

# スケールフリー構造を持つオートマタの状態遷移に 関する研究

石岡卓也, 河内佑美, 吉井伸一郎, 嘉数侑昇  
北海道大学大学院 情報科学研究科

**概要:** 本研究ではネットワークの振る舞いを知るための最初のステップとして, ネットワーク構造を持つオートマタを定義し, その状態の変化を調査する. モデルは有向グラフによるスケールフリーネットワークの形状に結合されたオートマトンの集合として表現され, 実験によって一つのオートマトンの状態変化によって全体におけるどの程度の部分が変化するかを示す. 結果は, 変化が系のごく一部に留まる場合と, 系の大部分を変化させる場合に分けられる. スケールフリー構造における特徴として多くのリンクを集めるハブの存在があるが, 実験結果から系の大部分を変化させるような場合にはハブの変化が伴うことを示す.

## A Study on State Transition on Automata with Scale-Free Structure

Takuya Ishioka, Yuumi Kawachi,  
Shinichiro Yoshii, and Yukinori Kakazu,  
Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University,

**Abstract:** In this paper, we investigate automata state change connected in a scale-free network form in order to understand network behavior. A proposed model was described as automata on a scale-free network. We explore states changes of the whole system caused by a state change of a single element. Results are clustered in two parts. One part of them changes only a few elements and the other part changes most of the system. In the case state changes affect most of the system, they include change states of hubs, which are scale-free network features.

### 1. はじめに

局所的な相互作用は至る所に存在し, その興味深い振る舞いは複雑系の理論として研究されてきた. 近年盛んに行われているネットワーク構造に関する研究を考えると, 複雑系の相互作用する局所を改めて見直す必要があるだろう. 本研究では, Web ページや細胞の代謝ネットワークな

どに見られる，スケールフリー構造を持つネットワークをオートマタとしてモデル化し，その挙動を調べる．

通常，大規模なネットワークの状態を，単一もしくは少数のノードが自由に制御できるとは考えにくい．しかし，一部分であってもネットワークを構成する一員である以上，何らかの影響を及ぼすはずである．少数の入力によって大きく変化する脳の内部のニューロン群，少数の人によって変化する社会構造など，我々は，例え初めは少数のノードのみの変化でも最終的には系全体の様相を変化させることがあることを知っている．一つのノードの振る舞いは，ネットワーク全体の状態を変化させるかもしれないし，自身の状態を変えるのみに留まるかもしれない．本研究では，一部のノードの状態がネットワーク内のどの程度のノードに影響を及ぼしうるかを知るために，一つのノードがオートマタとして振る舞うとし，さらにスケールフリーネットワークとして近傍を構築されたオートマタの振る舞いを調べる．これによって，一つのノードが影響を与えうる範囲を推し量り，また，少数のノードによってネットワーク全体の状態を変化させることができるのならば，それはどのような場合であるかを明らかにする．

ネットワークの構造<sup>[1,2]</sup>については，近年盛んに研究が始められている．ネットワークの振る舞いに関しては，既に知られている研究としてインターネットは攻撃された場合にどのように分断されるか，大腸菌や酵母の代謝ネットワークにおいて一つのタンパク質の欠如がどのような影響を及ぼすか<sup>[3,4]</sup>，などがある．また，伝染病の蔓延について，スケールフリー性を持つ場合は拡散の閾値が問題にならなくなるという研究も行われている<sup>[5]</sup>．

本研究では，ネットワーク自体はスケールフリー構造を持ち変化しないものと仮定し，その上で状態がどのように変化するかを問題とする．本論文において，まず非対称な情報の伝達を考えるために有向グラフにおいてスケールフリー性を持つネットワークを構築し，その後，接続されているノードから情報を得てそれを伝える場合に，系全体としてはどのように振る舞うかについてのモデルを構築し，そのモデル上での状態の変化について解説する．

## 2. スケールフリー構造を持つオートマタモデル

情報の伝播を考える場合，その供給源と伝播先を明確に区別する必要がある．特に，Web サイト等では情報の伝播先が一方的にサイトを知っているという場合が考えられる．このような系の特性を表現するために，有向グラフでありかつスケールフリー構造を持つグラフの構築を行い，その後，構築したグラフについて状態と遷移規則を定義する．

### 2.1. スケールフリー構造を持つ有向グラフ

Barabási はリンクを持つものがさらに多くのリンクを獲得するとモデル化することで，スケールフリーネットワークを定義した<sup>[2]</sup>．具体的には， $k_i$ 本のリンクを持つノード $i$ が新たにリンクを獲得する確率は  $\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$  として定義される．1 タイムステップ毎に新たに  $m$  個のノードがそれぞれ 1 本ずつのリンクと共に加えられる．新たなリンクは，新たに加えられた点を一

方の端とし、もう一方を確率  $\Pi(k_i)$  で決定する。本研究では、これを入出力の両方のノードについて考慮することで実現するため、始点、終点となるノードの選択は次の式のような確率となる。

$$\Pi_{in}(k_{in}(i)) = \frac{k_{in}(i)}{\sum_j k_{in}(j)}, \quad \Pi_{out}(k_{out}(i)) = \frac{k_{out}(i)}{\sum_j k_{out}(j)}$$

ここで、 $k_{in}(i)$ 、 $k_{out}(i)$  はそれぞれノード  $i$  の incoming link、outgoing link の数である。本研究では、これに加えて始点と終点の双方を優先的選択によって決定する辺を加えるという手順を考える。結果として、ネットワークは次ような手続きで作成される。

1.  $m_0$  個のノードを用意する。
2.  $m$  個のノードを追加し、追加したノードのそれぞれについて辺を加える。辺の終点は追加されたノード、始点は  $\Pi_{out}$  によって決定されるノードとする。
3. 新たに追加されたノードとは無関係に  $l$  本の辺を追加する。始点は  $\Pi_{out}$  によって、終点は  $\Pi_{in}$  によって決定される。
4. 2~3 を繰り返す

## 2.2. スケールフリー構造を持つネットワーク上のオートマタモデル

本研究では Scale-Free 構造を持つ系の状態の変化を扱う。そのために、まず各ノードに状態を仮定しオートマトンとして扱う。状態としては、最も単純なものとして考えられる二値とする。また、状態の変化は有向辺に沿って伝播して行くとする。

ノード  $i$  に付随するオートマトンの状態を  $s_i$  と置きシステム全体の状態を  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  とする。また、特に時刻を考慮する場合は、時刻  $t$  におけるノード  $i$  の状態を  $s_i^t$  と置く。状態の遷移は

$$f_i(\mathbf{s}_{v(i)}^t) \rightarrow s_i^{t+1}$$

と表現できる。ここで  $v(i)$  は終点が  $i$  であるような辺を持つノードの集合であり、 $\mathbf{s}_{v(i)}^t$  は時刻  $t$  における  $v(i)$  の状態である。系全体では  $S(\mathbf{s}^t) = \mathbf{s}^{t+1}$  となり、一つの有限オートマトンとみなすことが出来る。

状態遷移関数  $f_i$  は、時刻  $t+1$  での状態を決定する。これは、ネットワークが作成された後に、入力となる辺の数に応じて、全ての入力の組み合わせについての表を作り、その入力に対して  $x_i^{t+1} = 1$  となるルールを全体の中に確率  $p$  で出現するように定義することで作られる。同様に、 $1-p$  で  $x_i^{t+1} = 0$  となるルールを配置する。しかし特別に、表の中で入力が全て 0 の場合は必ず 0 とする。これが無い場合、周囲が全て 0 であるにもかかわらず突然、状態 1 の要素が発生することになり、伝播の調査には不向きであるためである。 $p$  は一つのネットワーク全体について定められるが、遷移関数  $f_i$  自体は各々のノードによって異なったものになる。

ここで、 $p$  は入力組み合わせに対して次の時間ステップでの状態を決定する表の中で 1 の占める割合であるから、この数値が 1 に近い場合は多くの要素が 1 になりやすく、0 に近い場合は、状態 1 は伝播し難い。一度状態が 1 になった要素はその状態で固定され、0 へと戻ることはないとする。また、0 から 1 へと変化するか否かは、各要素に定義された  $f_i$  によって決定される。

### 3. 実験と結果

実験を行うために、まずオートマタの連結を定義するネットワークを構築する。 $m_0 = 5$  ,  $m = 1$  ,  $l = 1$  としてノード数が 10,000 になるよう作成されたネットワークの  $k_{in}$  ,  $k_{out}$  ,  $k_{in} + k_{out}$  それぞれについて、特定のリンク数を持つノードの分布を以下に示す。 $k_{in}$  ,  $k_{out}$  のどちらか一方でも、 $k_{in} + k_{out}$  の双方を考えてもスケールフリー構造が保たれていることが読み取れる。

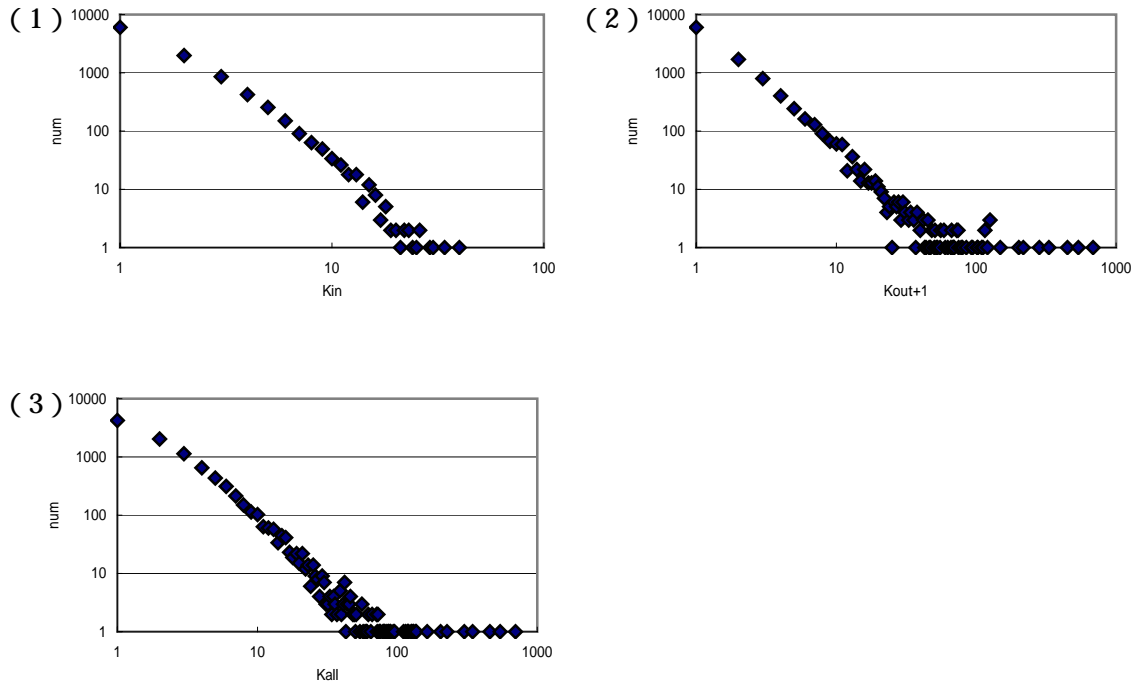


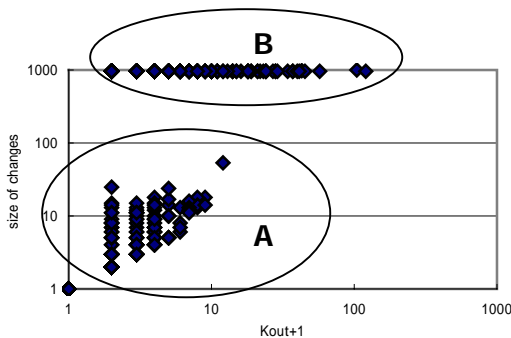
図 1: スケールフリー構造を持つ有向グラフにおいて特定のリンク数を持つノードの数の分布、ノード数  $N=10,000$  とした場合 (1) incoming link のみについて、(2) outgoing link のみについて、(3) incoming, outgoing の双方を考えた場合について

実験では、ある一つの要素の変化がどのように伝播するかを調べるために、初期状態  $s_i^0$  をある一つの要素のみ 1 にし、それ以外を全て 0 にした状態からはじめ、全体の中でどれだけの要素が 1 になるかを調べた。

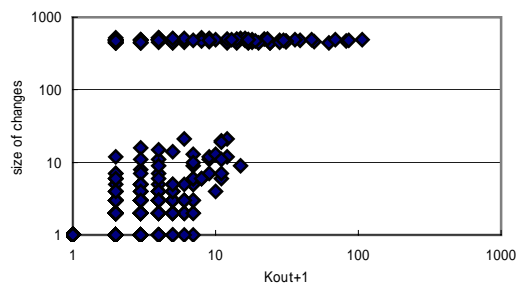
$$\mathbf{s}^0 = (s_1 = 0, s_2 = 0, \dots, s_{j-1} = 0, s_j = 1, s_{j+1} = 0, s_n = 0)$$

結果を図2に示す。それぞれ横軸は初期状態として1を与えられるノードが持つ outgoing link 数  $k_{out}$ ，縦軸がそのノードから伝播した状態1が最終的にどれだけ多くの要素の状態を変化させたかを示す  $c$  の値である。  $p = 1.0$  の場合は、辺の始点に状態1の要素が存在すると確率1で終点に位置する要素の状態が1に変化するので、変化するノードの数は、その点から到達可能なノードの数と等しい。  $p < 1.0$  では、可到達なノードの中でも、状態が変化するもののみが変化を伝えるので、変化の様子は  $p = 1.0$  の場合よりも複雑になる。

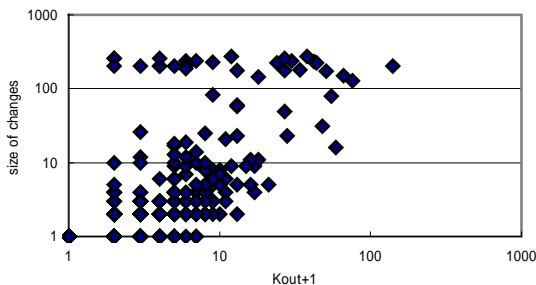
グラフからわかるように点が存在する領域は、  $k_{out}$  と  $c$  が共に小さいクラスタAと、  $c$  が大きく  $k_{out}$  によらないクラスタBとに大きく分けることができるだろう。クラスタAはあまり多くの要素の状態を変えることができなかつた場合の結果であり、クラスタBは系に存在する大半の要素の状態を変化させた場合である。これらのことから、多くの辺を持ち  $k_{out}$  の大きな要素が変化する場合は、ほぼ確実に大半の要素の状態遷移を引き起こすのに対して、  $k_{out}$  の小さな要素は、必ずしも大きな変化を引き起こさないことがわかる。しかし、  $k_{out}$  が小さくても、  $c$  が大きくなる結果を見ることができる。これは、あまり多くの辺をもっていないにも関わらず、多くの状態遷移を引き起こしたものである。



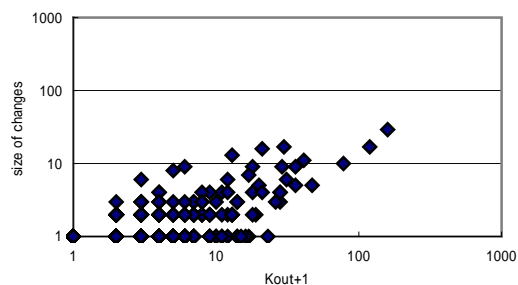
(1)  $p = 1.0$



(2)  $p = 0.5$



(3)  $p = 0.3$



(4)  $p = 0.1$

図2: 初期状態で状態1を設定されるノードの outgoing リンク数と、それによって状態遷移を引き起こされるノードの数

$p$  の値が大きいほど、クラスタ **B** における  $c$  の値が大きい。  $0.3 \leq p$  が成り立つ領域ではこのような特性が見られる。しかし、 $p = 0.1$  ではクラスタ **B** における  $c$  の値が小さくなり、クラスタ **A** と **B** との見分けがつかないようになっている。

$k_{out}$  が小さい場合でも大きな  $c$  を持ちうるのはどのような場合だろうか。スケールフリー構造においては多くの辺を持つハブの存在が重要であることが知られている。先程の結果において、多くの辺を持つ上位 10 個のノードをハブと定義し、ハブの状態遷移を引き起こした場合の結果と、ハブの状態遷移を引き起こさなかった場合の結果を分けて表示したのが次の図 3 である。グラフ中の丸はハブの状態遷移を引き起こした場合であり四角はハブの状態遷移を含まない場合である。

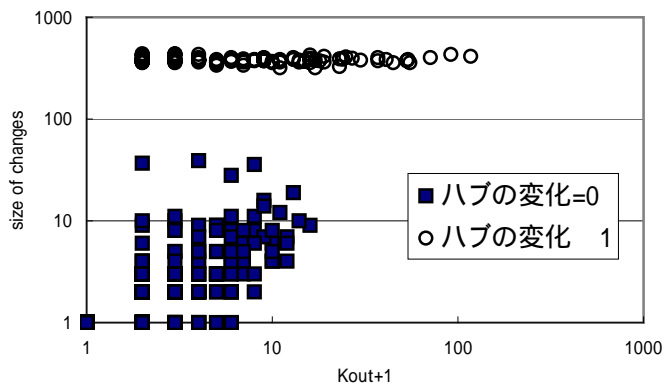


図 3: 状態遷移の大きさとハブへ及ぼした変化

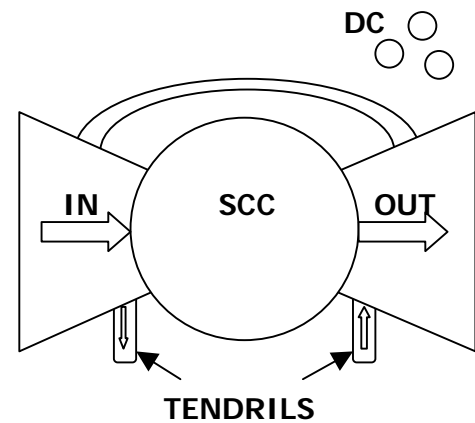


図 4: 有向グラフでのグラフ全体の構造 [6,7]

この図から、クラスタ **B** の多くの状態遷移を引き起こした結果は、ハブの状態遷移を必ず含んでいることがわかる。つまり、たとえ  $k_{out}$  が小さなノードであっても、上手くハブの状態遷移を引き起こすことが出来た場合は大きな  $c$  を獲得することが可能であることがわかる。

図 4 は有向グラフの構造であるが、今回の例では 10 個のハブの内、1 つでも変化すると大半のノードの状態が変化することがわかっている。これは、10 個のハブとその周辺のノードは SCC を構成していて、お互いに影響を及ぼしあっているからであると考えられる。状態遷移の影響が少ないのは、TENDRILS や OUT に属するノードであると考えられるだろう。

## 4. まとめ

本研究では、有向グラフで作られるスケールフリーネットワークを構築するモデルを提案し、そのモデルを用いてスケールフリー構造を有する伝播のモデルとしてのオートマタを定義した。また、そのような系が一つの要素の状態変化によって、全体としてどの程度の大きさの変化が生じるかを調べた。その結果から、全体の中での状態遷移の大きさが小さな場合と、多くのノードの状態遷移を含む場合に分けることができ、その違いはハブに対する影響の有無で表現できることを示した。結果としてハブへと到達して状態を変えるような辺を持つノードは、少数の辺しか持たない要素であっても大きな影響を与えることがあり得ることを示した。

【参考文献】

- [1] D. J. Watts, S. H. Strogatz, *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature 393, pp. 440-442, (1998).
- [2] Albert-László Barabási and Réka Albert, *Emergence of Scaling in Random Networks*, Science 286, pp. 509-512, (1999).
- [3] J.S Edwards and Bernhard Palsson, "The *Escherichia coli* MG1655 in silico Metabolic Genotype: Its Definition, Characteristics and Capabilities," Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 97, 5528-5533, (2000).
- [4] Hawoong Jeong, Sean Mason, Albert-László Barabási, and Zoltan Oltvai, "Lethality and Centrality in Protein Networks," Nature 411, pp. 41-42, (2000).
- [5] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks*, Phys. Rev. Lett. 86, 3200 (2001).
- [6] A Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins, and J. Wiener., *Graph structure in the web*, Comput. Netw., 33, 309, (2000).
- [7] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, A.N. Samukhin, *Giant strongly connected component of directed networks*, Phys. Rev. E 64, 025101, (2001).
- [8] R. Albert, H.Jeong and A. L., *Diameter of the world-wide web*, Nature, 401, pp. 130-131, (1999).
- [9] D. Stauffer, A. Aharony, L. da Fontoura Costa and J. Adler, *Efficient Hopfield pattern recognition on a scale-free neural network*, Eur. Phys. J. B 32, pp. 395-399, (2003).
- [10] Phan D., *Small Worlds and Phase Transition in Agent Based Models with Binary Choices*, in: Muller J.P., Seidel M.M. eds., 4th workshop on Agent Based Simulation, Montpellier, SCS Publishing House, Erlangen, San Diego, (2003).