解　説

多 値 論 理†

野 崎 昭 弘††

1. は じ め に

真・偽以外の“真理値”を扱う多値論理は，古くから関心をもたれてきた．それは真・偽が必ずしも明確でない“黄昏の領域”を扱う日常的な言語と，厳格で規範的な古典的２値論理とをつなぐ懸け橋と考えられていた．その役割は，人工知能（特に自然言語処理）の分野で論理学が脚光を浴びている現在，ますます重要になりつつある．また２進回路の設計と解析に論理関数の概念が有用であるように，３進回路などの設計・解析には３値（一般に多値）論理関数の概念が役立つと思われる．

この小論では，これまでに数多く提案されてきた多値論理の紹介を主眼として，“値”の意味と“演算”の諸定義を概観し，応用の可能性について論じてみたい．

2. 多値論理とは

2.1 古典論理と多値論理

古来，文・主張・推測・命題の真・偽に注目し，真なる前提から真なる結論を導く技法――いわゆる**推論** (inference) を扱う学問は，論理学と呼ばれてきた．またその成果である，推論にかかわる法則（公理と推論規則）の体系が，**論理** (logic) である．

論理学の対象となる文（以下**命題** proposition と呼ぶ）は，真か偽かが，少なくとも原理的に確定していなければならない．では，次のような文は命題といえるのであろうか？

（1） ゼータ関数の自明でない零点の実数部は，すべて 1/2 である．

（2） 邪馬台国は九州にあった．

（3） 明日は晴れる．

（4） 彼女は背が高い．

（5） この文は誤っている．

常識的に考えれば，（1），（2）は現在真・偽不明であるが，「少くとも原理的に」真・偽のどちらかであろうから，これらは命題と考えてよい．しかし（3）～（5）は曖昧であり，特に（5）は自己矛盾を含むので命題とはいえない．

このように考えると（3）～（5）は古典論理の対象から排除されるのであるが，（5）は論外としても，（3），（4）などは日常的によく使われる文である．したがって，これらの文の真・偽の程度を評価したり，このような文を前提あるいは結論とする推論は，非常に有用である[1]．

ここで真・偽の「程度」を表す尺度が問題になる．尺度はいろいろ考えられるが，何にしても真・偽以外の値，たとえば「どちらともいえない」を導入することになる．そのような値を，真・偽をも含めて**真理値** (truth value) という．すると従来の論理は真・偽という二つの真理値だけを問題にするので，**２値論理** (binary logic) と呼ばれる．これに対して，たとえば「真・偽・どちらともいえない」という三つの真理値を考える論理を**３値論理** (ternary logic) といい，一般に k 個の真理値を考える論理を **k 値論理**，無限個の真理値を考える論理を**無限多値論理** (infinitely many valued logic) という．３個以上の真理値を考える論理を**多値論理** (many-valued logic) といい[2]，２値論理をも含めて総称するときは**複数値論理** (multiple-valued logic) ということがある．

2.2 真理値の意味

確からしさのひとつの分類は，さきに例示した「真・偽・どちらともいえない」の３段階にわけることである．これらを数値 1, 0, 0.5 で表すと，確からしさの強弱が数値としての大小関係“>”に一致するので，都合がよい．逆にいうと，真理値

1, 0.5, 0

は「確からしさの程度」という意味をもっている．

段階をさらに細かく分けていくと，たとえば

† Multi-valued Logic by Akihiro NOZAKI (International Christian University, College of Liberal Arts, Division of Natural Sciences).

†† 国際基督教大学教養学部理学科

1, 0.75, 0.5, 0.25, 0

のような5段階（5値論理）も考えられる．これらはそれぞれ「真，真らしい，どちらともいえない，偽らしい，偽」というような，確からしさの程度を表している．さらに精密な表現を許すには，区間 $1\geqq x\geqq 0$ 内の任意の実数 x を真理値として認めてもよい．これを**連続値論理**という[3),4)]．

ここで次の点に注意しなければならない．ある文の真理値 x を，どのように定めればよいのだろうか？それには次の二つの立場が考えられる．

（1）「確からしさの程度」として，目的に応じて適当に定める．

（2） その文が真である確率を x とする．

後者においてはその文の真・偽が個々の具体的な場合について最終的には一義的に定まる，と仮定しなければならない．前者においては，たとえば例文（4）の真理値を p と考えるとき，身長の平均を m，標準偏差を σ として，次のように定めるのは妥当であろう．

「彼女」の身長 x が，$m+2\sigma$ 以上なら $p=1$，m 以下なら $p=0$

しかしその中間をどのように定めるか，またそれ以前に平均や標準偏差をどの範囲で考えるか（性別・年齢等を考慮するか否か）は一般的には決められない．

これらの論理では，二つの真理値のどちらかが真（1）に近いかがいつでも定まっていて，その意味で「任意の二つの論理値が比較可能」であった．しかし真・偽のほかに A（どちらともいえない），B（わからない）という二つの真理値を扱う特殊な4値論理においては，「確からしさ」についての順序関係は**図-1** のようになり，A，B のどちらが真に近いかはなんともいえない．また真・偽および D（どちらでもよい，don't-care）の3値を扱う論理については，「確定の度合」についての**図-2** のような順序関係を考えると便利な場合がある[5)]．一般論としては真理値の集合 X はなんらかの順序が定義されている**半順序集合**（partially ordered set）と考えるとよく，順序関係の性質によって X の分類ができる．特に重要なのは次の二つである．

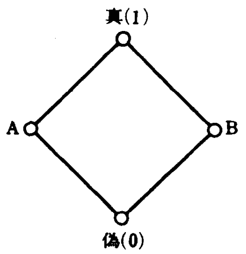

図-1　4値論理の例

「確からしさ」を示すハッセ図．これは可補束（本文参照）で，1，0，A，B の補元はそれぞれ 0，1，B，A である．

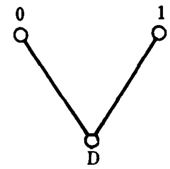

図-2　3値論理の例

「確定の度合」を示すハッセ図．$X=\{0,\ 1,\ \mathrm{D}\}$ 上の単調非減少関数を正則3値論理関数（regular ternary logical function）という．

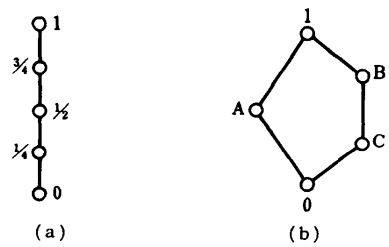

図-3　5値論理の例

（b）では B，C が A の補元，A が B，C の補元になっている（本文（3.1）参照）．

（1） **全順序集合**：任意の二つの真理値が比較可能．

（2） **束**：任意の二つの真理値 $p,\ q$ に対して，最小上界 $\sup\{p, q\}$ と最大下界 $\inf\{p, q\}$ が存在する．なお最小上界 $\sup\{p, q\}$ とは次のような性質をみたす u のことである．

（ア） $u\geqq p,\ u\geqq q$.

（イ） もし $w\geqq p,\ w\geqq q$ ならば $w\geqq u$.

最大下界も同じように定義できる（"≧" を "≦" におきかえればよい）．**図-3**（a）は全順序集合の例であり，同図（b）や図-1 は束の例である．なお図-2 はどちらでもない．

ところで2値論理については真理値1・0を電気信号の有・無と解釈することがある．そのことによって2進回路の設計や機能の解析が2値論理の言葉でできるようになる．2進回路を"論理回路"と呼ぶのはそのためである．同じような解釈は多値論理についても行われることがある．たとえば＋，0，－の電位をもつ3種類の信号を，3個の論理値で表現してもよい．

ただし“論理”値といっても真(1)とか偽(0)という意味は失われているので，数値表現においては

$1,\ 0.5,\ 0$

に限らず

$2,\ 1,\ 0$

あるいは

$1,\ 0,\ -1$

を使用してもよい．後者はいくつかの3進計算機の数値表現にも利用されている．

3. 多値論理における演算

3.1 論理演算

多値“論理”という場合，次の4つの演算が重要である．

$\vee$(または)，$\wedge$(かつ)，

$\neg$(～でない)，$\rightarrow$(ならば)

“$\neg$”だけが単項演算で，その他は2項演算である．集合 $\{1,\ 0.5,\ 0\}$ 上の3値論理では，“$\vee$”および“$\wedge$”はふつう次のように定義される．

(1) $x \vee y = \mathrm{Max}\{x, y\}$,

(2) $x \wedge y = \mathrm{Min}\{x, y\}$

“$\rightarrow$”, “$\neg$”については，論理値0.5の解釈に応じていろいろな定義が提案されているが，“0.5”を“わからない”と解釈した場合には次のような定義が自然であると思われる．

(3) $(\neg x) = (1-x)$

(4) $(x \rightarrow y) = \begin{cases} 1 & \cdots x=0 \text{ または } y=1 \text{ のとき}, \\ 0 & \cdots x=1 \text{ かつ } y=0 \text{ のとき}, \\ 0.5 & \cdots \text{それ以外の場合}. \end{cases}$

他の定義の例とあわせて $(x \rightarrow y)$ の数表を表-1に示す．

一般の場合については，真理値の集合 X がある順序“$\leqq$”について全順序集合であれば定義(1), (2)はそのまま使用できる．またすべての真理値 x が区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 内の実数であれば，“$\neg x$”については定義(3)が使えるし，“$x \rightarrow y$”は次のように定義することができる（(4)とは異なる：表-1(B)参照)．

(4′) $(x \rightarrow y) = \begin{cases} 1 \cdots x \leqq y \text{ のとき}, \\ 1-(x-y) \cdots x > y \text{ のとき}. \end{cases}$

真理値の集合 X がある順序≦について束をなす場合（集合 $\{x,\ y\}$ に対して上限 $x \cup y$ と下限 $x \cap y$ が定義できる）には，“$\vee$”, “$\wedge$”は次のように定義する．

(1*) $(x \vee y) = (x \cup y)$

(2*) $(x \wedge y) = (x \cap y)$

また“$\neg x$”は次のような性質をみたす y として定めることがある．

(3*) $(x \vee y) = 1$ かつ $(x \wedge y) = 0$

ただしそのような y の存在や一意性は一般の束では保証されないし，前の定義(3)の拡張にもなっていないので，これまでの流れからみれば「かなり特殊な定義」とみられる．しかし束論の用語では，上の条件(3*)をみたす y を x の**補元** (complement) といい，任意の x に対して補元が一意的に存在する束を**可補束** (complemented lattice) という．

表-1 演算 $(x \rightarrow y)$ の定義

x	y	(A)	(B)	(C)
0	0	1	1	1
0	0.5	1	1	1
0	1	1	1	1
0.5	0	0.5	0.5	0
0.5	0.5	0.5	1	1
0 5	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0.5	0.5	0.5	0.5
1	1	1	1	1

(A)が本文で述べた(4)による定義 (Kleene による) である．(B)は Lukasiewicz による定義で，本文の(4′)はこれの拡張である．(C)は Gödel による．

3.2 一般の演算

これまでに述べた“論理”演算はどれも次の性質をみたしていた．

(I) $x, y \in \{0, 1\}$ のとき，$(x \vee y)$, $(x \wedge y)$, $(\neg x)$, $(x \rightarrow y)$ の値はどれも2値論理の場合と一致する．

(II) $x=1$, $(x \rightarrow y)=1$ ならば $y=1$.

たとえば $\neg 1 = 0.5$ とか $(1 \rightarrow 0.5) = 1$ などという定義は認めなかった．しかし回路設計への応用を考える場合，そのような制約は考えなくてよい．それどころか，次のような不便な点が生じる．

演算$\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$および$\neg$によって変数と定数から組みたてられている多項式を**論理式**と呼ぶことにしよう．たとえば

$(x \rightarrow (\neg(y) \rightarrow x)),\quad \neg((\neg 1) \vee (\neg y))$

などは論理式である．すると，論理式の集合 X の上で定義されている1変数関数 $f: X \rightarrow X$ で，論理式によっては決して表せないものが存在する．

たとえば $X = \{1,\ 0.5,\ 0\}$ において

(5) $f(x) = \begin{cases} 1 & \cdots x=0.5 \text{ のとき}, \\ 0.5 & \cdots x=0 \quad \text{のとき}, \\ 0 & \cdots x=1 \quad \text{のとき} \end{cases}$

とすると，この関数はどんな1変数論理式 $P(x)$ によ

っても表すことができない．なぜなら，上に述べた性質(I)から，$P(0)$ の値は0または1でなければならないが，この f については

$$f(0)=0.5$$

であって，0にも1にもならないからである．一方，この $f(x)$ の値を "$\neg x$" で表すと，$X=\{1, 0.5, 0\}$ 上の任意の関数（多変数関数も含む）が

$\vee$，$\neg$ だけから成る多項式

によって表されることが知られている．一般に

$$X=\{0, 1, \cdots, k-1\}$$

に対して

$$(x\vee y)=\mathrm{Max}\{x, y\},$$
$$(\neg x)=(x\oplus 1)$$

とおく（$\oplus$は k を法とする加算：$(k-1)\oplus 1=0$）と，X 上の任意の（多変数）関数を "$\vee$，$\neg$だけから成る多項式" で表すことができる．このようなとき演算の集合 $\{\vee, \neg\}$ は**完全** (functionally complete) あるいは**万能** (universal) と呼ばれるが，たとえば次の集合は完全である[8]．

$$\{\wedge, \neg\},$$
$$\{\vee, \wedge, J_0, J_1, \cdots, J_{k-1}\},$$
$$\{W\}.$$

ただし

$$\neg x=x\oplus 1,$$
$$J_i(x)=\begin{cases} k-1 \cdots x=i \text{ のとき}, \\ 0 \quad \cdots \text{その他の場合} \end{cases}$$
$$W(x, y)=\mathrm{Max}\{x, y\}\oplus 1$$

とする．回路設計にあたっては，このような演算を実現する論理素子があるとよい．

どのような演算（あるいは一般に，関数）の集合が完全になるかは，3値の場合については Yablonski, J. によって，一般の場合は Rosenberg, I. によって解決されている．時間遅れを含む演算については疋田・野崎の結果があるが，ここでは深入りしないことにする[9)~11)]．

確率論理について　命題 P の成りたつ確率を P の論理値と定めるならば，$(P\vee Q)$ や $(P\wedge Q)$ の真理値は次のように定めるべきである．

$(P\vee Q)$＝"P または Q" が成りたつ確率，

$(P\wedge Q)$＝"P かつ Q" が成りたつ確率，

$(\neg P)=P$ が成りたたない確率，

$(P\rightarrow Q)=((\neg P)\vee Q)$.

すると次のような法則が成りたつ．

$$(P\vee Q)=P+Q-(P\wedge Q),$$
$$(P\vee(\neg P))=1.$$

しかしこれでは確率"論理"といっても実は初等的な確率論に他ならない．そこで確率論理については比較のために言及するに止め，深入りはしない．

3.3 演算の性質

ここでは最も標準的な場合，すなわちすべての真理値 x が区間 $0\leqq x\leqq 1$ 内の実数値である場合について述べる．その中には古典論理 $\{0, 1\}$ や3値論理 $\{0, 0.5, 1\}$，連続値論理（ファジィ論理）などが含まれている．なお k 値論理

$$\{0, 1, \cdots, k-1\}$$

も，真理値を

$$\left\{0, \frac{1}{k-1}, \cdots, \left(\frac{k-1}{k-1}\right)\right\}$$

におきかえて考えれば，やはり上の場合に属することになる．演算 $\vee$，$\wedge$，$\neg$ は **3.1** の定義(1)，(2)および(3)に従う．

(I)　恒　等　式

(ア)　可換法則：$(x\vee y)=(y\vee x)$,
$(x\wedge y)=(y\wedge x)$.

(イ)　結合法則：$(x\vee(y\vee z))=((x\vee y)\vee z)$,
$(x\wedge(y\wedge z))=((x\wedge y)\wedge z)$.

(ウ)　分配法則：$(x\vee(y\wedge z))=((x\vee y)\wedge(x\vee z))$,
$(x\wedge(y\vee z))=((x\wedge y)\vee(x\wedge z))$.

(エ)　べき等法則：$(x\vee x)=x$,　$(x\wedge x)=x$.

(オ)　復元法則：$\neg(\neg x)=x$.

(カ)　ド・モルガンの法則：$\neg(x\vee y)=((\neg x)\wedge(\neg y))$,
$\neg(x\wedge y)=((\neg x)\vee(\neg y))$.

(キ)　吸収法則：$(x\vee(x\wedge y))=x$,
$(x\wedge(x\vee y))=x$.

なお排中法則

$$(x\vee(\neg x))=1$$

および矛盾法則

$$(x\wedge(\neg x))=0$$

は必ずしも成りたたない．また命題 A の真理値を $\lambda(A)$，A が成りたつ確率を $P(A)$ で表すとき，もし

$$\lambda(A)=P(A),\quad \lambda(B)=P(B)$$

ならば次の不等式が成りたつ．

$$\lambda(A\vee B)\leqq P(A \text{ または } B),$$
$$\lambda(A\wedge B)\geqq P(A \text{ かつ } B).$$

等号は特殊の場合（$P_A(B)=1$ または $P_B(A)=1$）にしか成りたたない．

注意　命題 A の真理値は同じ文字 A で表すのがふつうである（文字 p, x についても同様）が，ここ

でだけ $P(A)$ と対比するために記号 $\lambda(A)$ を用いた．

（Ⅱ）恒　真　式

恒等的に

$$\alpha=1$$

をみたす論理式 α を，**恒真式** (tautology) という．たとえば

$$(p\to p)$$

は恒真式である．なおこの節では，演算“→”は(4′)に従って定義する．

$$\alpha=\beta$$

が恒等式であれば

$$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$$

が恒真式になる（逆も成りたつ）．多値論理では，演算∨，∧，¬だけから成る恒真式は存在しない．たとえば前にも触れたことであるが，

$$(p\vee(\neg p))$$

は $p=0.5$ のとき値が 0.5 となり，1にはならない．そこで演算“→”が重要になる．一方

$$(x\vee y)=((x\to y)\to y),$$
$$(x\wedge y)=\neg((\neg x)\vee(\neg y))$$
$$=\neg(((\neg x)\to(\neg y))\to(\neg y))$$

が成りたつので，演算∨，∧を演算→，¬で表すことができる．なお

$$(x\to y)=((\neg x)\vee y)$$

は2値論理の場合しか成立しないから，→を∨，∧，¬で表すことは一般の多値論理では不可能である．

次に演算→，¬から成る恒真式の例を示す．

（ア）$(p\to(q\to p))$

（イ）$((p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r)))$

（ウ）$((\neg p\to\neg q)\to(q\to p))$

{1, 0.5, 0} 上の3値論理では

（エ）$(((p\to\neg p)\to p)\to p)$

も成りたつ．

4. 多値論理の応用

4.1 情報の表現

すべての情報を0，1の組合せで表現することは現在のディジタル技術の基本であり，2値論理が回路設計に応用される根拠でもある．それに対して，3個以上の基本信号（あるいは基本記号）の組合せで表現することは，同じ量の情報を少い個数の信号で表現できることになり，時間的には「転送速度の短縮」，空間的には「配線数（あるいはピン数）の減少」という重要な効果をあげることができる．従来は信頼性の問題から2進回路・2値論理が主流であったが，先駆的には3進計算機の試作例もあり，3～5値の論理素子・記憶素子・集積回路の研究も着実に進められている[7]．

しかしその方面の応用については多値“論理”というよりも有限“代数系”と考えるべきなので，これ以上は触れない．

4.2 論理の表現

すでに述べたように，真理値を絶対的な“真・偽”に限定せず，さらにきめ細かく扱おうとすれば，ほとんど必然的に多値論理を考えざるをえなくなる．ただ「どのような真理値を認めるか」についてはいろいろな立場があり，一般論では扱いにくい．かなり詳しく論じられ，応用まで結びついているのはおそらくファジィ論理だけであろう．

4.3 弱い論理のモデル

多値論理のひとつの重要な役割は，“弱い論理”の特徴づけである．ここで“弱い”論理とは，「排中法則を認めない」論理をいう．古典論理で絶対視されてきた排中法則

“P であるか，さもなければ $\neg P$ である”

は，無限集合を扱う際にいくつかの難点を生じることから，20世紀に入ってからこれを否定する人々が現れた．そこで論理そのものが問い直されることになった．

では論理とは，そもそもなんなのであろうか．命題を正しく記述し，正しい前提から正しい結論を推論する体系のことであろう．もしこの体系がきちんと定められれば，“正しい論理式”の集合 L が確定するはずである．そこで抽象的には，その集合 L のことを**論理** (logic) と呼んでもよい．その場合，論理 L は次の性質をもっていなければならない．

論理式は変数 $p,q,r,\cdots$，演算 →，¬，…などから成るとする．

（1）論理式 α の中の変数 p を，すべて論理式 β におきかえて得られる記号列 r も，ひとつの論理式である．しかも，もし $\alpha\in L$ ならば，$r\in L$ である．

（2）α,β が論理式ならば，$(\alpha\to\beta)$ も論理式である．しかも，もし $\alpha\in L$ かつ $(\alpha\to\beta)\in L$ ならば，$\beta\in L$ である．一例として，3.1 で述べた {1, 0.5, 0} 上の演算(3)，(4′)に対する恒真式の全体を L_0 とすると，L_0 はひとつの論理になっている．このようなとき，

$$X=\{1,\ 0.5,\ 0\}$$

上の演算 {→，¬} は L_0 の**モデル** (model) になっ

ている，という．種々の論理に対して，多値論理がそのモデルになる．

なお論理式の集合 L を，公理と推論規則の体系によって特徴づけることもある．たとえば上記の L_0 については，次のような体系でよい（論理式は変数と演算→，¬のみから成るとする）．

（Ⅰ） 公理：3.3（Ⅱ）の（ア）～（エ）

（Ⅱ） 推論規則

（ア）代入：論理式 α から，α の中の変数 p をすべて論理式 β におきかえて得られる記号列 γ を導く，

（イ）分離：論理式 α および $(\alpha\to\beta)$ から，β を導く．

推論規則は，公理およびすでに導かれた（証明された）論理式から新しい論理式を導く（証明する）ための規則である．古典論理に対して，それより弱い論理がこのように多値論理に基づいていろいろな形で特徴づけられるわけである．

5. まとめ

多値論理の応用は，次の三つにまとめられる．

（1） 多進回路の表現

（2） “正しさ”のきめ細かい表現

（3） “弱い”論理の表現

応用上は，“確実とはいえないが，妥当性の高い結論”を導きだすヒューリスティクスなど，いわば“強い”論理も重要なのであるが，従来の多値論理はちょうど正反対のところに止まっているように思う．

特殊な多値論理として応用上重要なファジィ論理については，制御理論との関連を述べなければあまり意味がないので，ここでは論理としての位置づけを示すのにとどめた．詳しいことは他の文献によって補っていただきたい[12),13)]．

参考文献

1) Lukasiewicz, J.: On Three-valued Logic, in “Polish Logic 1920-1939”, ed. by S. McCall, Oxford (1967).
2) Rescher, N.: Many-valued Logic, McGraw-Hill (1969).
3) Preparata, F. P. and Yeh, R. T.: Continuously valued logic, J. C. S. S., Vol. 6, p. 387 (1972).
4) Zadeh, L. A.: Fuzzy Logic and Approximate Reasoning, Synthese, Vol. 30, pp. 407-428 (1975).
5) Mukaidono, M.: Regular Ternary Logic functions, IEEE Trans. on Computers, C-35, pp. 179-182 (1986).
6) 三根，長谷川，島田：三進四則演算方式装置，情報処理，Vol. 12, pp. 528-531 (1971).
7) Special Issue on Multiple-valued Logic, IEEE Computer, Vol. 21 (1988).
8) Webb, D. L.: Definition of Post's Generalized Negative and Maximum in Terms of one Binary Operation, American J. of Mathematics, Vol. 58, pp. 193-194 (1936).
9) Yablonski, S. V.: Functional Structures in k-valued Logic, Trudy Mat. Inst. Steklov., Vol. 51, pp. 5-142 (1958).
10) Rosenberg, I.: La Structure des Fonctions de Plusieurs Variables sur un Ensemble Fini, C. R. Acad. Sci. Paris, Séries A-B, Vol. 260, pp. 3817-3819 (1965).
11) Hikita, T. and Nozaki, A.: A completeness criterion for spectra, SIAM J. on Computing, Vol. 6, pp. 285-297 (1977).
12) Zadeh, L. A.: Fuzzy Algorithms, Information and Control, Vol. 12, pp. 94-102 (1968).
13) 菅野道夫：あいまい集合と論理の制御への応用 計測と制御，Vol. 18, pp. 8-18 (1979).

（平成元年3月8日受付）