昭和６０年度情報処理学会前期全国大会、８７３