

## 戦略的淘汰を適用したジェネティクアルゴリズムGAUSSの提案

筒井茂義

阪南大学 商学部 経営情報学科

藤本好司

シャープ(株)情報システム研究所

### 要 旨

近年、生物の環境適応における進化過程にヒントを得たジェネティクアルゴリズム(GA)が注目されており、組合せ最適化問題等への適用の研究が行われている。本研究では、ハミング距離に基づく生存確率および動的な収束制御を適用した戦略的淘汰を導入することによって、個体群の多様性を維持しつつ安定した収束特性を図ることを目的とする新しいジェネティクアルゴリズム:GAUSSを提案する。GAUSSを実数空間の探索問題および Traveling Salesman 問題に適用した結果およびその検討について述べる。既存のGA(GENESIS, GENITOR)と比較して最適解への収束特性が優れていることを示す。30都市程度の問題ではほぼ100%の頻度で最適解に収束し、50都市、75都市問題でも新しい最良解が得られた。

## GAUSS : Genetic Algorithm Using Strategic Selection

Shigeyoshi Tsutsui

Department of Management and Information Science  
HANNAN University

Yoshiji Fujimoto

Information Systems Laboratories  
SHARP Corporation

### Abstract

A genetic algorithm which was derived from the evolutionary process of life in adaptation to its environment is focused the spot light of attention as a optimization method for combinatorial and nonlinear problems in the latest few years. In this paper, we propose the GAUSS (Genetic Algorithm Using Strategic Selection) which has a survival probability based on a Hamming distance and a dynamic convergence control of parameters to retain wider diversity of a population for avoiding premature convergence. GAUSS has been run on several test functions and Traveling Salesman Problems (30, 50, 75 cities). The experimental results show that the convergence properties of GAUSS are superior to those of the existing algorithms such as GENESIS and GENITOR.

## 1. はじめに

ジェネティックアルゴリズム (GA) は、最適化手法の一つで、生物の50億年に及ぶ進化の過程をコンピュータで高速にシミュレーションし、生物進化の原理を用いて非常に複雑なシステムの最適化を行なうものである。特に、GAでは、従来の最適化手法では解くことが非常に困難であったNP完全(NP Complete)問題のような種々の複雑な最適化問題に対しても効果的に広く適用できるものである。GAの原理(最適化の原理)はスキーマ理論(Schema Theorem)と呼ばれるもので、1975年にミシガン大学のJ. H. Hollandによって確立された[1]。

GAは、最適化の一手法であるが、発見的探索を効率良く行なうことができ、最近では、GAそのものの改良展開と従来のAI手法やニューラルネットワークと組み合わせて新しいAIの枠組みとして研究されている。また、GAは並列処理に非常に適したアルゴリズムで超並列、超分散の情報処理として期待されている。

本報告では、ハミング距離に基づく生存確率および動的な収束制御を適用した戦略的淘汰を導入することによって、個体群の多様性を維持しつつ安定した収束特性を図ることを目的とする新しいジェネティックアルゴリズム:GAUSSを提案する。GAUSSを実数空間の探索問題およびTraveling Salesman問題(以下、TSP)に適用した結果およびその検討について述べる。既存のGA(GENESIS、GENITOR)と比較して最適解への収束特性が優れていることを示す。30都市程度の問題ではほぼ100%の頻度で最適解に収束し、50都市、75都市問題でも新しい最良解が得られた。

以下、方式の詳細および実験結果について報告する。

## 2. GAUSS (Genetic Algorithm Using Strategic Selection)の提案

### 2.1 標準GAと代表的なインプリメンテーション

GAの理論的バックグラウンドであるスキーマ理論 (Schema Theorem) に基づくGA (以下、SGA ; Standard Genetic Algorithm) のフローを図2.1に示す[2]。

SGAにおいては、

- (a)各世代の個体群の数は一定である、
- (b)交叉(Crossover)によって生成された子孫はその両親にとってかわる、
- (c)淘汰(Selection)においては、個体  $x$  の評価値  $f(x)$  は適合度  $FR_x$  (Fitness Ratio) に変換され  $FR_x$  に比例した個体数が確率的に決定され複製される、

というプロセスを経て高い評価値を持つ個体群が形成されていく。

スキーマ理論の主張である intrinsic parallelism の効果により、GAは広域的な探索に強力な能力を持っているが、問題によっては収束速度や未成熟収束 (premature convergence) による局所解への収束などの本質的な課題を持っている。すなわち、進化を促進させるためには、評価値  $f(x)$  から  $FR_x$  への変換の感度 (selective pressure) を高くすることによって制御できる。しかし、これは未成熟収束の原因となる。すなわち、淘汰においては  $FR > 1$  のものは同じ個体が複製されるため進化に必要な個体群の多様性(diversity)が失われる。また、交叉によって作られた子孫は、無条件に親にとってかわるため、よい評価値を持つ親が悪い評価値をもつ子孫によって失われる可能性がある。SGAに最も忠実な形で実現された GA に Greffentette によって開発された GENESIS がある[3]。GENESIS を実際実行してみると、問題によっては収束性が遅く特に最適解近傍での収束性が悪いという特性が見られる(3.1節参照)。

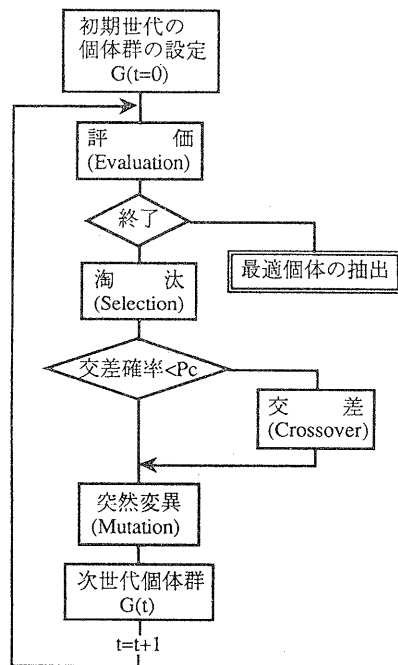


図2.1 標準的な遺伝的アルゴリズム

Whitleyらによって開発されたGENITOR[4]では、個体群は各個体は評価値を基にランク付けされている。両親はランクに基づいて確率的に選択され、交叉により1個の子孫を生成する。この子孫を評価しそのランクに応じた場所に挿入する、という方法により、このような問題の解決が試みられ、その有効性が報告されている[4][5]。

個体群の多様性を維持する他の有力な方法に、複数個の個体群を部分的に個体の交換を行いながら独立に進化を進めるというサブ個体群方式があり、並列処理でのGAの実現方法と組み合わせて研究されている[6]-[8]。

本稿で提案するGAUSSは、ダイナミックな戦略的淘汰を採用することにより、個体群の多様性の維持と最適解近傍への収束性を早めることを狙いとする新しいGAである。

## 2.2 GAUSSのアルゴリズム

本節では、2.1で述べたような課題に対するGAUSSのアプローチについて詳しく述べる。

### (1)基本アルゴリズム

GAUSSの基本アルゴリズムは以下のようである。

- (a)淘汰フェーズにおいて現個体群を次世代個体群生成候補として残し評価値の高い遺伝子群を保存する。
- (b)淘汰において評価値の高いものから順次、次世代個体とする。ただし、この過程で個体群の多様性を確保するために、個体間のハミング距離に基づく生存確率により淘汰を行う。
- (c)収束の度合に適應して、この生存確率を制御し、近傍の個体も選択されやすくして収束を進める。また同時に一定割合の上位個体を死滅させた後、これらのプロセスを継続する。
- (a)に関しては、GENITORや、他のアルゴリズム[9]で行われる。ハミング距離により多様性を図る方式は、いわゆるsharing[10]のアプローチに類似している。GAUSSにおける進化過程の流れを図2.2に示す。

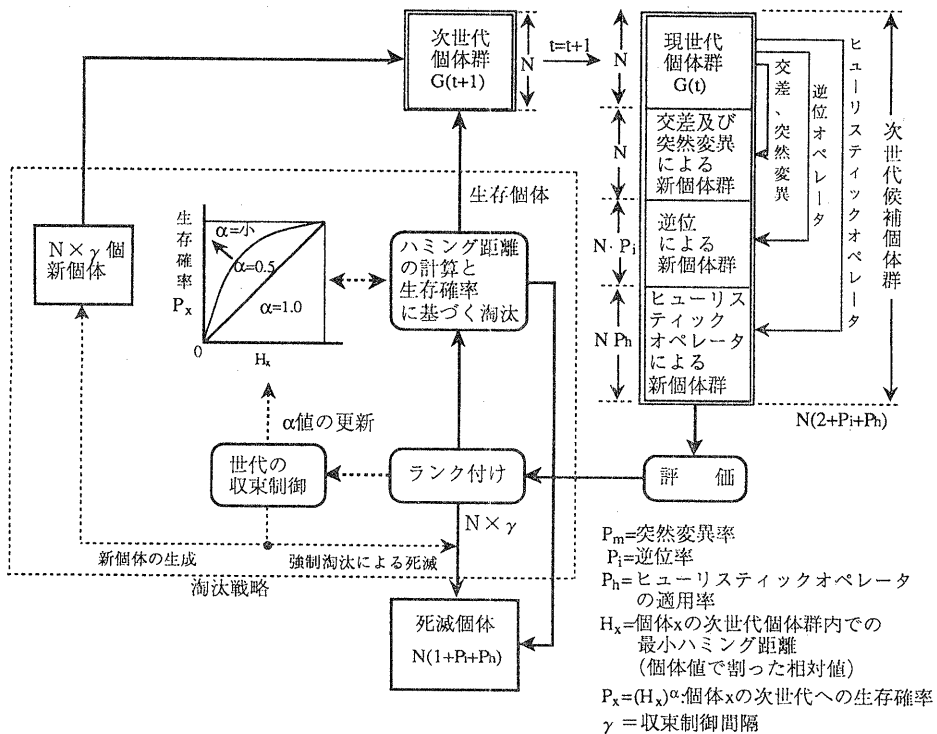


図2.2 GAUSSの基本サイクル

### (2)交差、突然変移オペレーション

現個体群から、重複しない個体をランダムに選択して $N/2$ 個( $N$ は群の個体数)のペアをつくり交差(Crossover)と、突然変移(Mutation)を行い、 $N$ 個の子孫を作る。交差オペレータ、突然変移オペレータとしては、種々のものが提案されているがGAUSSではとくに規定しない。

### (3)逆位オペレーション

逆位(Inversion)は、個体のランダムに選ばれた2点間のコードの順序を逆転するというGAにおける標準的なオペレータである。GAUSSの逆位オペレーションでは、(2)のオペレーションによって得られる子孫個体群からではなく現個体群から $P_i \times N$ 個( $P_i$ :逆位率)の個体をランダムに選び、逆位オペレータにより、新しい別の個体として、子孫群に追加する。

### (4)ヒューリスティックオペレーション

問題に依存する各種ヒューリスティックオペレータも逆位オペレータと同様、現個体群から選ばれた個体に適用されて

子孫群に追加する。ただし、GAUSSでは現在ヒューリスティックオペレータは使っていないが、容易に導入することができるようになっている。

(5)戦略的淘汰オペレーション

現個体群と(2)~(4)のオペレーションによって生成された子孫とが次世代個体群の候補となり、淘汰により、次世代のN個の個体が選択される。GAUSSでの戦略的淘汰は以下のようにして行われる。

(a)ランク付け

次世代個体群を評価値に基づいてランク付けを行う。

(b)ハミング距離に基づく生存確率による淘汰

ランクの順に順次個体を取り出し、次世代個体群G(t+1)を構成していく。ただし、個体xの選択に当たっては、個体xと現個体群内の既選択個体間のハミング距離を以下のように求め生存確率 $P_x$ により淘汰が行われる(図2.3参照)。

$$H_x = \min_{y \in G(t+1)} \frac{\text{ハミング距離}(x,y)}{\text{個体長}} \quad (1)$$

$$P_x = (H_x)^\alpha \quad (2)$$

本稿では $\alpha$ をハミングファクタとよび、 $0 < \alpha < 0.5$ の値をとる。この方式により、次のような性質が得られる。

- 最高ランクのものは常に選ばれる( $P_x = 1.0$ )。
- 同じ構造の個体は死滅される( $P_x = 0.0$ )。
- 高くランク付けされる個体でも、類似の個体が先にG(t+1)に存在すると、死滅する確率が高くなる(多様性の確保)。

(c)収束制御

世代が進むにつれて多様性確保のための相互排他度を徐々に小さくし、収束性を確保する必要がでる。これにより、ランクの高い個体の周辺に多くの類似の個体が集まってくることになる。しかし一方、このことはランクの高い個体が局所解の場合には、進化が進まなくなる可能性がある。このためGAUSSでは次のような収束制御を採用している。すなわち、 $\delta$ 世代間に、現世代の最良個体に進化がないときには、つぎの三つの収束制御を行う。

- $\alpha$ の値に $\beta$  ( $0.0 < \beta < 1.0$ )を掛け $\alpha \times \beta$ を新たな $\alpha$ とする。
- 現世代の最良値は局所解であると想定し、上位から $N \times \gamma$ 個の個体を強制的に死滅させる。これは進化過程での老害を除去する行為とみることができる。
- $N \times \gamma$ 個の個体を新しくランダムに生成し、G(t+1)に加える。

本稿では $\beta$ 、 $\gamma$ をそれぞれアニーリングファクタ、リボルーションファクタと呼び、また収束制御の間隔 $\delta$ をリボルーションインターバルと呼んでいる。なお、収束制御により強制的に死滅させても、それまでの最良個体は、最良個体保存プールに入れているので、消失することはない。

3. 評価実験と結果の考察

ここでは、実数空間の探索問題およびTSPにGAUSSを適用した結果について述べ、既存のGAの結果と比較を行いながらGAUSSの性質について考察する。

3.1 実数空間探索問題への適用

(1)DeJongのテスト問題

GAにおける古典的なテスト問題であるDeJongの関数 $f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$  [11]について実験結果をGENESISと比較して図3.1に示す。実験は10回であり、縦軸は最良値の各回の平均値を示す。関数 $f_1$ は、最適解近傍がなだらかな平原をもつ関数である。 $f_2$ は階段上の不連続な関数である。 $f_3$ は25個の急峻な山をもつ関数である。図3.1から明らかなように、いずれもGAUSSの方が良好な収束特性を持っている。ただし、 $f_2$ については、両者に顕著な差が現れていないが、これは平原状態での探索についてGAUSSに改良の余地があることを示している。

(2)多数の局所解を持つ関数

探索空間に多数の局所解が存在する場合のGAUSSの性質を見るために次のRastrigin問題の関数[7]を用いて実験を行った。

$$f_m = \sum_{i=1}^{15} \{x_i^2 + 50 \times (1 - \cos 2\pi x_i)\} \quad (3)$$

ただし、 $-40.96 \leq x_i < 40.96$ ,  $\Delta x_i = 0.01$

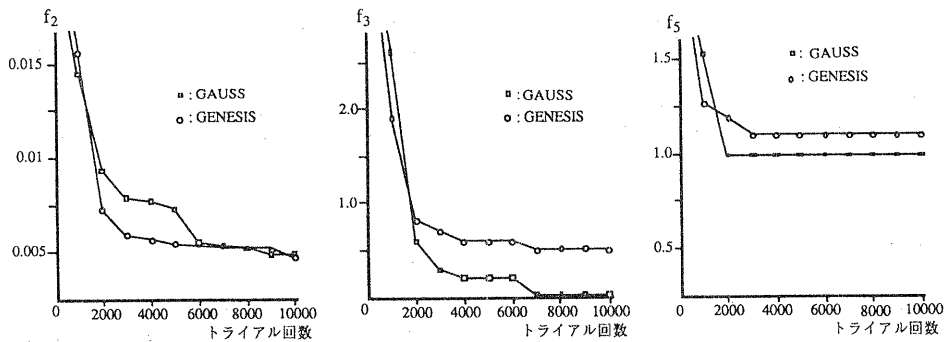


図3.1 DeJongのテスト関数への適用の結果

式(3)の関数は約  $80^{15}$ 個の局所解を持っている。各パラメータの組合せに対してGAUSSの適用結果を表3.1に示す。なほ、Trial回数は200,000回である。

表3.1 GAUSSによる関数  $f_m$  の探索結果

逆位率 $P_i$	突然変異率 $P_m$	リボルーションファクター $\gamma$					
		0.0		0.01		0.02	
		最良解の平均	最適解への収束頻度	最良解の平均	最適解への収束頻度	最良解の平均	最適解への収束頻度
0.0	0.003	10.09	3/10	10.36	0/10	6.97	1/10
	0.006	1.99	8/10	0.80	7/10	0.56	7/10
	0.008	1.20	7/10	0.88	8/10	0.90	7/10
0.1	0.003	8.96	1/10	7.74	2/10	8.09	2/10
	0.006	2.68	4/10	0.83	6/10	2.41	5/10
	0.008	1.20	7/10	2.18	3/10	1.76	5/10

この結果から次のようなことが明らかになった。

- (a)この問題では逆位オペレータの適用はやや逆効果となっている。
- (b)収束制御の効果が明らかに現れている。特に平均値は $\gamma$ の値によって改善が図られ、収束の安定化に寄与している。

なお、本表には、結果を示していないが、収束制御を行わなかったときは実験した範囲では最適解に収束しなかった。図3.2に、 $P_i=0.0$ 、 $P_m=0.006$ 、 $\gamma=0.002$ の場合の収束過程をGENESISと比較して示す。

### 3.2 ブラインドTSPへの適用

#### (1)実験方法

TSPは、組合せ最適化問題を解く能力を検証するテスト問題としてよく使われている。TSPに対してはヒューリスティック手法[12]やGAとヒューリスティック手法を組み合わせる手法[13]が有効であるが、ここではGAUSSの能力を検査することが目的であるのでヒューリスティックオペレータは適用しない。都市の座標には、他のGAとの比較のため文献[14]で報告させているOliverの30都市問題、Eilonの50都市、75都市問題のものを用いた。

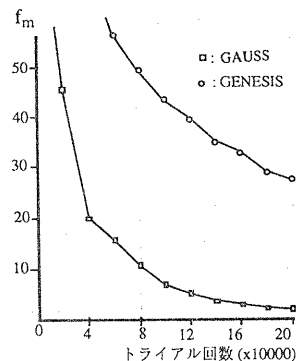


図3.2 関数 $f_m$ への適用結果

組合せ問題等では遺伝子の表現方法が、交叉オペレータとの関連で問題となる。TSPでよく用いられる方法は、巡回都市の順序を遺伝子のコードとする方法である。この場合、バイナリコードの場合のような単純な交叉オペレータを使

代表的な既存のオペレータであるOX(Order Crossover) オペレータ、ER(Edge Recombination)オペレータ、PMX(Partially Mapped Crossover)オペレータを用いた。なお、ERには、拡張された方式[14][15]が提案されているが、ここでは、適用しない。

ハミング距離の計算方法は、バイナリコードの場合と基本的に同じであるがTSPの性格上、次のような二つの遺伝子A、Bは、同じ順路を表しているので、両者の距離は0となり、パーミュテーションを考慮した計算が行われる。

$$A = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8)$$

$$B = (3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 1 \ 2)$$

## (2) Oliver 30都市問題

表3.2に、ハミングファクタ $\alpha$ を0.2とし、収束制御は行わないで実験した結果をGENITORと比較して示す。この問題の最適解は420であることが知られている。GAUSSは、この問題に対して逆位オペレータを導入することで大幅な収束性の向上を示している。特に、他のGAでは性能が良くないと報告されているPMXオペレータの場合でも、30回の実験のうち23回が最適解に収束している。なお、収束制御を導入した場合には、OXオペレータ、ERオペレータとも、約17,000のTrial回数で最適解に収束し、収束速度が向上する。しかし、30都市程度の問題では収束制御の必要性はほとんどないといえる。

表3.2 30都市問題の収束状況

GA	オペレータ	個体数	逆位率	最適解への収束頻度	最良解の平均値	Trial回数
GAUSS	OX	50	0.0	29 / 30	420.2	100,000
			0.1	30 / 30	420.0	23,000
	ER	50	0.0	24 / 30	420.4	100,000
			0.1	30 / 30	420.0	24,000
	PMX	50	0.0	0 / 30	583.7	100,000
			0.1	23 / 30	422.6	100,000
GENITOR	OX	1000	—	25 / 30	420.7	100,000
	ER	1000	—	30 / 30	420.0	30,000
	PMX	1400	—	1 / 30	452.8	100,000

## (2) Eilon 50都市、75都市問題

30都市問題の結果に基づいてEilonの50都市、75都市問題にGAUSSを適用した結果を表3.4、表3.5に示す。50都市、75都市の問題では、個体数をパラメータとして実験を行なった。他のパラメータは、下記の通りであるが、結果としては、表3.6に示すように従来Whitleyらが求めた最良値[14]よりも更に良い結果(50都市で425、75都市で541)が得られた。表3.4、表3.5ではこれらの値をとりあえず最適解としてその到達回数を最後の欄に示した。Eilonの50都市、75都市問題におけるGAUSSの効果については別の機会に報告する予定である。

<パラメータ>

交差オペレータ=ER、 $P_i=0.2$ 、 $P_m=0.0$ 、 $\alpha(0)=0.2$ 、 $\beta=0.8$ 、 $\gamma=0.2$ 、 $\delta=15$

表3.3 Eilonの50都市問題にGAUSSを適用した結果

群の中の個体数	最良解の最良値	最良解の平均	最良解での平均Trial回数	最適解への収束頻度
80	425	430.0	58,709	4 / 30
100	425	429.3	50,397	4 / 30
150	425	427.9	61,609	7 / 30
200	425	427.9	69,274	8 / 30

表3.4 Eilonの75都市問題にGAUSSを適用した結果

群の中の個体数	最良解の最良値	最良解の平均	最良解での平均Trial回数	最適解への収束頻度
100	543	557.2	108,070	0 / 20
150	541	554.8	117,287	2 / 20

表3.5 Eilon 50都市、75都市問題におけるGENITOR とGAUSSとの比較

問題	GENITOR				GAUSS			
	最良解の最良値	最良解の平均	個体数	Trial回数	最良解の最良値	最良解の平均	個体数	Trial回数
Eilon 50都市	428	439	600	25,000	425	430.0	80	34,010
Eilon 75都市	545	559	1,000	80,000	541	554.8	150	70,879

### 3.3 結果の考察

#### (1) GAUSSでの各種オペレーションの特性

##### (a) 交叉オペレーション

30都市TSPの結果にもみられるように、各種交叉オペレータに対してもGAUSSは健固な特性を持っている。

##### (b) 突然変移オペレーション

実数空間の探索問題fmの結果では突然変移率Pmは、GENESISの場合よりも大きくする方がよい収束結果が得られている(GENESIS:Pm=0.001、GAUSS:Pm=0.006)。これは、GAUSSのアルゴリズムでは現世代の個体が次世代の候補として残されるため、むしろ高めの方が探索効率が良くなるためと考えられる。一方、TSPの実験では、突然変移オペレーションの効果は確認できなかった。これについては、適用した交叉オペレータに突然変移の効果が暗黙に含まれているためと考えられる。

##### (c) 逆位オペレーション

実数空間の探索問題では、逆位オペレーションの効果はほとんどみられない。これに対して、TSPでは、逆位はきわめて有効なオペレータとなっており、GAUSSの一つの特性と考えられる。

##### (d) 淘汰オペレーション

DeJongのテスト関数や30都市TSP等の比較的小規模の問題では、ハミングファクタ $\alpha$ を0.2近辺とし、収束制御を適用しなくても安定した収束特性が得られている。fmや50、75都市TSPでは収束制御の効果が顕著である。50都市、75都市では、収束制御の適用により新しい最良解が発見されている。

#### (2) 実行時間

ハミング距離を個体群の多様性を得る手段として使用する場合には、個体長や個体数が大きくなるとそのための計算量が増大するという問題がある[11]。GAUSSは、実験結果からもみられるように他のGAよりも少ない個体数で結果が得られるという特性を持っているが、大きな探索問題では、生存確率Pxの計算がハミング距離に基づいているため、個体数の増加によってその計算量が増大するという問題を持っている。GAUSSでは、この問題に対して2.1節で述べたサブ個体群方式を検討している。GAUSSでのサブ個体群方式は概略以下の通りである。

(a) 小さな個体数Nを持つサブ個体群をM個設定する。

(b) 各サブ個体群は一定世代間隔で小数の個体を交換しながら独立に進化を進める。

(c) (b)において、交換される個体はハミング距離に基づく交換生存確率に従ってランクの高いものから規定の割合だけ選ばれる。

予備的な実験として30都市問題で総個体数を60に固定し、ハミングファクタ $\alpha$ を0.2、交換世代間隔を40世代、交換個体割合を0.1とし、各サブ個体群での収束制御は行なわないという条件で実験したサブ個体群GAUSSの結果を表3.5に示す。

表3.6 30都市問題におけるサブ個体群GAUSSの結果

個体数	サブ個体群数	最適解への収束頻度	最良解の平均	最良解での平均Trial回数
60	1	30 / 30	420	21,359
30	2	30 / 30	420	20,431
20	3	30 / 30	420	20,026
10	6	26 / 30	420.2	22,427

#### 4. むすび

以上本報告では、ハミング距離に基づく生存確率および動的な収束制御を適用した戦略的淘汰を導入することによって、個体群の多様性を維持しつつ安定した収束特性を図ることを目的とした新しいジェネティックアルゴリズム-GAUSSを提案した。GAUSSを実数空間の探索問題およびTraveling Salesman 問題 (TSP) へ適用して実験を行ない、以下のような結果が得られ、提案方式の有効性が確認できた。(a)GAUSSの基本アルゴリズムは、30都市程度のTSPではほぼ100%の頻度で最適解に収束する。(b)多数の局所解をもつ実数空間探索問題や都市数の大きいTSPにおいても、動的な収束制御により安定した収束特性を示す。(c)サブ個体群方式と組み合わせることによって、より効果的な方式となる。

今後、(a)スケジューリング等、他の問題への適用による効果の検証、(b)導入された各戦略の解析的検討、(c)並列プロセッサでの実装方式および(d)新しい淘汰戦略の追加導入などについて検討を進めていく予定である。

#### 参考文献

- [1] Holland, J. H.: Adaptation in Natural and Artificial Systems, The University of Michigan Press 1975.
- [2] Goldberg D.E.: Genetic Algorithm, Addison Wesley, Chapter 3, pp. 59-88 (1989).
- [3] Grefenstette, J.J.: GENESIS: A system for using genetic search procedures, Proc. of the 1984 Conf. on Intelligent Systems and Machines, pp. 161-165.
- [4] Whitley, D. and J. Kauth: GENITOR: A different genetic algorithm, Proceedings of the Rocky Mountain Conference on Artificial Intelligence, Denver, pp. 118-130 (1988).
- [5] Whitley, D.: The GENITOR algorithm and selective pressure: why rank-based allocation of reproductive trials is best, Proceedings of the Third International Conference of on Genetic Algorithms, Palo Alto, Morgan Kaufmann. pp.116-121 (1989).
- [6] Starkweather, T., D. Whitley and K. Mathias: Optimization Using Distributed Genetic Algorithms, Parallel Problem Solving from Nature, Springer-Verlag. pp.176-185 (1990).
- [7] Rudolph, G.: Global Optimization by Means of Distributed Evolution Strategies, Parallel Problem Solving from Nature, 1st Workshop, PPSN1, Dortmund, FRG, Proceedings, pp.209-213, Springer-Verlag (1990).
- [8] Schleuter, M.G.: ASPARAGOS an asynchronous Parallel Genetic Optimization Strategy, Proceedings of the Third International Conference of on Genetic Algorithms, Palo Alto, Morgan Kaufmann. pp.422-427 (1989).
- [9] 菅原、山村、小林: 形質遺伝を重視したGenetic AlgorithmによるTraveling Salesman問題への接近、第13回知能シンポジウム、pp. 139-144 (1991)。
- [10] Goldberg D.E.: Genetic Algorithm, Addison Wesley, Chapter 5, pp. 185-197. (1989)
- [11] Davis, L.: Genetic Algorithms and Simulated Annealing, Morgan Kaufmann, Chapter 5, pp. 61-73.(1987)
- [12] S. Lin and B. W. Kernighan, "An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem", Operation Research (1971).
- [13] Ulder, N.L.J., E.H.L. Aarts, H.J. Bandelt, P.J.M. van Laarhoven and E. Pesch: Genetic Local Search Algorithms for the Traveling Salesman Problem, Parallel Problem Solving from Nature, 1st Workshop, PPSN1, Dortmund, FRG, Proceedings, pp.109-116, Springer-Verlag (1990).
- [14] Darrell Whitley, Timothy Starkweather and D'Ann Fuquay, "Scheduling Problems and Traveling Salesmen: The Genetic Edge Recombination Operator", Proceedings of the Third International Conference of on Genetic Algorithms, Palo Alto, Morgan Kaufmann. pp.133-140 (1989).
- [15] T. Starkweather, S. McDaniel, K. Mathias, D. Whitley and C. Whitley, "A Comparison of Genetic Sequencing Operators", Proceedings of the Fourth International Conference of on Genetic Algorithms, San Diego, Morgan Kaufmann. pp.69-76 (1991).