

## カオス的市場モデルの安定性と馴化

國上真章\*, 寺野隆雄

筑波大学大学院ビジネス科学研究科\*,  
東京工業大学大学院総合理工学研究科  
kunigami@gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp, terano@dis.titech.ac.jp

**Abstract.** Cournot型の逆需要関数を持つ財の生産に無数の主体が参入退出を繰り返す新しい市場のモデルを提案し,この市場の複雑な挙動を調べる. この市場力学系は,進化的ゲーム論のReplicator Dynamicsと同型であり,条件によってカオスの挙動を示す. またこれに,カオス制御の仕組みを導入することでシステムを馴化させることが可能である.

## Stability and Harnessing of Economic Markets with Chaotic Behaviors

Massaki Kunigami\*, Takao Terano

Graduate School of Business Science, Tsukuba University\*  
Computational Intelligence and Systems Science Tokyo Institute of Technology  
kunigami@gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp, terano@dis.titech.ac.jp

**Abstract.** This paper presents a new model of economic market with a linear Cournot type "inverse demand function", which aims at uncovering complex behaviors of a real market. This market dynamics has equivalent formula of Replicator Dynamics in the evolutionary game theory, and shows chaotic behavior in some specific conditions. Also, we address a chaos control mechanism, which will harness and stabilize the chaotic market behaviors.

### 1 はじめに

経済市場のダイナミクスがカオス状態を導くかどうかは議論のわかれるところである。本報告では経済学上の適切な仮説のもとでカオス的挙動を示す市場モデルを提案し、その挙動、安定性と馴化について議論することを目的とする。この問題は、経済問題における複雑系をエージェント・ベース・モデリングによって分析する適切な事例になっている。

本論文で扱うCournotモデルは、複占・寡占市場における完全情報同時手番の非協力ゲームとして、ミクロ経済学/ゲーム理論の教科書(Gibbons[1])において標準的な問題である。Cournotモデルは、次のように記述される。財の価格(P)が市場供給量(X)の関数としての逆需要関数( $P(X)=a-bX$ )により決定されるとき、複数の生産主体( $i=1\sim N$ )が財の生産量( $x_i$ )を戦略として、自己の収益( $P(X)x_i-cx_i$ ,  $X=\sum x_i$ )を最大化する。このとき各主体が逆需要曲線及び他のプレイヤーの合理性に関する共通知識に基づき最適に反応するとしてNash均衡解が得られる。

Cournotモデルは、消費/需要にかかわる複雑性を逆需要関数に縮減し所与とすることで、生産者の戦略的行動についてのモデルを得る。このため複占・寡占市場についても、価格及び費用の構造、情報の不完全性や遅れ、プレイヤーの学習等を加味することにより、比較的簡単な動学モデルを構築しつつプレイヤーの複雑な挙動を観察することが出来る。(Puu&Sushko[2])

一方、複雑系研究の領域においては、少数プレイヤーの戦略的行動自体の複雑性よりも、多数の利己的主体個々の意思決定と集団全体の状態の間における「ミクロ-マクロ相互作用」がもたらす「複雑な挙動」に関心がある。この立場から、進化ゲーム(Hofbauer&Sigmund[3]), 社会学習動学(Deguchi[4], 出口[11])等の手法と、Cournot型の需要構造を持つ市場モデリングを接合することには重要な意味が有る

と考えられる。本研究のアプローチと主要な結論は以下のとおりである。

複数のバリエーションがその供給量と価格に競合性を持つ財に拡張されたCournot型の逆需要関数のもとで、無数の生産主体が市場のマクロ状態を基に参入・退出を繰り返す市場モデルを、出口の社会学習動学(Social Learning Dynamics :Deguchi[4])に依拠して構築する。これによりミクロ-マクロ相互作用を含む市場動学を、生物進化的描像を用いずに進化ゲームでよく知られた Replicator Dynamics と同様な力学系として表現できる。(Section 2)

寡占市場動学では、Puu(Puu[5],Puu&Sushko[2]), Kopel(Kopel[6])等が離散時間において非線形反応曲線と学習過程を導入することでカオスの振舞いを示す市場力学系を見出した。これらの示唆に富む先行研究では、非線形の価格あるいは費用関数に由来した非単調な最適反応曲線上の学習プロセスでカオスを導出する。本研究では、線形な逆需要関数から連続力学系を構築することにより、このような離散系のパイ捏ね変換によらないカオスの市場メカニズムの存在が示される。(Section 3)

市場のカオス的変動に対して、連続カオス制御(Pyragas[9], Kittel&Parisi&Pyragas[10])のメカニズムを改良して適応し、牧羊犬型(Kunigami&Terano[8])のエージェントにより飼い馴らすことが出来ることを示す。(Section 4)

## 2 Cournot型逆需要関数の性質とその拡張モデルの記述

ここではCournot型の逆需要関数を拡張するとともに、これに出口(Deguchi[4])によって提案された「社会学習動学」を適用し、ミクロ-マクロ相互作用によって駆動される市場の動力学を導出する。新しいモデルを構築する方針は以下のとおりである。

-財に対する逆需要曲線を、競合性を伴う多種のバリエーションを持つ財に対する線形な逆需要関数(：価格平面)へ拡張する。ここで競合性には、第*i*種の供給量増加によって第*j*種の需要を低下させる場合(正の競合)と増大させる場合(負の競合)の双方を考慮する。

-プレイヤーは財の各種類の生産に参入・退出を繰り返す無数の単位生産者とする。彼らにとっては、逆需要関数の正確な特性あるいは他のプレイヤー個々の決定を知った上で最適な財の生産を選択することが現実的ではなく、市場からの巨視的な情報をもとにある確率で不利な種類の生産から退出しより有利な種類に生産をシフトさせるという「限定合理的」な主体であるものとする。

これらにより、マクロ情報に基づいた個々の利己的主体のミクロな意思決定と、これらミクロな意思決定の集積によるマクロ状態変化のミクロ-マクロ相互作用による経済の動学を記述する。

### 2.1 需要と価格の構造

Cournot型の逆需要関数を一般化するために、相互に競合のある*n*種類のバリエーションをもつ財の価格と供給量の関係を定式化する。ここに変数  $\mathbf{x}(t)=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は市場へ出荷された財の第*i*種の量として定義する。各プレイヤーは、各時点において常に財の1種類を選択して生産しているものとし、その生産性は全て1であると仮定する。更に、プレイヤーは充分多数存在するものとし、その総数を1に規格化する。これにより、市場の状態量  $\mathbf{x}(t)$  は、第*i*種の生産量であるとともに、第*i*種の財の生産を選択しているプレイヤーの集団内比率と同一視される(すなわち  $\sum x_i = 1$ )。

式(1)において、各要素が第*i*の種類の市場単価を示す価格ベクトル  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  を  $x_i$  の線形非斉次な逆需要関数として表わし、これにより価格平面が定義される。ここで、 $\mathbf{p}_0$  は価格平面の  $p$ -切片である。ここで  $\mathbf{p}_0$  の要素はすべて同じ、すなわち  $\mathbf{p}_0=(p_0, p_0, \dots, p_0)^T$  であると仮定する。行列  $\mathbf{P}=\{P_{ij}\}$  は、財の間の競合関係を示し、 $P_{ij}$  が負(正)の場合は第*j*種が第*i*種に対して正(負)の競合関係がある財であることを意味する。

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P})\mathbf{x}, \quad (\mathbf{p}(\mathbf{x}))_i \geq 0 \quad \forall i, \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_0 \equiv p_0(1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}_+^m, \quad \mathbf{P}_0 \equiv (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_0) \in \mathbf{M}_{mm}, \quad \mathbf{P} \equiv (P_{ij}) \in \mathbf{M}_{mm}.$$

同様に財の単位生産費用を示す費用ベクトル  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  を  $x_i$  の線形非斉次な逆需要関数により式(2)で表わし、費用平面を定義する。(各  $c_0$  は価格面の  $c$ -切片であり、 $\mathbf{C}_0$  の要素はすべて同じ、すなわち  $\mathbf{c}_0=(c_0,$

$c_0, \dots, c_0)^T$ であると仮定.) 行列 $C=\{C_{ij}\}$ は,財のたとえば原料間の競合・補完関係を示し,  $C_{ij}$ が負(正)の場合は第 $j$ 種が第 $i$ 種に対して正(負)の競合関係がある財であることを意味する.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_0 + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C})\mathbf{x}, \quad (\mathbf{c}(\mathbf{x}))_i \geq 0 \quad \forall i, \\ \mathbf{c}_0 &\equiv c_0(1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}_+^m, \quad \mathbf{C}_0 \equiv (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_0) \in \mathbf{M}_{mm}, \quad \mathbf{C} \equiv (C_{ij}) \in \mathbf{M}_{mm}. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで価格ベクトル $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,費用ベクトル $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ ,利益ベクトルを定める定数ベクトル $\mathbf{p}_0, \mathbf{c}_0$ ,係数行列 $\mathbf{P}, \mathbf{C}$ が満たすべき条件として, (a)状態変数  $\mathbf{x}(t)$  の取りうる値に対し価格,費用,収益の値が常に正になることが必要である. また, 経済的な尤もらしさを担保するため, (b)価格行列の対角成分は負であること, (c)価格行列及び費用行列の非対角成分は符号対称であることを要求する.

$$\begin{aligned} (a) \quad & p_i(\mathbf{x}) \geq c_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall i \quad \forall \mathbf{x}, \\ (b) \quad & P_{ii} \leq 0 \quad \forall i, \\ (c) \quad & \text{sgn}(P_{ij}) = \text{sgn}(P_{ji}), \text{sgn}(C_{ij}) = \text{sgn}(C_{ji}) \quad \forall i \quad \forall j. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.2 プレイヤーエージェントの集合的な学習メカニズム

各プレイヤーにとって,各財の間の競合補完関係を正確に把握し,かつ無数に存在する他の生産者の意思決定内容に最適に反応することはほとんど困難である.しかし各財の現在価格・費用及びプレイヤー全体の平均収益等のマクロ情報は知り得てもよい.したがってこのような「限定合理的」プレイヤーがマクロ情報に基づいておこなうミクロな意思決定と,ミクロな意思決定の集積によるマクロ状態の変化(ミクロ-マクロ相互作用)を記述することが必要である.

このようなミクロ-マクロ相互作用のメカニズムとして,ここでは出口(Deguchi[4], 出口[11])によって提案された社会学習動学(SDL: Social Learning Dynamics)を適用する. SLDにより「ランダムマッチングと繁殖/淘汰」という生物進化的アナロジーを持ち込むことなくマルコフ決定プロセスに基づいて,進化的ゲームにおける複製子動学(Replicator Dynamics)と同型な力学系を得ることができる.ここで  $q_{ij}$  は主体が自身の生産対象を第 $i$ 種から第 $j$ 種へと変更する遷移確率として定義する. (Fig.1)

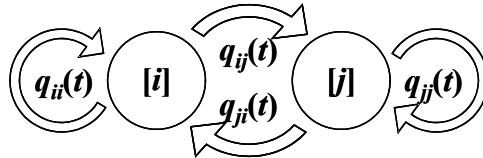


Fig. 1. 意思決定のマルコフ過程,  $q_{ij}$  はプレイヤーが生産する財の種類を $i$  から  $j$  に遷移する確率.

更に  $E_i(\mathbf{x})$  は市場の状態が  $\mathbf{x}$  であるときの第 $i$ 種の期待利益であり,  $W(\mathbf{x})$  は  $E_i(\mathbf{x})$  の市場平均を表す. 式(4)は,基本仮説であり,遷移確率  $q_{ij}$  が $j$ 種の相対利益  $E_j/W$  と市場占有率  $x_j$  の積に比例していることを示す. 定数  $r$  は所与の学習レートである.

$$E_i(\mathbf{x}) \equiv p_i(\mathbf{x}) - c_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x}, \quad W(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^n E_i(\mathbf{x}) x_i, \quad (4)$$

$$q_{ij} \equiv \Pr(i \rightarrow j|i) = r x_j E_j(\mathbf{x}) / W(\mathbf{x}).$$

基本仮説(4)のもと, Fig.1 のマルコフ過程について連続極限をとると市場力学系(5)を得る.

$$\begin{aligned}
x_i(t+\Delta t) &= x_i(t) + \left\{ \sum_j q_{ji}(\mathbf{x})x_j(t) - \sum_j q_{ij}(\mathbf{x})x_i(t) \right\} \Delta t \\
&= x_i(t) + r \left\{ \sum_j E_i(\mathbf{x})x_jx_j - \sum_j E_j(\mathbf{x})x_jx_i \right\} \Delta t / W(\mathbf{x}), \\
\frac{dx_i}{dt} &= r \frac{x_i \{E_i(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x})\}}{W(\mathbf{x})} = rx_i \frac{((\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x})_i - \mathbf{x} \cdot (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P} - \mathbf{C})\mathbf{x}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

この市場力学系は右辺分母が  $i$  に依らないため、時間スケールの変換で進化ゲーム理論のReplicator Dynamicsと同型である。(Deguchi[4], 出口[11]).

以上により社会学習動学を競争的な市場経済モデルと自然に接地させることができた。出口は社会学習動学が境界条件としての報酬構造に依存して解軌道の大域的性質が分岐を起こすこと(構造不安定)に着目し、高次集団との相互作用による制度設計、間接制御を提唱している(Deguchi[4], 出口[11])。以下では出口のアプローチから離れ、市場の状態不安定の創発とその広義の意味での制御方法の設計を目指す。

### 3 市場の複雑性

ここでは、上で定式化された市場の動学において、少数のパラメータで表現される市場の構造変化によって、市場動学における内生的な複雑挙動としてのカオスが発生することを示す。

市場力学系において財のバリエーションが3種の場合、規格化条件を除く独立な自由度は2であるため、ポアンカレ・ベンディクソンの定理から市場の振舞いには均衡点のほか周期軌道とリミットサイクルしか生じ得ない。しかし4種以上の場合には、進化ゲームにおいてSkyrms[7]が示したようにカオスが発生し得る。

線形な価格・費用から構築できる市場動学から取り出せる複雑な挙動の一例として、ここでは独立した2つの市場セグメントが相互作用を強めていく過程を想定し、この過程で生産される財の種類が安定したひとつの市場で淘汰整理される代わりに、複雑で予測不能な変動が永続する状況を示す。

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= rx_i \frac{(\mathbf{R}\mathbf{x})_i - \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}\mathbf{x}} \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m x_i(0) = 1, \\
\mathbf{R} &= (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + \mathbf{P}^S + \mathbf{C}^S) + \gamma(\mathbf{P}^I + \mathbf{C}^I) \\
&\equiv (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0) + \mathbf{R}^S + \gamma\mathbf{R}^I.
\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)の価格・費用行列により、2つの市場セグメントが分離している場合の両セグメント内部における価格費用の挙動( $\mathbf{P}^S, \mathbf{C}^S$ )及びこれら市場セグメント間の価格費用の相互作用( $\mathbf{P}^I, \mathbf{C}^I$ )を表す。これを定数 $\gamma$ で結合することで市場セグメント間の統合とその度合いを表し、 $\gamma=0$ ならば市場は各2種からなる2つの市場セグメントが独立している状態を、 $\gamma$ が大きいくほど市場統合が進みセグメント間の相互作用が大きくなった状態を表す。

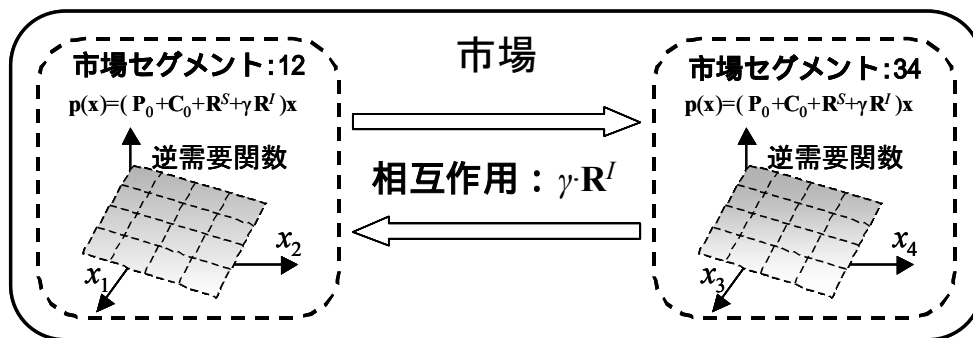


Fig. 2. 相互作用する2つのセグメントからなる市場

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^S &= \begin{pmatrix} -0.75 & -0.9 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.75 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^S = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.1 & 0 & 0 \\ -1.2 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 & -1 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.7 & -0.8 \\ -1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.9 \\ 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{R} &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0 + (\mathbf{P}^S + \gamma \mathbf{P}') + (\mathbf{C}^S + \gamma \mathbf{C}') \\
&= (\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}_0) + \mathbf{R}^S + \gamma \cdot \mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.45 & -0.8 & 0 & 0 \\ 1.1 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.65 & 0.8 \\ 0 & 0 & -0.3 & -1.05 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.6 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & -1.7 \\ -1.4 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

式(7)において価格及び費用の構造が条件(a)~(c)を満たすことは明らかである。

この市場におけるカオス状態のアトラクタをFig.3 に分岐図と対応するリアプノフ指数の変化をFig.4 に示す。かなり広い $\gamma$ の範囲において典型的な自己相似形の分岐パターンが発生していること、これに対応しリアプノフ指数が正の値へ遷移していくことが観察される。

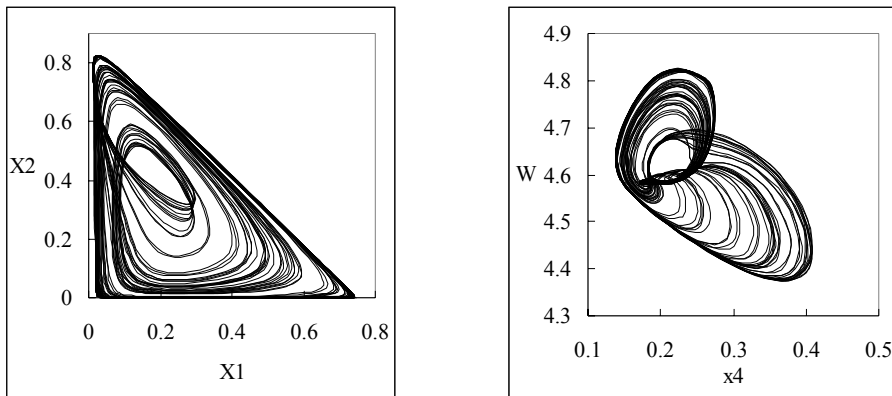


Fig. 3. 市場力学系(6)(7)のカオス状態におけるアトラクタ( $\gamma=0.96$ )

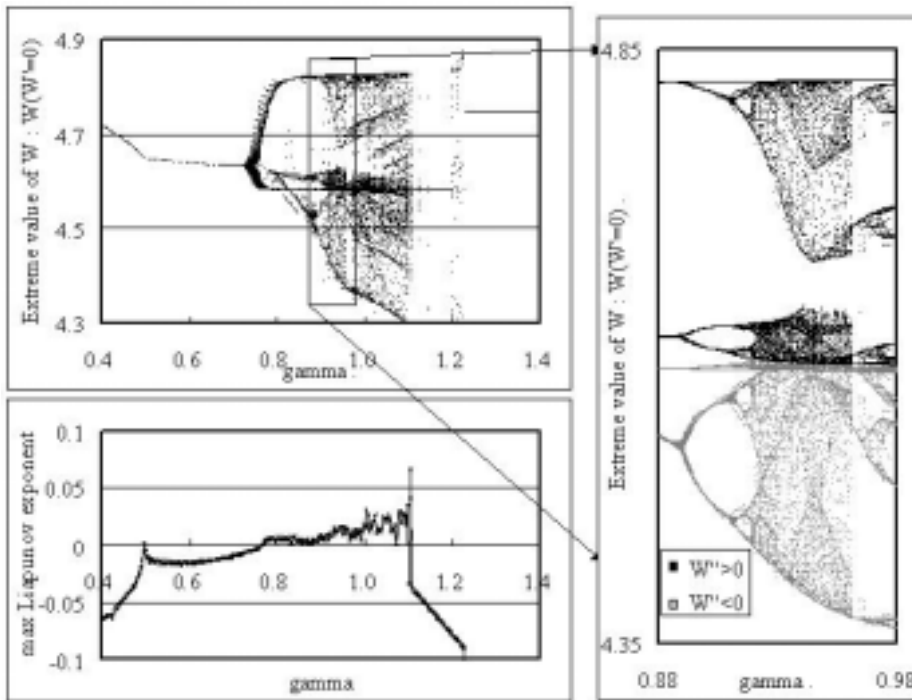


Fig. 4. 市場力学系(6)(7)における市場の平均収益Wの極値でとった分岐図

市場力学系(6)(7)は、線形な逆需要関数とマルコフ決定過程から構成された比較的簡単な連続力学系であり、最適反応曲線の組み合わせにおけるパイ捏ね変換や時間応答の遅れを明示的に用いてはいない。にもかかわらず市場における財のバリエーションの増大やそれら相互の競合関係の深化など、通常市場の発展や統合などの文脈においてもカオスが生じし得ることを示している。

#### 4 複雑性の飼い馴らし

ここでは市場動学に出現した複雑挙動に対し、カオス制御手法の適用による「飼い馴らし」を試みる。

複雑な市場システムの制御には、先ず集中制御と分散制御の方向性が考えられるが、集中的な制御においては、制御者に市場システム方程式(特に価格・費用の代替・補完関係)に関する正確な知識と操作(全知全能)が要求される。たとえ間接的な制度設計を行う場合においても、エージェントの内部モデル(効用・選好)やシステムの状態方程式に対する完全な知識(あるいは精確な同定)を必要とする。

一方、分散制御において、個々の主体の「賢さ」を向上させる方向へ進んでは、限定合理的プレイヤーという市場モデルの前提を否定することになる。ここでは第3の方向性として、プレイヤーと同様マクロな観測量の利用のみに基づいた牧羊犬(Sheepdog)のような制御(Kunigami&Terano[8])が競争的市场におけるカオスの安定化にも有効となる場合があることを示す。

連続カオス系の制御手法である「遅延フィードバック制御」(Pyragas[9])(Fig.6)は、これらの要求を満たすが、重要な制御パラメータである遅延時間が試行錯誤的にしか決まらない点で不満が残る。

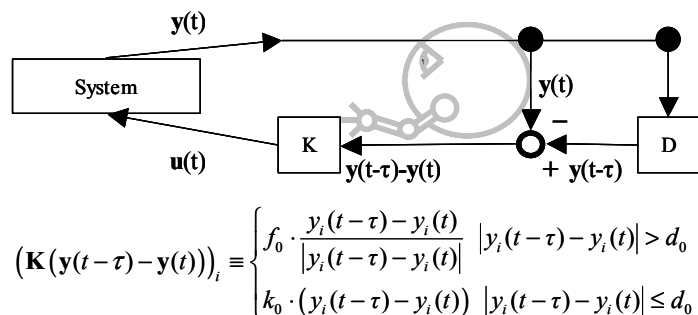


Fig. 6. 遅延フィードバック制御の考え方

そこで、状態変数のピーク間隔から遅延時間を適応的に検出する「自己適応遅延時間フィードバック制御」(Kittel&Parisi&Pyragas[10])の適用を考える。ただし「自己適応遅延時間フィードバック制御」では、遅延時間の短い成分に過敏でかえってシステムを不安定化させやすいこと、制御者にとって全く予想外の軌道が選択されることが多いことから、本研究ではこの「自己適応遅延時間フィードバック制御」に、ターゲットになる状態量と制御周期の双方に遅延時間の検出「窓」を設定し、制御者が限定した範囲で制御パラメータが選択されやすくするよう改善を試みた。(Fig.7)

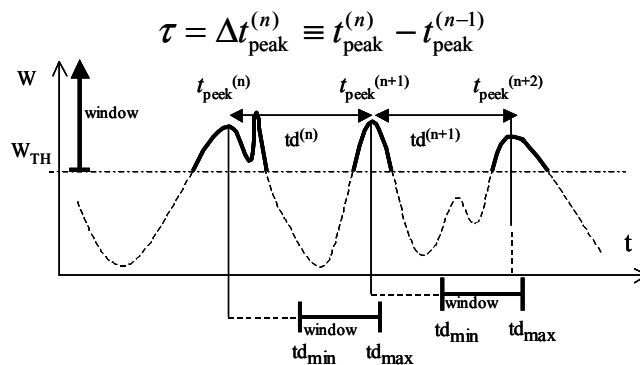
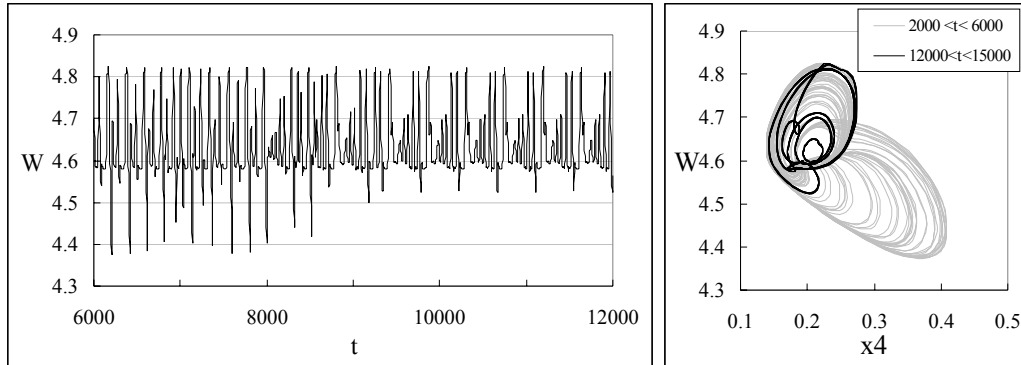


Fig. 7. 「窓」により限定された自己適応遅延時間の検出

ここでは、市場の平均効用Wをターゲットになる状態量とし、所与の $W_{TH}$ 以下のピークは検出しない。

また遅延時間については、記憶限界により定まる $t_{dmax}$ 以上のピーク間隔は検出せず、 $t_{dmin}$ 以下のピーク間隔は検出しても制御に反映しないものとする。

この「窓付き自己適応遅延時間フィードバック制御」エージェントを用いてカオス的で予測不能な市場状態を、予測可能な市場へと「飼い馴らし」た例をFig.8に示す。

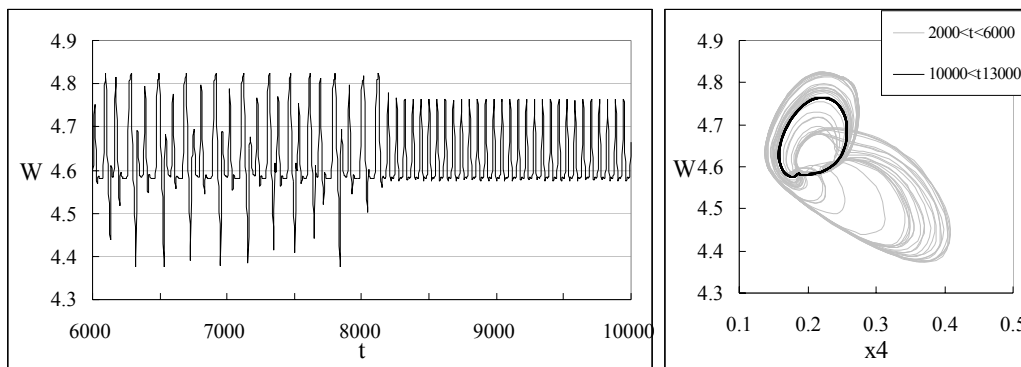


$\gamma = 0.96, r = 4, \text{ start control at } t=8000$

Controller\_1:  $W_{TH} = 4.60, K=f_0 = 0.0001, D = 0.00005, \tau_{min} = 10.0, \tau_{max} = 80.0.$

Fig. 8. 市場力学系(6),(7)のカオスに対し窓付き自己適応遅延時間フィードバック制御を適応した例

本制御方式では、複数の制御者が同時に並存することが可能である。異なる制御パラメータを持つ2つの「窓付き自己適応遅延時間フィードバック制御」エージェントがカオス市場を飼い馴らす例をFig.9に示す。1制御エージェントより低い制御ゲインでより安定した制御を実現しているように見えるが、エージェント数と制御性能の関係については更に検討を加える必要がある。



$\gamma = 0.96, r = 4, \text{ start control at } t=8000$

Controller\_1:  $W_{TH} = 4.60, K=f_0 = 0.000025, D = 0.00001, \tau_{min} = 40.0, \tau_{max} = 80.0.$

Controller\_2:  $W_{TH} = 4.80, K=f_0 = 0.000025, D = 0.00001, \tau_{min} = 10.0, \tau_{max} = 40.0.$

Fig. 9. 市場力学系(6),(7)のカオスに対し窓付き自己適応遅延時間フィードバック制御を2つ同時に適応した例

## 5 まとめ

本報告ではカオス的挙動を示す市場モデルを提案し、その挙動、安定性と馴化について議論した。本報告の主要な内容は以下のようにまとめられる。

- 複数のバリエーションが相互に競争性を持つ財にCournot型の逆需要関数を拡張し、無数の主体が生産に参入・退出する市場のモデルを、社会学習動学(Social Learning Dynamics)として構築し、これによりミクロ-マクロ相互作用を含む市場動学を構築した。(Section 2)
- 離散系のパイ捏ね変換や時間遅れを仮定せず、線形な逆需要関数から構築された連続力学系において

も、市場の拡大や統合につれてカオスの発生があり得ることが示される。(Section 3)  
・カオス制御手法である自己適応遅延時間フィードバック制御を適用し、カオス状態にある市場を特に賢さを必要としない「牧羊犬」的なエージェントで「飼馴らす」ことができる。  
今後の課題としては、本研究の枠組みをより一般的なものに拡張し、さまざまな市場問題に適用できるモデルを指向することが挙げられる。

## 謝辞

東京工業大学の出口弘先生、青森公立大学の小野崎保先生、ソニー研究所の高安秀樹先生には、特別講義・研究会における意見交換・質疑等を通じて貴重な御指摘・御意見をいただきました。この場を借りて御礼申し上げます。なお、本研究の一部は、科学研究費補助金基盤研究（B）14380154 の支援を受けた。

## 参考文献

1. R.Gibbons, "Game Theory for Applied Economics", Princeton Univ. Press, pp14-21, 1992.
2. T.Puu, I.Sushko, "Oligopoly Dynamics", Springer, 2003.
3. J.Hofbauer, K.Sigmund, "Evolutionary Games and Population Dynamics (2nd ed.)", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1998)
4. H.Deguchi, "Economics as an Agent-Based Complex System", pp.19-23, Springer 2005.
5. T.Puu, "Chaos in Duopoly Pricing", Chaos Solitons and Fractals, vol. 1, pp.573-581, 1991.
6. M.Kopel, "Simple and Complex Adjustment Dynamics in Cournot Duopoly Models", Chaos Solitons and Fractals. 7(1991) 2031-48
7. B.Skryms, "Chaos and the explanatory significance of equilibrium: Strange attractors in evolutionary game dynamics" In "The Dynamics of Norms", C. Bicchieri et al. (eds.) 199-222, Cambridge univ. press (1997).
8. M.Kunigami, T.Terano, "Connected Replicator Dynamics and Their Control in a Learning Multi-Agent System" In "Intelligent Data Engineering and Automated Learning", Liu,J., Cheung,Y., Yin,H.(eds.) Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2690. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (2003) 18-26.
9. K.Pyragas, "Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback", Physics Letters A, Vol.170 No.6, pp.421-428, 1992.
10. A.Kittel, J.Parisi, K.Pyragas, "Delayed feedback control of chaos by self-adapting delay time", Physics Letters A, Vol.198, pp.433-436, 1995.
11. 出口 弘, 複雑系としての経済学, 日科技連, 2000. ([4]の原著)