

## 価格変動モデル：マルチエージェントモデルから統計モデルへ

佐藤 彰洋† 高安 秀樹‡

† 東北大学情報科学研究科 ‡ ソニーCSL

† 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2 丁目 1-1

TEL:(022)217-5469, E-mail:aki@sawada.riec.tohoku.ac.jp

‡ 〒 141-0022 東京都品川区東五反田 3-14-13

TEL:(03)5448-4380, E-mail:takayasu@csl.sony.co.jp

あらまし 為替や株価の価格変動が激しい変動を示すことは経験的に知られており、価格差の確率密度関数は Lévy 分布のような裾の広い確率密度関数により近似できることが示唆されている。しかし、なぜそのような変動を示すかは未解決の問題である。本稿では、売買の素過程に着目した単純なマルチエージェントモデルが、積と和の 2 種類のノイズをもつ確率過程で近似できること述べる。そして、そのような確率過程によってエージェントモデルで得られた変動が近似できることを数値シミュレーションによって示す。確率過程の応用例として、統計的に価格変動と同質の時系列を生成するアナログ回路を提唱する。

キーワード 価格変動, Lévy 分布, マルチエージェント, 確率過程, アナログ回路

## Dynamical numerical model of stock market price : from microscopic determinism to macroscopic randomness

Aki-Hiro Sato† Hideki Takayasu‡

† Graduate School of Information Science, Tohoku Univ.

‡ Sony Computer Science Laboratory

† 2-1-1 Katahira, Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN

TEL:+81-217-5469, E-mail:aki@sawada.riec.tohoku.ac.jp

‡ 3-14-13 Higashi-Gotanda, Shinagawa-ku, Tokyo 141-0022, JAPAN

Abstract It has pointed that a probability density function for price changes of exchanges or stocks follows a function with long tails such as Lévy distribution. However the reason why there are rapid fluctuations of price changes in the market have not been clarified yet. In this article we introduce a simple multi-agent model based on threshold dynamics. We show that fluctuations of the multi-agent model can be approximated by a stochastic process with both multiplicative and additive noise and numerically demonstrate the fluctuations of price changes in the multi-agent model by using the stochastic process. We propose an electric circuit which can generate fluctuations statistically equivalent to the price changes.

key words stock market price change, Lévy distribution, multi-agent, stochastic process, electric circuit

# 1 まえがき

為替や株価などの市場価格が激しい変動を示すことは経験的に知られているが、なぜそのような価格変動が生じるのかは、未解決の問題である。この基本的な問題を統計物理の手法でアプローチする研究が近年注目されている [1, 2]。経済活動は人間的な活動の集約であるが、参加する人数が非常に多くなれば人間の個性は打ち消し合い、客観的な統計法則が成立するかもしれないからである。実際、株価や為替の変動では価格差の確率密度関数が非 Gauss 性を示すことが報告されており、Lévy 分布と呼ばれる裾の広い分布で近似できることが指摘されている [3]。

我々は、目標を価格差の確率密度関数が Lévy 分布で近似できることに設定し、できるだけ単純なモデルの構成を考えてきた。本稿では、決定論的なエージェントによる架空の市場モデルを紹介する [4, 5]。更に、このモデルが乗算と加算の2種類のノイズを持つ確率過程で近似できることを示す。また、乗算・加算ノイズの統計的性質とモデルとの関係について議論する。この確率過程の連続時間系を用いることにより、電気回路で価格変動と統計的に同質の信号を生成する方法を提唱する。

## 2 マルチエージェントモデル

### 2.1 モデルの概要

株価の変動には様々な理由があると考えられる。政治や国際情勢などモデル化するには極めて表記困難な要因もある。我々は様々な要因のなかでも、特に売買の素過程に着目し、多数のエージェントが売買を行うこと自身が重要と考えた。また、単純化のため単一銘柄の売買に着目する。

為替や証券の市場では、証券を売買する人々が関わっている。以後、証券を売買するエージェントをディーラー (dealer) と呼ぶ。ディーラー間で株が売買される過程において、買い手 (buyer) と売り手 (seller) の立場が生じる。各ディーラーは売値と買値を提示し買値より売値のほうが高いとき売買が生じる。これを取引と呼ぶ。ここで、 $i$  番目のディーラーの売値  $S_i$ 、買値  $B_i$  と略記すると、 $S_i > B_i$  が成り立つ。そして、取引が成立する条件は  $i$  番目と  $j$  番目のディーラーに対して、 $B_i \geq S_j$  となる場合である。ここで、全てのディーラーの売値  $S$  と買値  $B$

の差が一定値  $\Lambda$  とすると、 $\Lambda = S_i - B_i$  となるので、結局取引が成立する条件として

$$B_i - B_j \geq \Lambda \quad (1)$$

を得る。この仮定により、全てのディーラーに対して買値  $\{B\}$  を考えるだけでよくなる。図 1 に示す

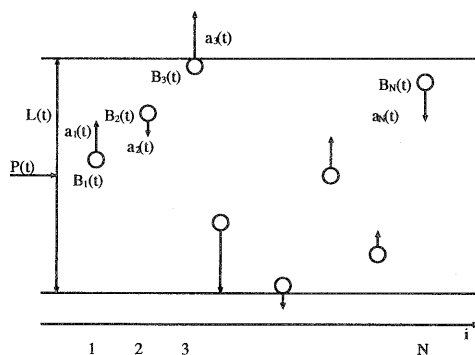


図 1: それぞれの丸がディーラー  $i$  の希望価格  $B_i(t)$  を表す。また矢印は  $a_i(t)$  を表わし、その向きは  $a_i(t)$  の符号を示す。 $L(t)$  は時刻  $t$  における最大と最小の希望価格の差であり、 $P(t)$  は市場価格である。

ように、市場に  $N$  人のディーラーがいて株の売買を行っているとする、市場で取引が成立するためには、全てのディーラーのなかで最大の希望買値と最小の希望売値の間で (1) 式が成り立つ必要がある。よって次式が取引の成立するための条件となる。

$$\max\{B(t)\} - \min\{B(t)\} \geq \Lambda \quad (2)$$

ここで、 $\max\{\dots\}, \min\{\dots\}$  はそれぞれ、全ての... に対する最大値、最小値を表わす。

売買が成立することにより市場価格  $P(t)$  は売値と買値の平均値で決ると仮定し、売買が起るまで、市場価格は変化しないとすると、 $P(t)$  は次のように表わすことができる。

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\max\{B\} + \min\{S\}) & (L(t) \geq \Lambda) \\ P(t-1) & (L(t) < \Lambda) \end{cases} \quad (3)$$

ここで、時刻  $t$  における最大と最小の希望価格の差を  $L(t) = \max\{B(t)\} - \min\{B(t)\}$  とおく。

売り手は手持ちの株を売ることができるまで売値  $S$  を下げ続け、買い手は株を入手できるまで買値

$B$ を上げ続けると仮定し、ディーラーは次のルールに従い買値(売値)を更新していくとする。

$$B_i(t+1) = B_i(t) + a_i(t) + c\Delta P_{prev} \quad (4)$$

ここで、 $\Delta P_{prev}$ は寸前に生じた市場価格の変化である。売り手の場合は売れるまで自らの希望価格を下げ続け、買い手の場合には買えるまで希望価格を上げ続けると仮定しているので、 $a_i(t) < 0$ のとき売り手、 $a_i(t) > 0$ のとき買い手を意味する。

今、どのディーラーも資産は少なく、売り手の次は買い手に、買い手の次は売り手に立場を変えなければならないと仮定すると、 $a(t)$ の更新は次のように書ける。

$$a_i(t+1) = \begin{cases} -|a_i(t)| & \text{(取引が生じたときに} \\ & \text{売り手のディーラー)} \\ |a_i(t)| & \text{(取引が生じたときに} \\ & \text{買い手のディーラー)} \\ a_i(t) & \text{(取引が生じなかったときの} \\ & \text{全てのディーラーと} \\ & \text{取引が生じたときに} \\ & \text{売り手と買い手以外のディーラー)} \end{cases} \quad (5)$$

初期値  $B_i(0), a_i(0)$  はそれぞれ  $[-\Lambda/2, \Lambda/2], [-\alpha, \alpha]$  の一様乱数で与える。また、 $P(0) = 0, \Delta P_{prev} = 0$  とする。このモデルでは初期値に確率的要因を用いているが、推移は完全に決定論的である。

結局パラメータはディーラー数  $N, a_i(t)$  の初期ゆらぎを決める  $\alpha$ , 閾値  $\Lambda$ , 過去の価格変化量  $\Delta P_{prev}$  の影響をあらわす  $c$  の4つである。

## 2.2 $c$ による時系列の変化

大きな  $N$  に対して市場価格  $P(t)$  の時系列がどのように変化するかを示す。  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  に固定し  $c$  をパラメータとして計算する。  $P(t)$  の時系列を図2に示す。  $c$  を大きくするに従って、  $P(t)$  の時系列の様子は変化し、より大きな変動をとまなうようになる。株価指数の解析に準じ [3], 1ステップ間の価格の変化量  $\Delta P(t)$  を

$$\Delta P(t) = P(t+1) - P(t) \quad (6)$$

で定義する。この価格の変化量  $\Delta P(t)$  がどのような確率密度に従うかシミュレーションにより調べる。 Lévy 分布の特徴としてべき則に従うことがあげられるので、特に確率密度関数  $p(x)$  がべき則に従う

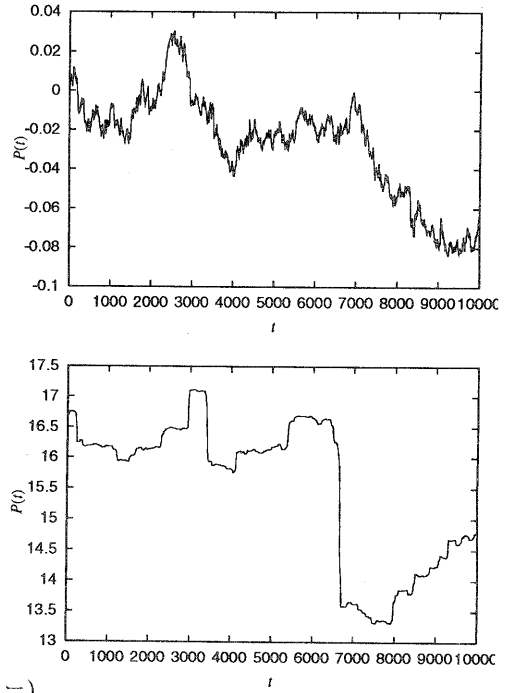


図2:  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  における  $c = 0.1$ (上),  $0.3$  (下) の場合の  $P(t)$  の時系列. 初期値  $B_i(0), a_i(0)$  はどの場合も同じである.  $c$  が大きくなるにつれて大きな変動が生じるようになる. 縦軸のスケールがそれぞれの図で大きく異なることに注意。

かに注目する。べき則を調べるには確率密度関数より次の累積分布のほうが便利である。

$$P(\geq |x|) = \int_{-\infty}^{-|x|} p(x') dx' + \int_{|x|}^{\infty} p(x') dx' \quad (7)$$

確率密度関数  $p(x)$  がべき則に従うとき、(7) 式の累積分布は

$$P(\geq |x|) \propto |x|^{-\beta} \quad (8)$$

となる。ここで、 $\beta$  はべき指数であり  $0 < \beta < 2$  である。

図3に  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  における  $\Delta P$  の累積分布を示す。直線的な部分は少ないものの累積分布はほぼべき則に従っており、 $c$  を大きくするにつれて累積分布のすそが伸びることが確認できる。すなわち  $c$  が増加するとべき指数  $\beta$  が減少していくことを意味している。

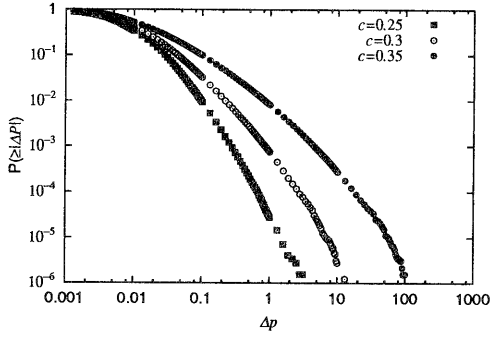


図 3:  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  における  $c = 0.25, 0.3, 0.35$  の場合の  $\Delta P(t)$  の累積分布. 直線部分は少ないものの  $c$  を大きくするにつれて累積分布の傾きは小さくなる傾向にある.

### 3 確率過程によるモデルの近似

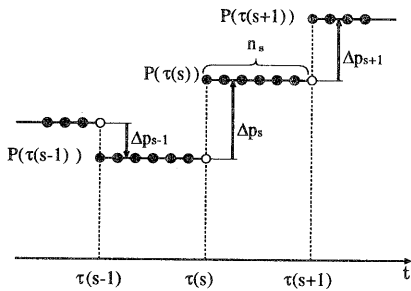


図 4: 詳細に見た時系列  $P(t)$  の概念図. 縦軸は  $P(t)$ , 横軸は  $t$  を表す. 黒丸は  $t$  における  $P(t)$  を表し, 白丸はその時刻において  $P(t)$  がジャンプしたことを示す.

#### 3.1 確率過程の導出

時系列  $P(t)$  を細かく見ると次のことに気づく.  $P(t)$  のジャンプはランダムに発生し, このジャンプの発生間隔は  $c$  の値とは無関係である. 図 4 に  $P(t)$  の時系列の概念図を示す. いま  $s$  回目に  $L(t) \geq \Lambda$  となった時刻を  $\tau(s)$  とすると,  $s$  回目に生じた  $P(t)$  のジャンプ  $\Delta p_s$  は

$$\Delta p_s \equiv P(\tau(s)) - P(\tau(s-1)) \quad (9)$$

で表わすことができる. シミュレーションによって  $P(t)$  の時系列から (9) 式に従い,  $\Delta p_s$  を求めることができる. 図 5 に  $c = 0.1, 0.3$  における  $\Delta p_s$  を示す.  $c$  が大きくなるにつれて,  $\Delta p_s$  の時系列は大きな変化を伴うようになる.

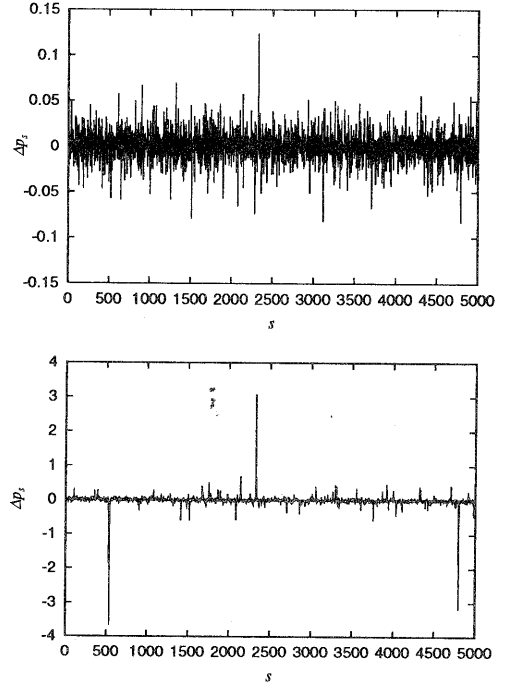


図 5:  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  における  $c = 0.1$  (上),  $c = 0.3$  (下) の場合の  $\Delta p_s$  の時系列. 初期値  $B_i(0), a_i(0)$  はどの場合も同じである.  $c$  の値が大きいくほど大きな変動が生じるようになる.  $c$  の値によって縦軸のスケールが大きく異なることに注意.

一方 (4) 式より,  $\tau(s)$  から  $\tau(s+1)$  の間では 1 ステップにつき全ディーラーは  $c\Delta p_s$  だけ移動するので, 次のジャンプ  $\Delta p_{s+1}$  が生じるまでに  $c(\tau(s+1) - \tau(s))\Delta p_s$  だけ全ディーラーは移動する. よって  $\Delta p_{s+1}$  には  $c(\tau(s+1) - \tau(s))\Delta p_s$  が含まれていなければならない. この項が  $c = 0$  で生じる変動とは独立に起きることは (4) 式から明かである. よって,  $c = 0$  で生じる  $P(t)$  のジャンプを  $\phi_s$  と定義すると,  $\Delta p_s$  は次の漸化式を満たす.

$$\Delta p_{s+1} = cn_s \Delta p_s + \phi_s \quad (10)$$

ここで、 $n_s$ は  $s$  回目のジャンプが発生してから  $s+1$  回目のジャンプが発生するまでの時間

$$n_s \equiv \tau(s+1) - \tau(s) \quad (11)$$

である。 $n_s, \phi_s$ は決定論的な過程により生成されているが、これらを確率変数と考えることにより近似的に(10)式は確率過程として扱うことができる。(10)式のように、乗算と加算の2種類のノイズをもつ確率過程はRandom Multiplicative Processと呼ばれ、多くの研究によりLévy分布に従う変動を与える確率過程であることがわかっている[6, 7]。

### 3.2 乗算・加算ノイズの統計的性質

確率過程による近似のために、 $n_s, \phi_s$ の統計的性質を特徴付ける必要がある。以下簡単化のため統計的性質の一次近似として確率密度関数による近似だけを考える。モデルが複雑であるため解析的手法で確率密度関数を求めることは困難だが、数値シミュレーションを用いれば直接  $n_s, \phi_s$  の値を求めることができる。直接求めた  $n_s, \phi_s$  の時系列からそれらの確率密度関数を数値的に求める。計算回数は多い方がよいが、計算が行える範囲で適当な回数として  $5 \times 10^6$  回とした。定義から  $n_s, \phi_s$  の変化は4つのパラメータのうち  $N, \alpha, \Lambda$  の3つに依存しており、明かに  $c$  とは独立である。

$N, \alpha, \Lambda$  をそれぞれ  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  と固定した場合、シミュレーションによって得られた  $n_s, \phi_s$  の1次,2次のモーメントは次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \langle n \rangle &= 3.1 \\ \langle n^2 \rangle &= 16.4 \\ \langle \phi \rangle &= -2.2 \times 10^{-5} \\ \langle \phi^2 \rangle &= 1.34 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また、図6,7に  $n_s, \phi_s$  の確率密度関数  $W(n), U(\phi)$  を示す。シミュレーションにより得られた  $W(n), U(\phi)$  はそれぞれ以下の離散的な指数分布, 平均0のLaplace分布によって近似することができる。

$$W(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\gamma}}{e^{-\gamma}} \exp(-\gamma k) \delta(n-k) \quad (13)$$

$$U(\phi) = \frac{1}{2\sigma} \exp(-|\phi|/\sigma) \quad (14)$$

$n_s, \phi_s$  の確率密度関数が(13),(14)式に従うと仮定した場合、 $n_s, \phi_s$  の1次,2次のモーメントと  $\gamma, \sigma$  との間

にはそれぞれ次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{1}{1-e^{-\gamma}} \\ \langle n^2 \rangle &= \frac{1+e^{-\gamma}}{(1-e^{-\gamma})^2} \\ \langle \phi \rangle &= 0 \\ \langle \phi^2 \rangle &= 2\sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

シミュレーションによって得られた各モーメントの値(12)を(15)式に代入することで  $\gamma = 0.389, \sigma = 0.008$  が得られる。図6, 図7に  $\gamma = 0.389, \sigma = 0.008$  として(13)式,(14)式をそれぞれ実線で描画した。概してよい近似になっていることがわかる。

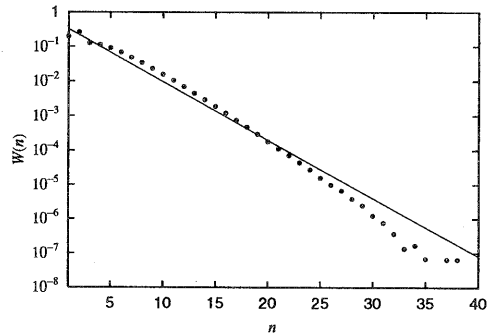


図6:  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  における  $n_s$  の確率密度関数  $W(n)$ . 黒丸はシミュレーションにより得られた値. 実線は  $\gamma = 0.389$  における離散的指数分布を表す.

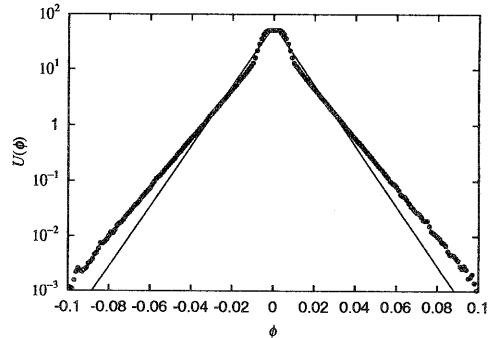


図7:  $N = 100, \alpha = 0.01, \Lambda = 1.0$  における  $\phi_s$  の確率密度関数  $U(\phi)$ . 黒丸はシミュレーションにより得られた値. 実線は  $\sigma = 0.008$  における Laplace 分布を表す.

### 3.3 確率過程の数値シミュレーション

以上の議論から、エージェントモデルの価格変動と統計的に同質な時系列を(10)式によって生成できることがわかる。(10)式において、乗算ノイズ $n_s$ 、加算ノイズ $\phi_s$ はそれぞれ(13)式、(14)式に従う分布をもつ確率変数として、数値シミュレーションを行う。図8に $c = 0.1, 0.3$ の場合の(10)式から生成された $\Delta p_s$ の時系列を示す。時系列の変化はエージェントモデルから得られた $\Delta p_s$ の時系列(図5)とほぼ同じである。更に詳しく調べるために累積分布を図9に示す。 $c$ の値に応じて直線部分の傾きが変化することがわかる。

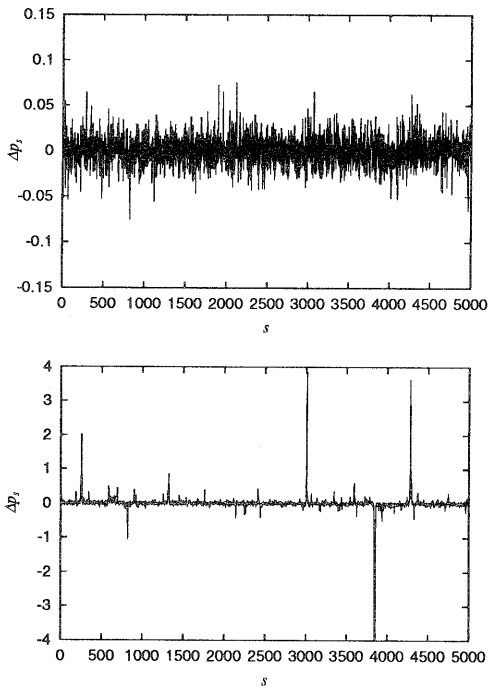


図8: 確率過程のシミュレーションから得られた $c = 0.1$ (上),  $c = 0.3$ (下)における $\Delta p_s$ の時系列。 $c$ の値が大きいほど大きな変動が生じるようになる。 $c$ の値によって縦軸のスケールが大きく異なることに注意。

エージェントモデルの $\Delta p_s$ の累積分布の様子と確率モデルの $\Delta p_s$ の累積分布の様子が異なる理由は、乗算ノイズ・加算ノイズの統計的性質を第一近似として確率密度関数のみで近似したためであると考えられる。このことは、乗算ノイズ・加算ノイズの性質として高次の相関が $\Delta p_s$ の時系列の性質に効果を

およぼしていることを示唆する。

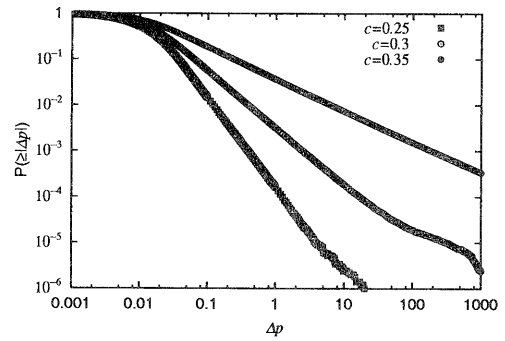


図9: 確率過程のシミュレーションから得られた $c = 0.25, 0.3, 0.35$ における $\Delta p_s$ の累積分布。 $c$ を大きくするにつれて累積分布の傾きは小さくなる傾向にある。

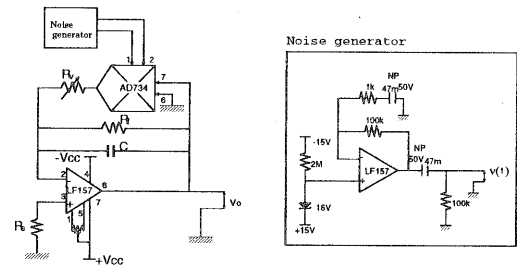


図10: Lévy分布に従うノイズを生成するアナログ電気回路の回路図。

## 4 アナログ電気回路による実現

Lévy分布に従う変動を生成する確率過程が導出できることを前節で示したが、統計的に同様の変動を生成するのであれば確率微分方程式でも可能である。Lévy分布に従う統計量をもつ時系列の高速な生成を考えると、離散時間系で計算するより連続時間系で計算したほうが容易な場合がある。確率過程(10)式に対応する確率微分方程式は次のように書かれる[8, 9]。

$$\frac{dx}{dt} = (\bar{\nu} + \nu(t))x(t) + \xi(t) \quad (16)$$

この確率微分方程式と等価な電気回路を提唱し、Lévy分布に従う時系列の高速な生成がこの回路によって

可能であることを実験的に示す。

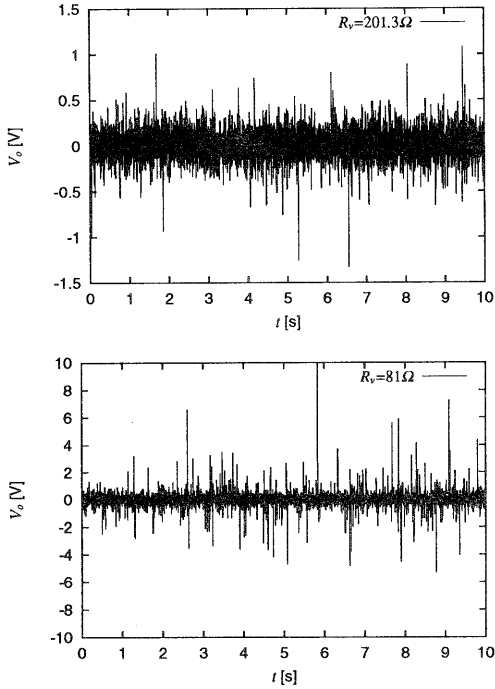


図 11: 可変抵抗  $R_v$  の値が大きい場合(上)と小さい場合(下) の出力電圧の時系列。

#### 4.1 回路の実装

図 10 に電気回路の回路図とノイズ発生回路を示す。ノイズ発生回路はツェナーダイオードで生じるショットノイズを OP アンプで増幅して取り出す回路で、ノイズの性質はホワイトノイズである。ノイズ発生回路で生じたノイズをアナログ乗算器により、フィードバック部分に掛けあわせることで、正帰還と負帰還が同時に実現される。回路の等価式は以下のとおりである。

$$\frac{dv_o}{dt} = \left( \frac{1}{R_f C} + \frac{k}{R_v C} \mu(t) \right) v_o + \xi(t), \quad (17)$$

ここで、 $v_o$  は回路の出力を表す。 $\xi(t)$  は加算的な働きをするノイズであり、OP アンプの熱雑音や環境雑音に起因している。このノイズの存在によって回路出力  $v_o$  は適切なパラメータにおいて自動的に Lévy 分布に従う時系列に引き込まれる。このよう

な振舞いは発振器が自発的に発振する現象に似ている。

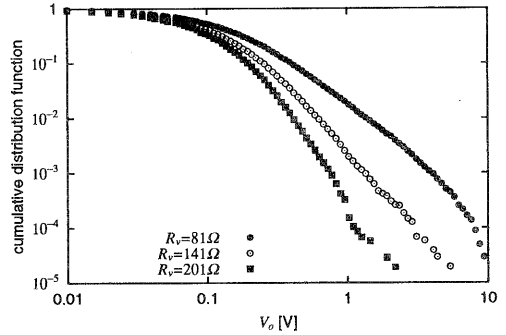


図 12:  $R_v = 81\Omega, 141\Omega, 201\Omega$  のときの出力電圧の累積分布。領域は狭いが直線部分が認められる。

#### 4.2 回路の振舞い

回路の等価方程式 (17) 式から  $R_v$  によって、乗算ノイズの強さを変化させることが可能である。これは、マルチエージェントモデルにおける  $c$  に当たるパラメータとなっている。図 11 から、 $R_v$  の値によって出力電圧の時系列が変わることが認められる。その累積分布の log-log プロットを図 12 に示す。 $R_v$  の値によって直線部分の傾きが変化することがわかる。10V の幅までしか値がないのは、OP アンプの増幅限界がほぼこの値だからである。直線に従う電圧領域は狭いがこれは加算ノイズ、すなわち、熱雑音や環境雑音が大きいためであり、加算ノイズを小さくすることができれば直線に従う領域は更に広がることは可能である。

### 5 むすび

売買の素過程に着目したマルチエージェントモデルから出発して、加算と乗算の 2 種類のノイズをもつ確率過程が導出可能なことを示した。導出された確率過程と対応する確率微分方程式を導入することで、Lévy 分布に従うノイズを高速に生成するアナログ電気回路を提唱した。このようなノイズは、今後経済のリスク計算の分野で、価格変動と統計的に同じノイズを用いた直接リスク計算を可能とするかもしれない。その場合、価格変動から乗算ノイズ・

加算ノイズの統計的特徴を確率密度や相関の意味で決定する方法が必要と考えられる。

謝辞 本研究を進める上で有益な議論及びご指導を頂きました東北大学電気通信研究所沢田康次先生に深く感謝致します。

[9] J. M. Deutsch, "Probability distributions for one component equations with multiplicative noise", *Physica A*, Vol.208, pp.433-444, 1994.

## 参考文献

- [1] M. H. R. Stanley, L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M.A. Salinger and H.E. Stanley, "Can statistical physics contribute to the science of economics?", *Fractals*, vol.4, no.3, pp.415-425, 1996.
- [2] S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner and Y. Dodge, "Turbulent cascades in foreign exchange markets", *Nature*, vol.381, no.27, pp.767-770, 1996.
- [3] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, "Scaling behaviour in the dynamics of an economic index", *Nature*, Vol.376, No.6, pp.46-49, 1995.
- [4] H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi and K. Hamada, "Statistical properties of deterministic threshold elements - the case of market price", *Physica A*, Vol.184, pp.127-134, 1992.
- [5] A.-H. Sato and H. Takayasu, "Dynamic numerical models of stock market price - from microscopic determinism to macroscopic randomness", *Physica A*, Vol.250, pp.231-252, 1998.
- [6] H. Takayasu, A.-H. Sato, and M. Takayasu, "Stable infinite variance fluctuations in randomly amplified Langevin systems", *Physical Review Letters*, Vol.79, No.6, pp.966-969, 1997.
- [7] A. S. Pikovsky, "Statistics of trajectory separation in noisy dynamical systems", *Physics Letters A*, Vol.165, pp.33-36, 1992.
- [8] H. Nakao, "Asymptotic power law of moments in a randomly amplified Langevin systems", *Physical Review E*, Vol.58, No.2 1591-1601, 1998.