

マイノリティーゲームによる資源割り当て問題の分類

和泉 潔[†] 山下 倫久[†] 車谷 浩一[†]

[†]産業技術総合研究所 サイバーアシスト研究センター

〒135-0064 東京都江東区青海 2-41-6

E-mail: †kiyoshi@ni.aist.go.jp, ††tomohisa@carc.aist.go.jp, †††k.kurumatani@aist.go.jp

あらまし 本研究では、資源選択を簡略化したマイノリティーモデルと呼ばれるモデルを用いて、資源割り当て問題の分類を行った。学習の効率性と正確さの異なるエージェントを3種類用意して、獲得した利得の比較を行った。その結果、システムの複雑性と学習への時間的制約という2つの条件に応じて、4つの領域が存在することが分かった。そして、それらの領域にしたがって、実際の資源割り当て問題を分類できた。実際の資源割り当て問題が属する領域に応じて、モデル化を行うときにエージェントの持つべき特徴が分かった。

キーワード マイノリティーゲーム、複雑性、マルチエージェントシステム、学習

Classification of Resource Allocation Problems by Minority Games

Kiyoshi IZUMI[†], Tomohisa YAMASHITA[†], and Koichi KURUMATANI[†]

[†]Cyber Assist Research Center, AIST

2-41-6 Aomi, Koto-ku, Tokyo, 135-0064 Japan

E-mail: †kiyoshi@ni.aist.go.jp, ††tomohisa@carc.aist.go.jp, †††k.kurumatani@aist.go.jp

Abstract In this study, resource allocation problems are classified using the model called minority games which simplified resource selection. We prepared three kinds of agents from whom the efficiency and accuracy of a learning are different and compared acquired profit among these agents. Results showed that four distinct areas existed according to two conditions, the complexity of a whole system and the time restriction to a learning. And the actual resource allocation problems can be classified using which areas the problem belongs to. We found characteristics of agents in modeling resource allocation problems, according to the area where an actual resource allocation problem belongs.

Key words Minority game, Complexity, Multiagent systems, Learning

1. はじめに

現実世界のあらゆるところで、資源割り当て問題が見られる。これらの問題に共通する重要な特徴の一つは、選択する人数が少ない資源の効用がより高いことである。つまり、他のプレイヤーと異なる選択肢を選ぶプレイヤーの利得が高い。近年、この特徴を抽象化し簡略化したゲーム理論のモデル、マイノリティーゲームが多く研究者によって研究されてきた[2,3,7-9]。特に、資源選択におけるプレイヤーの記憶長と各資源を選択するプレイヤーの頻度との間の関係の相転移について、興味深い成果が得られてきた。しかしながら、従来の研究では全てのプレイヤーが同じ情報を用いて選択を決定し、同じ学習方法により戦略を変更してきた。プレイヤー間の異質性は考慮されてこなかったのである。本研究では、資源割り当て問題のモデルであるマイノリティーゲームに、プレイヤーの使う情報と学習法の異質性を

導入した。そして、ゲーム全体のダイナミクスの複雑性と学習に関する時間制約の2つの条件を変えて、どのタイプのエージェントが有利になるか調べた。どのような条件のときに他人の知能を仮定した学習方法が有利になるかという点に、我々は特に興味があった。

2. 予備実験の枠組み

本研究では、予備的な実験として、マイノリティーゲームと呼ばれるゲーム理論的な状況を題材にして、シミュレーションを行った。

2.1 標準的なマイノリティーゲーム

マイノリティーゲームとは、 N (奇数)人のプレイヤーが各時間ステップで2つの代替案のうちの1つの代替案を選ばなければならない繰り返しゲームのことである。そして、2つの代替案のうち、より少ない人々が選んだ代替案を選択した人々(少数

派)に利得が与えられる。もともとは複雑系経済学の提唱者の一人である B.W. Arthur が、2つの飲み屋のうち客が少ない方に行った方が嬉しいというバー問題としてアイデアを発表し [1], その後、多くの研究者が経済システムの特徴との共通点を指摘したり、非線形現象として分析や様々な拡張を行ってきた [9]。本研究では、標準的なマイノリティーゲーム [3,6] をもとにして、資源割り当て問題のモデルとして解釈した下記の枠組みを、予備実験の枠組みとした。ゲームには N (奇数) 人のエージェントが参加し、時間は離散的に進み、各期は (1) 行動の決定、(2) 利得の計算、(3) 学習の3つのステップよりなる。

(1) 行動の決定

各エージェント i は、過去の情報に基づいて、今回の自分の行動 $h^i(t) = \{+1, -1\}$ を決定する。例えばあるエージェントがある資源 A を今回使うときは、その行動 $h^i(t) = +1$ で表現され、もう一つの資源 B を使うときは、 $h^i(t) = -1$ で表現される。行動は記憶と呼ばれる、過去の m 期間でどちらの資源の利得が高かったかということに関する情報 $I^m(t-1)$ に基づいて決まる。

$$I^m(t-1) = \{I(t-1), I(t-2), \dots, I(t-m)\} \quad (1)$$

ただし、 $I(\tau) = \{+1, -1\}$ は第 τ 期で利得が高かった資源を表し、資源 A の利得が高かったときは +1、資源 B の時は -1 の値を取る。

各エージェント i は、過去の m 期の記憶 $I^m(t-1)$ の全てのパターンについて、どういったパターンのときに、今回の行動 $h^i(t)$ 、つまりどちらの資源を選択するのかというルールを持っており、このルールへのパターンマッチングにより行動 $h^i(t)$ を決定する。このルールを戦略 $S^i(t)$ と呼ぶ (図 1)。

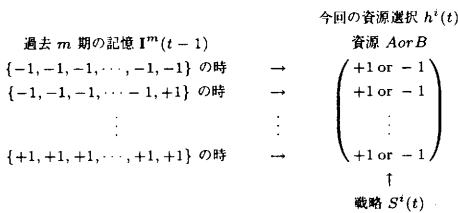


図 1 各エージェントの戦略

(2) 利得の計算

N 個全てのエージェントの資源選択を集積し、今期 t での各エージェントの利得を計算する。このゲームでは選択したエージェントの数が少ない方の資源が、より高い効用を提供することができる。各エージェント i に対する今期の利得 $\text{payoff}^i(t)$ は次の式で計算する。

$$\text{payoff}^i(t) = -h^i(t) \cdot \sum_{j=1}^N h^j(t) \quad (2)$$

この式により、資源 A を選択したエージェントが多い場合 ($\sum_{j=1}^N h^j(t) > 0$)、資源 B を選択したエージェント ($h^i(t) = -1$) は少数派に属し、正の利得を得る。逆に資源 A を選択したエージェント ($h^i(t) = +1$) は多数派に属し、負の利得を得る。また一方、資

源 B を選択したエージェントが多い場合 ($\sum_{j=1}^N h^j(t) < 0$)、資源 A を選択したエージェント ($h^i(t) = +1$) は少数派に属し、正の利得を得る。逆に資源 B を選択したエージェント ($h^i(t) = -1$) は多数派に属し、負の利得を得る。

どちらの資源が有利であったかということに関する情報 $I(t)$ も同様に計算される。資源 B を選択したエージェントが多い場合 ($\sum_{j=1}^N h^j(t) < 0$)、資源 A の利得の方が高いので $I(t) = +1$ となり、資源 A を選択したエージェントが多い場合 ($\sum_{j=1}^N h^j(t) > 0$) は $I(t) = -1$ となる。

$$I(t) = \begin{cases} +1 & (\sum_{i=1}^N h^i(t) < 0) \\ -1 & (\sum_{i=1}^N h^i(t) > 0) \end{cases}$$

(3) 学習

標準的なマイノリティーゲームにおける学習は単純なものであり、戦略の選択のみである。ゲームの初めに、すべてのプレイヤーは、 s 個のランダムに生成された戦略を与えられ、ずっとそれらの戦略を変更せずに持ち続ける。そして各戦略は、仮想値と呼ばれる固有の値を持っており、それは各戦略が正の利得を得られるような行動を指示した合計の回数である。各エージェントは、自分の持つ s 個の戦略のうちから、最も高い固有値を持つ戦略を選択し、次の期の行動決定のときに使用する。

今までの標準的なマイノリティーゲームの研究では、上記のように非常に単純な学習のみを仮定し、記憶長 m と各資源を選択するエージェント数の分散との関係について分析することが多かった。しかし、資源選択数の分散の挙動は実は、全エージェントが同じ種類の情報や学習アルゴリズムを共有していることが重要な意味を持っており、各エージェントに実際のシミュレーションで得られた過去の情報ではなくランダム列を与えても同じような結果が得られる場合があることが示されている [2]。本研究では、エージェントは非均質的で、使う情報や学習は異なっている。

2.2 エージェントの種類

まず、先ほどの標準的なマイノリティーゲームに参加している、過去の情報に基づいて行動を決定するエージェントを拡張し、パターンマッチ・エージェント (PM, Pattern Matcher) を用意した。パターンマッチ・エージェントは本研究では標準のエージェントとして取り扱われ、ゲームには基本的にこのエージェントが参加している。

そして、本研究では、情報の使い方の異なるエージェントを、行動模倣エージェント (HI, Hand imitator)・戦略模倣エージェント (SI, Strategy imitator)・全情報エージェント (PP, Perfect predictor) の3種類用意し、前述のマイノリティーゲームに参加させて、利得の評価を行った。

行動模倣エージェントは、他の利得の高いエージェントが今まで行った行動を真似するという単純な学習を行う。使う情報が一番少ないので、学習の収束までのスピードが速く学習の効率は良いが、不正確な結果しか得られない可能性がある。これに対して、全情報エージェントは、全ての情報を使って、他のエージェントの戦略とゲームの構造の推定を行う。使う情報が一番多いので、学習の収束までのスピードが遅く学習の効率は悪い

が、正確な結果が得られる。戦略模倣エージェントは両者の中間にあり、他のエージェントの戦略の推定のみを行い、利得の高いエージェントの戦略を真似る。学習の効率と正確性も両者の中間にある。

2.2.1 パターンマッチ・エージェント Pattern Matcher

第2.1節で述べた標準のマイノリティーゲームでのエージェントと行動決定は同じであるが、学習に関して拡張した。第2.1節のエージェントは、最初に与えられた戦略を変化させずに持ち続けているので、一つのエージェントでは解空間の全てを探索することはできない。そこで、学習を次のように拡張して、解空間全てを探索できるようにした。

行動の決定 過去の m 期の記憶 $I^m(t-1)$ の戦略 $S^i(t)$ へのパターンマッチングにより行動 $h^i(t)$ を決定する。

学習 今回の利得が正の場合は学習を行わず、戦略はそのまま。今回の利得が負の場合はある確率 α (学習レート) で過去の情報 $I^m(t-1)$ に対する行動ルールのビット (資源 A or B) を反転させ、戦略 $S^i(t)$ を更新する。

2.2.2 行動模倣エージェント Hand imitator

行動模倣エージェントは、他の利得の高いエージェントが今まで行った行動を真似るといって単純な学習を行う。

行動の決定 ある確率 (p_A) に従って資源 A を選択する。資源 B を選択する確率 p_B は $1-p_A$ である。

学習 利得の高い他のエージェントの売買行動の確率を模倣する。

1. 他人の売買確率の学習

自分以外の他のエージェント j の各々について資源 A を選択する確率の時刻 t での推定値 $\hat{p}_A^j(t)$ を次の式にしたがって更新する。

$$\hat{p}_A^j(t) = (1-\beta) \cdot \hat{p}_A^j(t-1) + \beta \cdot \text{action}^j(t) \quad (3)$$

ただし、 $\text{action}^j(t)$ は今期 t でのエージェント j の資源 A を選択した確率、つまり

$$\text{action}^j(t) = \begin{cases} 1 & (t \text{ 期で } j \text{ が資源 A を選択した時}) \\ 0 & (t \text{ 期で } j \text{ が資源 B を選択した時}) \end{cases}$$

であり、パラメータ $0 \leq \beta \leq 1$ は他のエージェントの資源選択行動の確率の推定値を更新する率を表わし、他人モデルの学習スピードを意味する。

2. 利得の累積

自分も含む全てのエージェント j の各々について、利得の累積値 $R^j(t)$ を次の式で更新する。

$$R^j(t) = (1-\gamma) \cdot R^j(t-1) + \gamma \cdot \text{payoff}^j(t) \quad (4)$$

ただし、 $\text{payoff}^j(t)$ はエージェント j の今回の利得を表わす。パラメータ $0 \leq \gamma \leq 1$ は、利得の累積値の更新率を表わし、本研究では 0.5 で固定とした。

3. 利得に応じた行動のコピー

ある確率 α (学習レート) で、資源選択行動確率の模倣を行う。まず自分も含む全てのエージェントの中から、各々の利得の累積値 $R^j(t)$ に比例した確率で、1 つのエージェント j^* を選ぶ。そ

して、そのエージェントの資源 A を選択する確率 $p_A^{j^*}(t)$ を自分の資源 A を選択する確率にコピーする。

2.2.3 戦略模倣エージェント Strategy imitator

戦略模倣エージェントは他のエージェントの戦略の推定のみを行い、利得の高いエージェントの戦略を真似る。

行動の決定 過去の m 期の記憶 $I^m(t-1)$ の戦略 $S^i(t)$ へのパターンマッチングにより行動 $h^i(t)$ を決定する。パターンマッチ・エージェントと同じ。

学習

1. 他人モデルの学習

自分以外の他のエージェント j の各々について、長さ m の過去の記憶のパターンから、そのエージェントが持っている推定している戦略 $\hat{S}^j(t)$ を使って、そのエージェントがどちらの資源を選択するか推定する。行動の推定値を実際にエージェント j が行った行動と比較し、間違っていたらある確率 $0 \leq \beta \leq 1$ (他人モデルの学習スピード) で、過去の情報のパターンに対するエージェント j の行動のビットを反転し、戦略の推定値 $\hat{S}^j(t)$ を更新する。

2. 利得の累積

自分も含む全てのエージェント j の各々について、利得の累積値 $R^j(t)$ を式 4 で更新する。行動模倣エージェントと同じ。

3. 利得に応じた戦略のコピー

ある確率 α (学習レート) で、戦略の模倣を行う。まず自分も含む全てのエージェントの中から、各々の利得の累積値 $R^j(t)$ に比例した確率で、1 つのエージェント j^* を選ぶ。そして、そのエージェントの戦略 $\hat{S}^{j^*}(t)$ を自分の戦略にコピーする。

2.2.4 全情報エージェント Perfect predictor

全情報エージェントは、全ての情報を使って、他のエージェントの戦略とゲームの構造の推定を行う。

行動の決定

1. 他人の行動の推定

自分以外の他のエージェント j の各々について、長さ m の過去の記憶 $I^m(t-1)$ のパターンから、そのエージェントが持っている推定している戦略 $S^j(t)$ を使って、そのエージェントがどちらの資源を選択するか推定する。

2. 自分の行動の決定

自分以外の他のエージェント j が各々このような行動を取ると推定されるときに、自分は何の行動をとれば良いかという戦略にしたがって、行動決定を行う。

学習

1. 他人モデルの学習

自分以外の他のエージェント j の各々について、戦略の推定値 $S^j(t)$ を更新する。戦略模倣エージェントと同様。

2. ゲームの構造の学習

もし自分の利得が他のエージェントの利得の平均よりも低い場合に、ある確率 α (学習レート) で、他のエージェントの行動が今回のように推定される場合の行動のビットを反転させる。他のエージェントの行動がどのようになるときに自分がどのように行動すれば利得が高いのかというゲームの利得構造に関する知識の

更新を意味している。

3. シミュレーション結果

3.1 シミュレーションの設定

本研究における予備実験のシミュレーションは次の表のようになっている。

表1 シミュレーションの設定

エージェント数	$N = 25$
エージェントの組合せ	(PM20個, HI5個), (PM20個, SI5個), (PM20個, PP5個)の3種類
記憶長	$m = \{1, 2, \dots, 15\}$
学習スピード	$\alpha = 0.8$ (固定)
他人モデルの学習スピード	$\beta = \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$
利得の更新度	$\gamma = 0.5$ (固定)
シミュレーション回数	各パラメータの組合せに対して10回ずつ
評価方法	20個のPMの利得の平均を100とした時の5個のHI(またはSI, PP)の平均利得の改善率

(PM: パターンマッチ・エージェント, HI: 行動模倣エージェント, SI: 戦略模倣エージェント, PP: 全情報エージェント)

マイノリティゲームには全部で25個のエージェントが参加し、そのうち20個は標準エージェントであるパターンマッチ・エージェントである。残りの5個のエージェントは、行動模倣エージェント・戦略模倣エージェント・全情報エージェントのうちのどれか1つである。

パターンマッチ・エージェントや他のエージェントの自分の戦略の学習スピード α と利得の更新率 γ は固定しておき、各エージェントの組合せに対して、記憶長 m と他人モデルの学習スピード β を変化させていった。我々の前の研究[5]により、パターンマッチ・エージェントが過去の長い情報を記憶するようになると、システム全体の挙動がより複雑になることが分かっている。したがって、記憶長はシステム全体の複雑度に関係する。

シミュレーションは{エージェントの組合せ \times 記憶長 \times 他人モデルの学習スピード}の全ての組み合わせに対して、各10回ずつ行った。

各エージェントの評価は、20個のパターンマッチ・エージェントの利得の平均を100として、5個の行動模倣エージェント(または戦略模倣エージェント、全情報エージェント)の平均利得が、何%だけ利得を増やすことができたのかという利得の改善率で行った。

3.2 シミュレーション結果

シミュレーション結果の概略は図2で示される。また、シミュレーション結果のいくつかの例を図3(a)-(c)の中に示す。シミュレーションの結果、記憶長 m および他人のモデル β の学習速度に応じて、最も高い利得を得た学習タイプが異なることが分かった。図2は、4つの別の領域が2つの条件、複雑さおよび時間制約に応じてあることを示す。

我々の前の研究は、全体のシステム[4]の力学の複雑さに記憶長が連結することを明らかにした。記憶長が短いとき、全体のシステムは有限の次元の動的なシステムによって記述すること

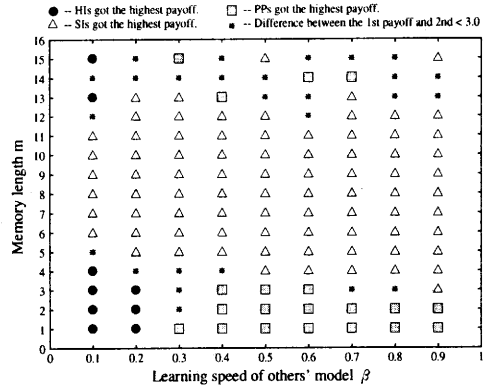


図2 結果の要約: 各シンボルは、どのエージェント・タイプが最も高い利得を得たかを示す。勝利者のタイプによれば4つの別の領域 ($m \leq 3$ & $\beta < 0.3$, $m \leq 3$ & $\beta > 0.3$, $3 < m < 12$, and $m \geq 13$)がある。

ができる、比較的単純なパターンを示した。記憶長がより長くなるとともに、力学パターンはより複雑になった。また、最終的に、任意の有限の次元の動的なシステムはそれらについて記述することができない。したがって、記憶長 m は、全体のシステムの複雑さの指標と見なすことができる。

他人のモデル β の学習速度は学習への時間制約の指標である。エージェントはすべて、連続的に固定の学習速度 α で自分の戦略を変更する。 β が小さい場合、エージェントは遅い学習速度で他人の戦略を追跡しなければならない。したがって、学習への時間制約は強い。 β が大きい場合、エージェントは他人の戦略を追跡する時間が十分に比較的ありうる。したがって、学習への時間制約は弱い。

a) 低い複雑性および強い時間制約領域:

記憶長が短く、他人のモデルの学習速度が遅い($\beta < 0.3$)とき($m \leq 3$)、行動模倣エージェントの利得は高かった。この結果は、さらに図3aの中で示された。これは全情報エージェントおよび戦略模倣エージェントが強い時間制約のために他人の戦略を学習する、十分な時間を持つことができないからである。また、それらは不十分な性能を示した。行動模倣エージェントだけが、それらの単純で迅速な学習方法のためにパターンマッチエージェントの戦略の速い変化に追いつくことができた。さらに、全体のシステムが比較的単純なので、行動模倣エージェントは十分に正確なモデルを学習することができた。

b) 低い複雑性および弱い時間制約領域:

記憶長が短く、他人のモデルの学習速度が速い($\beta > 0.3$)とき($m \leq 3$)、全情報エージェントの利得は高かった(図3a)。それは全情報エージェントが他人の戦略およびゲーム構造を学習する、十分な時間を持つことができるからである。さらに、全体のシステムの力学は、この領域において比較的単純である。それらは情報をすべて使用して、正確な学習する結果を得、他の2つのタイプ、行動模倣エージェントおよび戦略模倣エージェントを打ち負かすことができた。

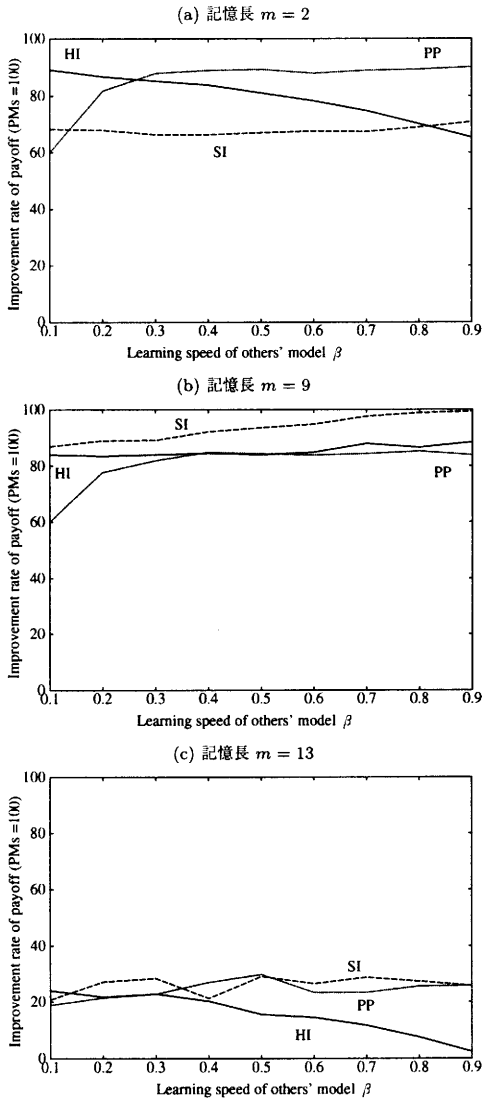


図3 シミュレーション結果: (a) 記憶長が短く、学習速度が遅い場合,HI(行動模倣エージェント)の利得は高い。学習速度が速い場合,PP(全情報エージェント)の利得は高い。(b) 記憶長が長くなるとともに,SI(戦略模倣エージェント)の利得は高くなる。(c) 最終的にすべてのエージェント・タイプの違いがほとんどなくなる。

c) 中間複雑性領域:

記憶長がより長く ($3 < m < 13$) になるとともに、戦略模倣エージェントの利得は高くなる。図3bは、戦略模倣エージェントがすべての学習速度 β の全体にわたる他の2つのタイプに勝つかも示れないことを示す。他のエージェントの戦略が複雑な場合、行動模倣エージェントのような単純な学習方法は不正確な学習の結果を単に得ることができる。また、全情報エージェントのような情報をすべて使用する学習方法は、制限のある学習速度で学習する結果を得る時間をあまりに費やす。したがって、行動模倣エージェントと全情報エージェントの利得はこの領域において減少した。その後、戦略模倣エージェント(それは学習する2つのタイプの最中である)は、この領域の高い利得を得た。

d) 高い複雑性領域:

この領域では、全体のシステムの動的な構造が非常に複雑になり、任意の有限の次元の動的なシステムによって記述することができない。すなわち、システムは無秩序な特徴を示した。したがって、すべての4つのエージェント・タイプ間の性能の差は、小さくなった; パターンマッチエージェント、行動模倣エージェント、戦略模倣エージェントおよび全情報エージェント。図3cは、パターンマッチエージェントに対する改善率が小さくなり性能によってすべてのエージェント・タイプ間で識別することが困難になることを明らかにした。

4. 結 論

我々のシミュレーション結果は、4つの領域が2つの条件、複雑性および時間制約に応じてあることを示した。様々な資源配分問題はこれらの4つの領域に分類することができる。

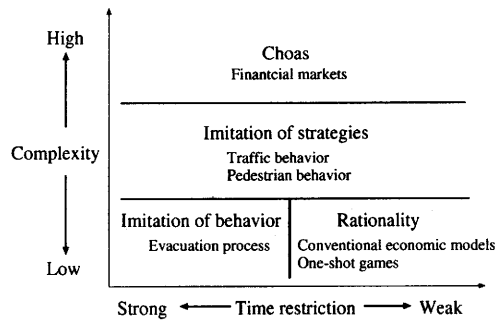


図4 資源割り当て問題の分類

避難プロセスは、低い複雑性および強い時間制約領域に分類される。人々が避難ルートを決めようとする場合、それらは古い記憶を使用しないかもしれないが、主として、現在の状況に関する知識を使用しないかもしれない。したがって、記憶長は短いかもしれない。もちろん、時間制約は非常に強い。一人が避難プロセスをモデル化したい場合、彼または彼女は、行動模倣エージェントのような、他のエージェントの戦略あるいは決定ルールを考慮しないエージェントとモデルを構築したほうがよい。

従来の経済モデル(ここで学習への時間制約は弱く、環境上の変化がそのように複雑にならない)に記述される状況で、合理的

なエージェントは利点を持つ。それらは、利用可能な情報をすべて使用して、正確な解決を見つけようとする。この状況が非常に理想的なので、実際の世界に例を見つけることは困難である。しかし、高価な品物の購入は例かもしれない。

中間の複雑性領域は、ドライバーまたは歩行者のルート選択のような広範囲の資源配分問題を含んでいる。この領域では、人々が他人がさらに持っている仮定の下での彼らの行為を決定することが合理的である、戦略および決定ルール。そのとき、戦略模倣エージェントのような他人の知能に基づいた学習方法、利点を持つ。

最後に、高い複雑性領域は、さらに金融市場のような資源配分問題に様々な例を含んでいる。この領域では、普遍的に学習の正解はない。したがって、学習する結果だけでなくそれ自体を学習する手続きも主要因になることは考えられる。

今後、資源割り当て問題において、認知心理学の分野において見つかっている、実際人間が用いている学習のヒューリスティクスや、それらのモデルである人工知能の分野での幾つかの学習方法を、学習の効率と正確性ということで分析し、社会・経済システムにおける学習のモデルとして評価してみるのも面白いと思う。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、非常に有益な議論をしてくださった NTT 未来ねっと研究所の栗原聡さんに感謝いたします。

文 献

- [1] W. B. Arthur. Inductive reasoning and bounded rationality (the el farol problem). *American Economic Review*, Vol. 84, p. 406, 1994.
- [2] A. Cavagna. Irrelevance of memory in the minority game. *PHYSICAL REVIEW E*, Vol. 59, No. 4, pp. R3783–R3786, 1999.
- [3] D. Challet and Y.-C. Zhang. Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A*, Vol. 246, pp. 407–418, 1997.
- [4] K. Izumi. Complexity of agents and complexity of markets. In T. Terano, T. Nishida, A. Namatame, S. Tsumoto, Y. Osawa, and T. Washio, editors, *New Frontiers in Artificial Intelligence*, pp. 110–120. Springer, 2001.
- [5] 和泉潔. 人工市場: 市場分析の複雑系アプローチ. 森北出版, 2003.
- [6] M. Marsili. Market mechanism and expectations in minority and majority games. *Physica A*, Vol. 299, pp. 93–103, 2001.
- [7] 栗原聡, 福田健介, 廣津登志夫, 明石修, 佐藤進也, 菅原俊治. Minority game におけるエージェントの社会的行動に関する一考察. 情報処理学会 研究報告 2002-ICS-127, 第 2002 巻, pp. 119–126, 2002.
- [8] R. Savit, R. Manuca, and R. Riolo. Adaptive competition, market efficiency, phase transition. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, Vol. 82, No. 10, pp. 2203–2206, 1999.
- [9] Minority Game's web page. <http://www.unifr.ch/econophysics/>.