

解説

Boundary-Fit 曲線座標変換法による
流体・電磁解析†



三木 一 克†

1. はじめに

計算機の演算速度と記憶容量の飛躍的な増大にともなう、数値シミュレーションを用いた物理現象の高精度解析が可能となり、工学の広範囲の分野で新製品の開発や従来製品の大幅な改良に効果的に利用されつつある。連続系の物理現象を数値的に解析する数値シミュレーションでは、物理現象を支配する偏微分方程式を解析領域内にとった多数の座標格子点で離散化し、連立1次方程式または固有値問題の計算に帰着させる方法が多くとられている。この場合、数値解の精度、安定性、収束性の観点から、離散化に際して、(1)境界形状の正確な取り扱い、(2)物理量変化の大きい領域への格子点の集中、(3)領域全体にわたる格子点のなめらかな配置、(4)隣接する格子点間の相対関係の最適化、といった条件を満たすことが必要となる。特に、工学上の多くの問題では、粘性境界層、応力集中といったように、境界近傍の流速、応力などの

物理量変化の大きな局所的領域が存在し、しかも領域全体の特性を支配するため、上記(1)、(2)の条件をいかに満たすかが、数値解析上重要となる。

Boundary-Fit 曲線座標変換法 (Boundary-Fitted Coordinate Transformation Technique)¹⁾ は、実空間上の解析領域を直交格子からなる形状の簡単な領域に座標変換し、物理現象を支配する偏微分方程式を写像空間で解く手法である (図-1)。この方法では、写像空間から実空間への逆座標変換によって、境界形状に沿った曲線座標格子を自動的に生成することができ、さらに解析領域全体にわたって座標格子の配置を制御することができるため、上述した(1)~(4)の条件を容易に満たすことができる。本手法は、1970年代の後半に、航空機の流体 (外部流れ) 解析法として開発され、その後、一般の熱流体機器内の流体 (内部流れ) 解析のほか電磁解析、構造解析など、流体以外の工学分野に応用範囲を広げつつある²⁾。

以下では、Boundary-Fit 曲線座標変換法の概要について述べるとともに、著者らが実施した流体解析および電磁解析への応用例を示す。

2. Boundary-Fit 曲線座標変換法の概要

2.1 曲線座標格子生成法

境界形状に沿った曲線座標格子を生成する方法として、

- (1) 複素変数を用いた古典的方法
- (2) 内挿関数を用いた代数的方法
- (3) 偏微分方程式を用いた解析的方法

などがある。このうち、解析的方法³⁾は、偏微分方程式を数値的に解くことにより座標格子点を求めるもので、解析領域の全境界上で格子点の座標値 (あるいは格子線の勾配) が与えられる場合には楕円型偏微分方程式が、また境界の一部で格子条件が設定される場合 (たとえば航空機翼まわりの外部流れなど) には双曲型あるいは放物型偏微分方程式が使用されている。この

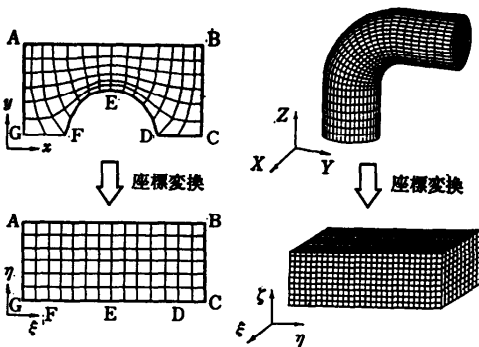


図-1 Boundary-Fit 曲線座標変換法

† Fluid Dynamics and Electromagnetics Simulations by Boundary-Fitted Coordinate Transformation Technique by Kazuyoshi MIKI (Energy Research Laboratory, Hitachi Ltd.).

† 日立製作所エネルギー研究所

方法は他の方法に比べて2次元および3次元幾何形状に対する適合性に富み、格子間隔や形状の制御が容易である。特に Thompson によって楕円型偏微分方程式の一種であるポアソン方程式を用いた方法が提唱された後、急速に実用化が進められている。以下では、Thompson の方法¹⁾を紹介する。

2.2 Boundary-Fit 曲線座標系

図-1 に示した2次元領域の座標変換について考える。写像平面上の正方格子点 (ξ, η) は、次のポアソン方程式により、実平面上の曲線座標格子点 (x, y) に1対1に対応づけることができる。

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{1}$$

物理現象を支配する偏微分方程式は、後述するように正方格子からなる写像平面上で解くため、上記のポアソン方程式の独立変数 (x, y) と従属変数 (ξ, η) を入れ換えると、下記の楕円型偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2 [x_{\xi} P(\xi, \eta) + x_{\eta} Q(\xi, \eta)] \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2 [y_{\xi} P(\xi, \eta) + y_{\eta} Q(\xi, \eta)] \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, & \gamma &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \\ \beta &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, & J &= x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi} \end{aligned}$$

上式は、ポアソン方程式(1)に比べて関数形が複雑になるが、境界条件を C-D-E-F-G などの直線上で設定することができ、さらに写像平面上の格子間隔を単位長さに採ることができるという利点がある。写像平面上の格子点 (ξ, η) に対応する実平面上の格子

点 (x, y) は、境界上の座標値 $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ を Dirichlet 境界条件として与え、上式を数値的に解くことにより求めることができる。

図-2 に $P=Q=0$ として(2)式を用いて生成した曲線座標格子の例を示す。図中、線分 AB および CD は、写像平面上の η = 一定の境界に対応し、また、線分 BC および AD は ξ = 一定の境界に対応する。境界上の格子点の設定方法を変えることによって、実平面上の領域内部に生成される座標格子の配置を変えることが可能である。

(2)式の関数 P, Q は、格子間隔の粗密を制御する作用があり、Thompson らが開発したプログラム TOMCAT では次式が使用されている³⁾。

$$\begin{aligned} P(\xi, \eta) &= -\sum_{i=1}^n a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) \\ &\quad \times \exp[-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}] \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、右辺第1項は $\xi = \xi_i$ の格子線に、また第2項は (ξ_j, η_j) の格子点に周囲の格子を引き寄せる作用をし、それぞれ係数 $(a_i, c_i), (b_j, d_j)$ によってその度合いを調節することができる。なお、 $\operatorname{sgn}(x)$ は x の符号を意味する。

図-3 に、上式を用いて図-2 の座標格子を引き寄せた結果を示す。図中、矢印で示した格子点あるいは格子線に周囲の格子を引き寄せることにより、ひずんだ格子形状や不均一な格子サイズを修正することができる。

なお、関数 P, Q を用いて、境界面と格子点との距

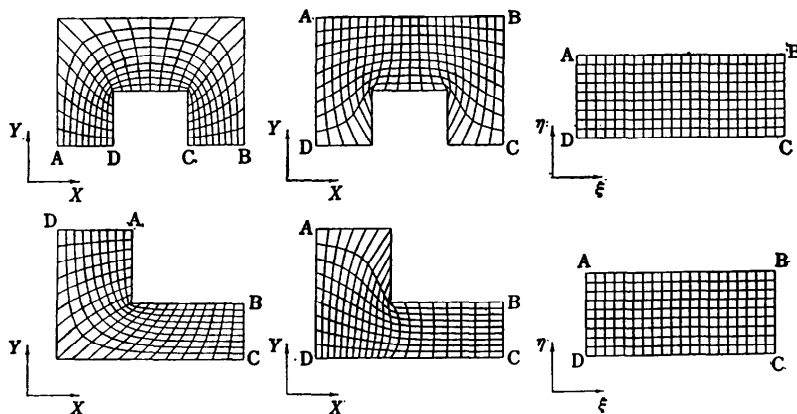


図-2 実平面と写像平面の対応関係

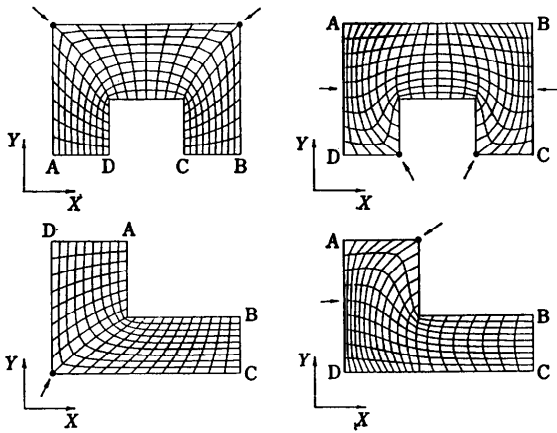


図-3 関数 P, Q による座標格子の制御

離あるいは境界面と格子線との交差角度を設定値に自動的に調節する方法なども開発されている⁴⁾。図-4に、底面に突起を有する直方体内に生成した三次元座標格子の例を示す。図の左側は $P=Q=0$ に相当し、右側は自動調整した結果である。後者の図では、底面とその内側の格子面との距離が一定値となるように格子が引き寄せられ、また格子線が底面に直交している。このような格子制御は、流体解析における粘性境界層の高精度解析などに利用されている。

2.3 偏微分方程式の変換

解析領域を実平面から写像平面に変換するのにもなって、物理現象を支配する偏微分方程式の独立変数を (x, y) から (ξ, η) に変換する必要がある。たとえば、微分可能な任意の関数 f の x, y に関する1次微分は、写像平面上の変数 ξ, η を用いて、次のように表すことができる。

$$f_x = \frac{1}{J} [(y_\eta f)_\xi - (y_\xi f)_\eta]$$

$$f_y = \frac{1}{J} [-(x_\eta f)_\xi + (x_\xi f)_\eta]$$

(4)

正方格子からなる写像平面上で偏微分方程式を解く場合、実平面上の解析領域の幾何形状に関する情報は、1次微分 $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$ および α, β, γ , ヤコビアン J を通して考慮されることになる。これらの量は(2)式の楕円型偏微分方程式を解き、正方格子点 (ξ, η) に対する曲線座標格子点 (x, y) の1対1対応が求まれば、容易に計算することができる。したがって Boundary-Fit 曲線座標変換法では、曲線座標格子を生成し、上記諸量を計算する部分と、写像平面上で物理量を計算する部分とを互いに独立にした構成が普通採られる。前者は、流れ場、応力・歪場、電磁場などを支配する偏微分方程式に共通に利用ことができ、後者は解析領域の幾何形状とは独立に、写像平面上の正方格子で離散化したアルゴリズムが適用できる。

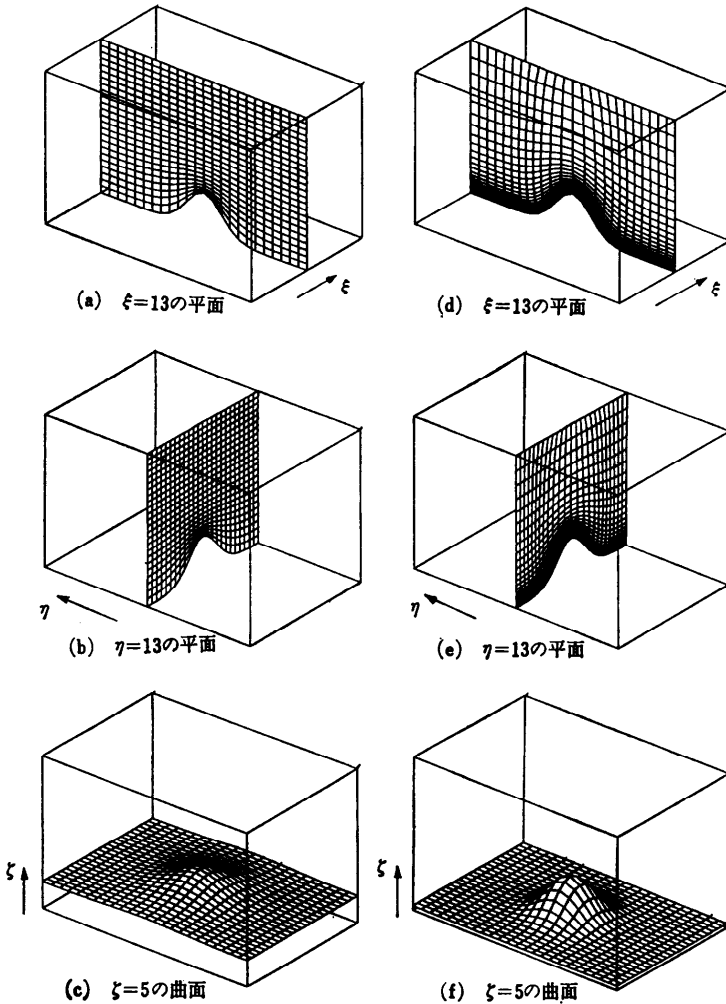


図-4 座標格子の集中・直交化

3. 流体解析への応用

3.1 複合立体内の流体解析⁵⁾

実際の製品形状は一般に、複数の基本立体から構成された複合立体形状をしている場合が多い。このような体系内に三次元曲線座標格子を生成するには、2.2で述べた方法を三次元に拡張し、実空間上の複合立体を写像空間上の直方体に座標変換する方法が考えられる。しかしこの場合、境界条件として直方体の6つの表面に複合立体表面を対応させることが難しく汎用性に欠ける。また生成された曲線座標格子の粗密およびひずみが大きくなる可能性がある。複雑な三次元領域内に曲線座標格子を生成する有効な方法の一つとして、解析領域をいくつかの部分領域に分け、部分領域ごとに曲線座標格子を生成する方法 (Multiblock Method) が開発されている⁶⁾。この方法の最大の問題点は、部分領域間の境界面で座標格子が折れ曲がり、物理計算における数値誤差を増大させることである。

この問題点を解決するため、6面体分割法⁷⁾を開発した。以下にその概要を示す。

図-5に示すように、三次元領域を複数の部分領域(6面体)に分割し、個々の6面体ごとに作成した曲線座標格子を合成することにより領域全体の座標格子を生成する。その際、6面体間に重複領域を設定し、一方の領域の内部格子を他方の領域の境界上の格子に

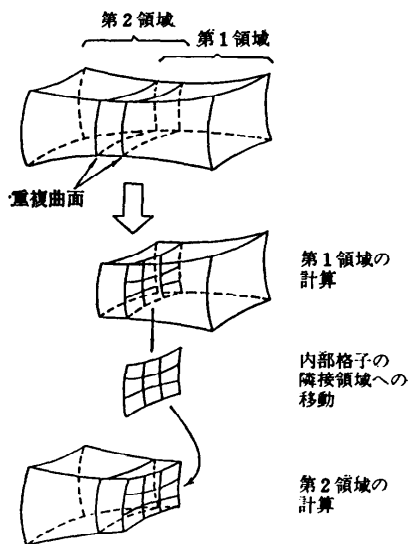


図-5 6面体分割法

一致させる。6面体内の座標格子は、重複領域にある隣接6面体の内部格子を境界条件として、2.2で述べた方法を三次元に拡張した方法により求める。この6面体分割法は、関数論の分野で用いられているシュワルツの交替法⁸⁾を Boundary-Fit 曲線座標変換法に組み合わせたものと考えられる。この方法では、

(1) 球、円柱、直方体のような基本立体形状の組合せにより、任意の三次元形状を系統的に取り扱うことができる(図-6にエルボ、円柱、シェル、半球を用いて合成した例を示す)。

(2) 重複領域の設定により、6面体間の境界面において座標格子線の1次微分連続性が保証され、前述の数値誤差増大の問題が解消できる。

(3) 領域分割により計算機主記憶容量を低減することができる。

Multiblock Methodでは、物理計算は通常、体系全体を同時に取り扱うが、6面体分割法では、三次元の曲線座標格子生成と同様に、部分領域ごとに物理計算を実施する。

流体解析への応用例として、熱交換器シェル部の非圧縮性流れ ($Re=10^6$) の解析結果を図-7に示す。シェル部は管群の配列ピッチが異なる二領域から構成されている。本例では、この管群領域の対称性から60度セクタを対象とし、上部および下部の配管をそれぞれ1個の6面体に、また、シェル部を6個の6面体に分割した。これにより、計算機主記憶容量は、2個の配管とシェル部の3分割に比べて約1/4に低減できた。熱交換器内の燃焼ガスは、配管内を下降し、バフフル板によって直角に向きを変え、半径方向の外向きに放射状に流れ、さらに、バフフル板と外筒との間隙からシェル部下半部に流入し、半径方向の内向きに寄り集まって、配管から、下方向に流出する。シェル部上半部では、上部案内板の下側で大きな渦が発生し、流入を阻害していることが分かった。本解析によって、上部案内板の内径を最適化し、案内板で二分さ

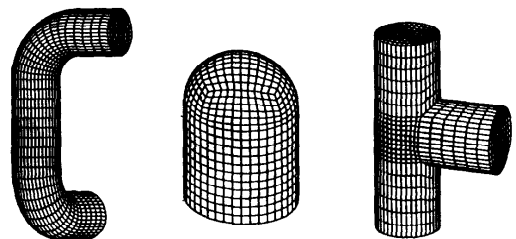


図-6 6面体分割法による基本立体の合成

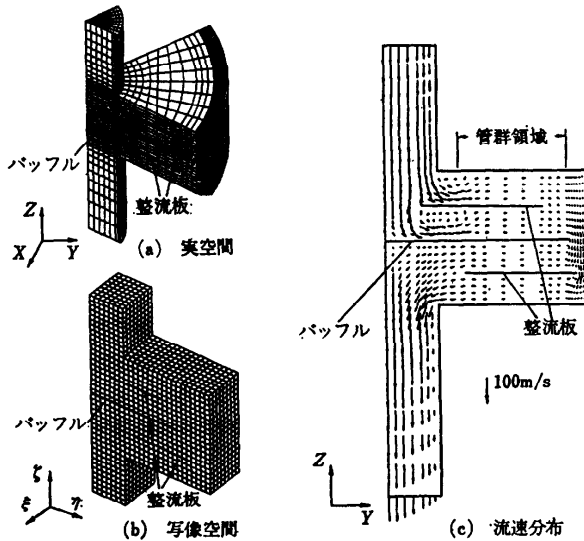


図-7 熱交換器内の非圧縮性流体解析結果

れた流路での流量を均等に配分することが可能となった。

3.2 回転移動境界内の流体解析⁹⁾

前述したように、Boundary-Fit 曲線座標変換法では、座標格子を生成する部分と、写像平面上的の正方格子で物理量を計算する部分とを独立に取り扱うことができる。後者の計算では、実際の形状は一次微分 ϵ_i やヤコビアン J などにより考慮される。したがって、この手法を自由液面のように境界形状が時間的に変化

する、いわゆる移動境界問題に適用した場合、一次微分 ϵ_i やヤコビアン J の値は時間的に変化するが写像平面上的の固定された座標格子を用いて物理現象を解析することができる。また、移動する境界に沿った曲線座標格子を各時間ステップごとに自動的に生成することができる。

移動境界問題に応用した例として、回転する翼まわりの二次元非圧縮性層流の解析結果を図-8 に示す。本例では内側に6枚の回転翼、外側に6枚のバッフルが存在し、回転翼は 10 rpm で回転している。解析体系は対称性を考慮して 1/6 セクタを採った。図-8 は、静止状態から 1.5 秒まで経過したときの座標格子および流速分布を表している。座標格子は移動する回転翼の形状に沿って各時間ステップごとに自動的に生成される。翼の回転によって生じる周方向の流れとともに、翼先端部に局所的な渦が生じ、さらに翼がバッフルを通過することによって渦が縮小する様子が分かる。

4. 電磁解析への応用

4.1 カラーブラウン管電子銃の電子軌道解析¹⁰⁾

解析対象とした B-UPF 型 (Bi-Uni Potential Focus 型) 電子銃¹¹⁾ の電極形状を図-9(a) に示す。図に示すように B-UPF 型電子銃は、3 極部、プリフォーカス部を形成する 3 個の電極 (K, G_1, G_2) と主レンズ部を形成する 4 個の電極 (G_3, G_4, G_5, G_6) からなる。主レンズ部は、 G_3 と G_4, G_4 と G_5, G_5 と G_6 の間に形成される 3 個の複合レンズからなっている。

図-9(b), (c) に、領域分割図および座標格子の鳥瞰図を示す。本例では、90 度セクタを対象とし、全体を 27 個の 6 面体に分割した。体系全体の格子総数は、101,500 点であるが、上記分割により、計算機主記憶容量を分割しない場合の 1/6 以下に低減し、計算を 6 MB で実行可能とした。図-9(c) に示すように、座標格子は、電子ビームによって作られる空間電荷の密度が高い 3 極部および、電子軌道が集中する中心軸近傍に集中させ、解析精度の向上を図った。z 方向の格子間隔は、主レンズ出口付近で 250 μm 、カソード近傍で 4 μm である。

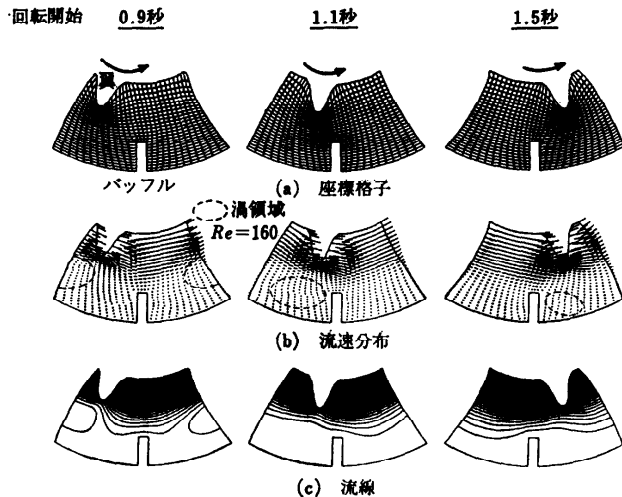


図-8 回転体内の流体解析結果

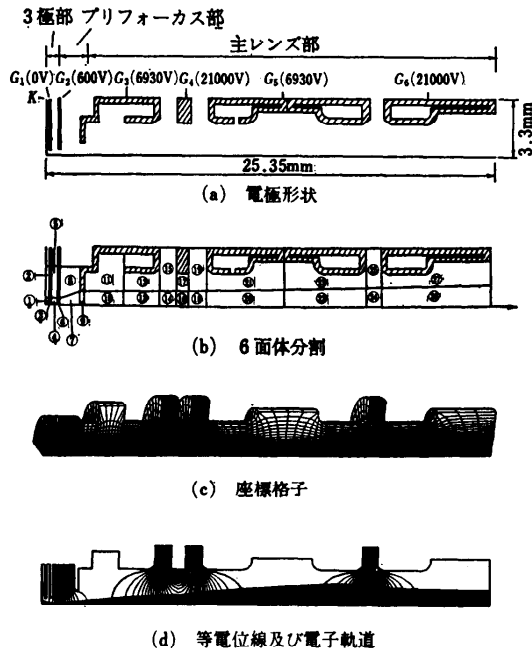


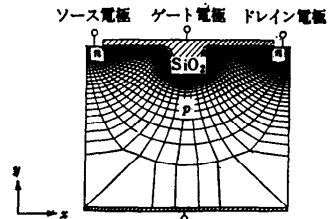
図-9 カラーブラウン管電子銃の電子軌道解析結果

図-9(d)に、電位分布および電子軌道を示す。同図と図-9(c)を比較して分かるように、等電位線と座標格子線はほぼ同じ形状をしている。これは、Boundary-Fit 曲線座標変換法で使用する座標格子生成方程式と電位方程式がともにポアソン方程式をもとしていることによる。このように座標格子線を物理量の等高線に近い形状にすることにより、精度の高い解析が可能となる。

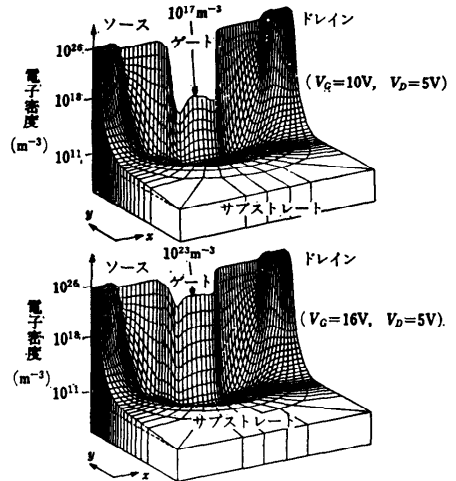
主レンズ部を通り、集束力を与えられた電子ビームは、無電界空間部を通過し、スクリーンに到達する。主レンズ部出口での電子の速度および位置を初期条件として、無電界空間部についても、電子銃と同様の計算を行った結果、スクリーン上のビームスポット径(電流密度分布でピーク値の1/10となる径)は実測値と15%以内で一致した。

4.2 半導体デバイスシミュレーション¹²⁾

曲面形状の絶縁体界面を有するアイソレーションの寄生 MOSFET において、ドレインに $V_D=5V$ を印加し、ゲート電圧を変えたときの電子密度の変化を解析した結果を図-10 に示す。アイソレーションは、 SiO_2 絶縁膜の下でP形基盤の不純物濃度を高くして、負キャリアが近づきにくいように作成されている。デバイス間の電流の漏れが起りやすい所は、各デバイス共通のゲート電極の下の部分である。このため、



(a) アイソレーション寄生 MOSFET.



(b) ゲート電圧による電子密度分布の変化

図-10 半導体デバイスシミュレーション結果

図-4 と同様の方法を用いて、絶縁体界面の形状を正確に扱うとともに、界面近傍に座標格子を集中し、さらに格子線を界面に直交させ、解析精度の向上を図った。

ゲート電圧 $V_G=10V$ および $V_G=16V$ のときの電子密度分布を図-10(b)に示す。 $V_G=10V$ ではゲートでの電子密度は基盤アクセプタ濃度より4けた小さく、ソースとドレイン間は分離されている。一方、 $V_G=16V$ においてはゲートの電子密度が基盤濃度より2けた大きく、ソースとドレイン間は導通している。電流保存の精度については、 $V_G=10V$ のときの微小電流に対しても、電極での流出入電流が $10^{-2}\%$ の差で一致しており、しきい電圧などの解析に適用可能である。

チャンネルでの電子密度は急激に変化しており、ドレイン側のpn接合面近傍には空乏層が存在し、電子密度はドレインから空乏層にかけて急激に減少する。図-10(a)に示した曲線座標格子を用いることにより、このようなドレイン、ゲート付近の急激な電子密度の変化も安定に解析可能となった。

5. おわりに

航空機の流体解析の分野で開発された Boundary-Fit 曲線座標変換法の概要と流体解析および電磁解析への応用を紹介した。本稿では、複雑な境界形状の取扱いに主眼をおいて説明したが、本手法では、座標格子線に流線、等圧線などの物理的意味をもたせ、物理現象を支配する偏微分方程式を簡単にすることも可能である¹³⁾。また、この手法を発展させて、境界形状だけでなく物理量の変化の大きい解析領域内部に座標格子を自動的に集中する Adaptive Grid 法が開発され、衝撃波、プラズマシミュレーションなどに適用されている¹⁴⁾。

昨年12月、米国マイアミで開催された Grid Generation に関する第2回国際会議では、3.1 で紹介した6面体分割法、Multiblock Method などの部分構造法を用いて、 10^6 規模の格子点を生成し、ジェット戦闘機の流体解析に実用化した例がいくつか報告された。今後、幅広い分野でさらに応用されるものと期待される。

参考文献

- 1) Thompson, J.F. et al.: J. Comput. Phys., 15, 209 (1974).
- 2) Thompson, J.F. (ed.): Numerical Grid Generation, Elsevier (1982).
- 3) Thompson, J.F. et al.: J. Comput. Phys., 24, 274 (1977).
- 4) Sorenson, R.L. et al.: ASME Fluid Eng. Conf., 181 (1983).
- 5) Takagi, T. and Miki, K.: 6th GAMM-Conf., Numerical Methods in Fluid Mechanics, 13, 351 (1985).
- 6) Rubbert, P.E. et al.: Numerical Grid Generation, p. 235, Elsevier (1982).
- 7) Miki, K. and Takagi, T.: J. Comput. Phys., Vol. 53, No. 2, 319 (1984).
- 8) Courant, R. and Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, Vol. II, John Wiley & Sons (1962).
- 9) Umegaki, K. et al.: 4th Int. Conf. on Numer., Methods in Laminar and Turbulent Flow (1985).
- 10) Takagi, T., Miki, K. and Sano, H.: Applied Numerical Mathematics, 3, 305 (1987).
- 11) 山崎, 川島: 日経エレクトロニクス 1984. 6. 12号, p. 126.
- 12) 田子一農: Boundary-Fit 座標変換と Voronoi 離散化法を用いた半導体デバイスシミュレーション, 電子情報通信学会 (1987).
- 13) Rosch, H. et al.: ICAS-80-113 (1980).
- 14) Brackbill, J.U. et al.: J. Comput. Phys., 46, 342 (1982).

(平成元年2月16日受付)