2007－ICS－149 (7)
2007／10／30

# 開環境での協力ゲームにおける公平な配分を実現する解概念の提案

大田 直樹　佐藤 恭史　岩崎 敦　横尾 真　Vincent Conitzer

提携を組むことは，自動化された利己的な主体（エージェント）の持つ重要な性質であり，協力ゲーム理論では提携を結んだエージェントの集合が得た利得の分配法に関する研究を行っている．しかし協力ゲーム理論における既存の利得の分配法（解概念）はインターネットのような匿名の開環境の下においてエージェントが可能な不正操作に対し，脆弱である．そのため我々はそのような操作に頑健な解概念である匿名操作不可能コアを提案した．しかしこの解概念は膨大な計算量／表記量を必要とするといった問題がある．このため我々は匿名操作不可能シャプレイ値という新しい解概念を提案する．この解概念は匿名操作不可能コアより解の算出／表記が容易にできる．

Coalition formation is an important capability of automated negotiation among self-interested agents. In order for coalitions to be stable, a key question that must be answered is how the gains from cooperation are to be distributed. Recent research has revealed that traditional solution concepts are vulnerable to various manipulations in open anonymous environments such as the Internet. To address the manipulations, a solution concept called the anonymity-proof core, which is robust against such manipulations, was developed. However, this solution concept is difficult to represent and calculate outcome functions in terms of computational complexity. To address these problems, we develop a new solution concept called the anonymity-proof shapley value. This solution concept is easy to represent / calculate the anonymity-proof shapley value.

## 1 はじめに

提携を組むということは，自動化された利己的な主体（エージェント）の持つ重要な性質である．我々はエージェント間の提携が成立した場合，エージェントの集合が得た利得をどう分配するかという問題について考える必要がある．

この問題を解決する方法のひとつとして，協力ゲーム理論の利用が挙げられる．協力ゲーム理論は，複数のエージェントが協力した際，協力の結果得た利得の分配方法についての研究分野であり，先に挙げた問題の解決方法として利用できる．この研究分野においては，解概念と呼ばれる利得の分配方法がいくつか提案されており，シャプレイ値，コア，最小コアそして仁といった解概念はマルチエージェントシステムにおいて，実際に利用されている?[]?[]?[]?[]．さらに近年のインターネットの普及により，複数の企業，組織が動的，迅速に提携を構成することが可能／必要となったことから，協力ゲーム理論の適用分野は今後さらに拡大していくことが予想される．例えば，近年情報ネットワークの発展により在宅で可能な仕事が増えている．しかしこのようなネットワークにより与えられる仕事量が固定的であると，育児などの突発的に問題が生じるようなタスクとの両立は困難となる．そこで，在宅で可能な仕事に関して，仕事の依頼主と働く側が集う電子マーケットを設立することにより，柔軟な勤務を可能とすることが考えられる．このような電子マーケットにおいて，仕事の依頼主，働く側の双方にとって利益となるメカニズムの設計に協力ゲー

A Fair Solution Concept for Coalitional Games in Open Anonymous Environments.

Naoki Ohta, Yasufumi Sato, Atsushi Iwasaki, Makoto Yokoo, 九州大学大学院システム情報科学府, the Department of Intelligent Systems, Graduate School of ISEE, Kyushu University, Vincent Conitzer, デューク大学, Levine Science Research Center, Duke University.

ム理論は応用できる．

しかしシャプレイ値やコアといった代表的な解概念は，インターネットの様な匿名の開環境下において，エージェントが行うことが可能な不正操作に対し，耐性を持たない?[]?[]．これらの操作を防止するには，操作に耐性を持つ解概念である匿名操作不可能な解概念が必要となる．今まで匿名操作不可能な解概念として，匿名操作不可能コア?[]?[]や匿名操作不可能仁?[]?[]が提案されている．しかしこれらの解概念は，1）膨大な表記量および計算量が必要，2）得られる配分の不公平性，3）適用できるゲームが限定的といった短所がある．

そこで本論文では匿名操作不可能シャプレイ値という解概念を新しく提案する．匿名操作不可能シャプレイ値は，解の表記量／計算量が比較的少なく，匿名操作不可能コアが持つ不公平性を解消しており，優加法的な特性関数を持たない協力ゲームに対し適用可能である場合もあり，匿名操作不可能コアより多くのゲームに対し適用可能である．

## 2 前提条件の定義

今まで開発された協力ゲームの解概念は，特性関数を用いて利得の配分を決定している．特性関数 $w$ とは，任意の提携（ゲームに参加しうるエージェントの集合 $N$ の部分集合）$X$ を引数とする関数であり，$w(X)$ は $X$ が協力し合うことで得る利得を示す．

しかし，この特性関数 $w$ が与える情報は，匿名の開環境でエージェントが実行可能な操作の定式化には不十分である．そのためエージェントの持つ能力をより詳細に記述するスキルという概念が導入された ?[] ?[]．特性関数をスキルの集合に対し定義することにより，匿名の開環境でエージェントが実行可能な操作が明確に定義できる．

**定義 1 (スキルとエージェント)** スキルとは各々のエージェントが持つ，個々の分割不可能な技能である．各エージェントは各々1つ，または複数のスキルを持つ．また各スキルはそれぞれ固有の名称を持ち，同じ機能を持つスキルもそれぞれ区別できるとする．

**定義 2 (スキルの特性関数)** スキルの特性関数 $v: 2^T \to \Re$（$T$はスキルの全体集合）は，任意のスキルの集合 $S$ に対して，$S$ を持つエージェントが協力した場合に得られる利得 $v(S)$ を与える．

スキルの特性関数 $v$ は，エージェントの特性関数 $w$ に情報を追加したものである必要がある．例えばエージェント $i$ が持つスキルの集合を $S_i$ とする．この時 $X$ について，$S_X = \bigcup_{i \in X} S_i$ とおいた時，$w(X) = v(S_X)$ が成立するようなスキルの特性関数 $v$ を，エージェントの特性関数 $w$ に情報を追加したものという．以下スキルの特性関数はエージェントの特性関数に情報を追加したものとする．

匿名の開環境下において，任意のエージェントは複数のエージェントであるかのように振舞う行為（架空名義の利用），他のエージジントと結託し一人エージェントであるかのように振舞う行為（共謀），所持するスキルの一部を所持していないように振舞う行為（スキルの隠蔽）により，利得を不正に増加させる．これらの操作を防止するには以下の2つの条件を満たす必要がある．1）所持スキルにより決定される配分である．2）エージェントがスキルの隠蔽を行っても利得が上昇しない配分である．所持スキルにより決定される配分とは，以下のようにして決定されるエージェントの利得の配分である．

- スキルの特性関数を用いて（どのエージェントがどのスキルを持つかという情報は参考にしてはならない），スキル $s$ が受け取る利得 $f(s)$ を決定する
- スキルの集合 $S_t$ を持つエージェント $t$ の受け取る利得 $g(t)$ を以下の式により算出する $g(t) = \sum_{s \in S_t} f(s)$

またエージェントがスキルの隠蔽を行っても利得が上昇しない配分であることを示すには，任意のスキルの集合 $S \subseteq T$ に参加した場合の，配分を決定する必要がある．

これら2つの条件を満たす配分を表現する方法として，利得関数が提案された．

**定義 3 (利得関数)** 利得関数 $\pi(s, S)$ とは，ゲームに参加したスキルの集合が $S$ であった場合，$s$ が受け取る利得を示す．また利得関数 $\pi$ は以下の条件を満たす．

- $\forall S \subseteq T,\ \forall s \in S,\ \pi(s, S) \geq 0$

- $\forall S \subseteq T,\ \sum_{s \in S} \pi(s, S) = v(S)$

$\pi$ を用いることにより，２つの条件の内，１）を満たしていることは明らかである．２）の条件を満たす利得関数として匿名操作不可能性を持つ利得関数が提案されている．

**定義 4 (匿名操作不可能性)** 以下の条件を満たす利得関数 $\pi$ は，匿名操作不可能性を持つ．

- $\forall S, S', S_{-i},\ S' \subset S \subseteq T,$
  $S_{-i} \subseteq T,\ S_{-i} \cap S = \emptyset,$
  $\sum_{s \in S'} \pi(s, S' \cup S_{-i}) \leq \sum_{s \in S} \pi(s, S \cup S_{-i})$

スキルの特性関数から匿名操作不可能性を持つ利得関数を導出する解概念を匿名操作不可能な解概念という．この解概念は匿名の開環境下において適用可能な解概念である．

匿名操作不可能な解概念の例として，匿名操作不可能コアが挙げられる．この解概念は，任意のエージェントの集合が与えられた配分に不満を持ち，独自に提携を組むようなことが絶対に生じない利得関数の集合である．

**定義 5 (匿名操作不可能コア)** 匿名操作不可能コアとは，以下の条件を満たす匿名操作不可能性を持つ利得関数 $\pi$ の集合である．

- $\forall S, \forall S' \subseteq S,\ \sum_{s \in S'} \pi(s, S) \geq v(S')$

匿名操作不可能コアは，匿名の開環境における提携成立の実現性に着目した重要な解概念である．しかし

1. 参加しうるスキルの数が $n$ 場合，最悪 $2^n$ 以上の表記量及び計算量を必要とする
2. 全く同じ能力を持つエージェントに違う利得を与えるという種の不公平性を持つ
3. 優加法的な特性関数を持つ協力ゲームの内，一部のものにのみ適用可能と，適用できるゲームが限定的

と言った短所を持つ．これらの短所は匿名操作不可能コアを改良した匿名操作不可能仁も完全には解決していない．そのため本論文ではこの短所を解決する解概念である匿名操作不可能シャプレイ値を提案する．

## 3 従来のシャプレイ値とその公理系の拡張

匿名操作不可能コアや匿名操作不可能仁は優加法的な特性関数を持つ協力ゲームの一部にのみ適用可能であるという短所があった?[]?[]．そのため本論文では優加法的な特性関数より緩い条件となる，単調的な特性関数を持つ協力ゲームに対し適用可能である匿名操作不可能シャプレイ値という解概念を提案する．単調的な特性関数は，ある提携に新しいスキルが参加した際，その提携が得る利得が減少しない性質を持つ．

**定義 6 (単調的な特性関数)** 単調的な特性関数とは，以下の条件を満たす特性関数 $v$ である．

- $\forall S' \subset S \subseteq T,\ v(S) \geq v(S')$

### 3.1 シャプレイ値とその公理系

本節では匿名操作不可能シャプレイ値のベースとなる解概念であるシャプレイ値とその性質について述べる．シャプレイ値は，もともと単調的な特性関数を持つ協力ゲームに対し適用可能な解概念であり，また匿名操作不可能コアが持つような一種の不公平性を持たない解概念でもある．本論文では以下説明を簡単にするために特性関数 $v$ は，0-正規化されているとする．0-正規化は一般性を維持する処理であるので，0-正規化していると仮定しても，以下の議論に条件が必要となることは無い．シャプレイ値は以下のように定義される?[]．

**定義 7 (シャプレイ値)** 任意の単調的な特性関数を持つ協力ゲーム $(T, v)$ のシャプレイ値 $sh(v, s)$ は以下の式により定義される．

- $sh(v, s) =$
  $\sum_{S: S \subseteq T,\ s \notin S} \frac{|S|!(|T|-|S|-1)!(v(S \cup \{s\}) - v(S))}{|T|!}$

このシャプレイ値が持つ意味を直観的に述べる．まず全てのスキルに相違なる番号を付ける．あるスキル $s$ が受け取る利得は $s$ より小さい番号を持つスキルの集合を $S_l$ とおき，$v(S_l \cup \{s\}) - v(S_l)$ となるとする．$s$ のシャプレイ値とはこの方法で利得の分配を決定した場合，スキル $s$ が受け取る利得の期待値である．

またシャプレイ値は以下の公理系を同時に満たす唯一の解概念であることが示されている．

- パレート効率性 ($\sum_{s \in T} sh(v, s) = v(T)$)
- ヌルスキル公理（提携に参加しても参加しなくても全く影響を与えないスキル（ヌルスキル）に利得を与えない（$s$ がヌルスキルである場合，$sh(v, s) = 0$ が成立)）

- 対称性（$s$ と $s'$ が対称（全く同じ能力を持つ）である場合，$sh(v,s) = sh(v,s')$ が成立）
- 加法性（$v_1+v_2 = v$ の時，$sh(v_1,s)+sh(v_2,s) = sh(v,s)$ が成立）

これらの公理系を満たすことからシャプレイ値は，匿名操作不可能コアが持つ不公平性を持たない解概念ということができる．

### 3.2 匿名操作不可能シャプレイ値の公理系

シャプレイ値は先に挙げた公理系を満たす唯一の解概念であるが，匿名の開環境の下で適用不可能である ?[] ?[]．そのため先の公理系を緩めることで新しい解概念である匿名操作不可能シャプレイ値を提案する．本節では，シャプレイ値の公理系を匿名の開環境の下で適用可能にするため改めて定義する．

まず最初にシャプレイ値の公理系の見直しを行う．シャプレイ値の公理系とはシャプレイ値が算出する配分が満たしている条件である．しかし，匿名操作不可能シャプレイ値は利得関数を算出する解概念なので，そのまま公理系を当てはめることは出来ない．そのため利得関数が満たすべき条件として，シャプレイ値の公理系を定義し直す必要がある．以下シャプレイ値の公理系を定義し直し，それらの公理系を緩めていく．

**定義 8 (パレート効率性)** 以下の条件を満たす利得関数 $\pi$ を定義する解概念はパレート効率性を持つ．

- $\forall S \subseteq T,\ \sum_{s \in S} \pi(s,S) = v(S)$

ヌルスキル公理を定義しなおすため，ヌルスキルについて定義しなおす必要がある．

**定義 9 (ヌルスキル)** 以下の条件を満たすスキル $s$ は，スキルの集合 $S$ に対するヌルスキルである．

- $\forall S',\ S' \ni s\ and\ S' \subseteq S\ holds,\ v(S') = v(S' \setminus \{s\})$

**定義 10 (ヌルスキル公理)** 以下の条件を満たす利得関数 $\pi$ を定義する解概念はヌルスキル公理を持つ．

- $if\ s\ is\ null\ skill\ for\ S\ then\ \pi(s,S) = 0$

対称性を定義するため，対称なスキルについて定義しなおす．

**定義 11 (対称なスキル)** 以下の条件を満たすスキル $s,\ s'(s \in S,\ s' \in S)$ は，スキルの集合 $S$ に対して対称である．

- $\forall S',\ S' \not\ni s,\ S' \not\ni s',\ v(S' \cup s) = v(S' \cup s')$

**定義 12 (対称性)** 以下の条件を満たす利得関数 $\pi$ を定義する解概念は対称性を持つ．

- $if\ s\ and\ s'\ are\ symmetry\ for\ S\ then\ \pi(s,S) = \pi(s',S)$

**定義 13 (加法性)** $v_1 + v_2 = v$ を満たす任意の特性関数 $v_1$，$v_2$，$v$ について，以下の条件を満たす利得関数 $\pi_1$，$\pi_2$，$\pi$ を定義する解概念は加法性を満たす．

- $\forall S \subset T,\ \forall s \in S,\ \pi_1(s,S) + \pi_2(s,S) = \pi(s,S)$

シャプレイ値の性質より $\pi(s,S) = sh_S(v,s)$（$sh_S$ とは参加スキル $S$ 特性関数 $v$ の協力ゲームにおけるシャプレイ値，以下 $sh_T = sh$ とする）と定義された解概念はこれらの公理系を同時に満たす唯一の解概念である．しかしこの解概念は匿名操作不可能性を持たない ?[] ?[]．そのため，匿名操作不可能性を持つシャプレイ値を構築するためにはこの公理系を緩める必要がある．

ここからは，前にあげた公理系を緩和し，匿名操作不可能シャプレイ値が満たすべき公理系を構築する．これらの公理系のうちパレート効率性は維持する．これは，パレート効率性を満たしていない配分には必ず参加者全員にとってより好ましい配分が存在するからである．以下，次のように公理系を構築する（図1参照）．まず最初にヌルスキル公理を緩和し，緩ヌルスキル公理を提案する．これは定理1よりヌルスキル公理と，パレート効率性，匿名操作不可能性を同時に満たす解概念が存在しないためである．次に対称性と加法性を緩和し，緩対称性と演繹可能性を提案する．これは定理2より緩ヌルスキル公理と対称性とパレート効率性と匿名操作不可能性を同時に満たす解概念が存在せず，また定理3より緩ヌルスキル公理とパレート効率性と加法性と匿名操作不可能性を同時に満たす解概念が存在しないためである．以上より匿名操作不可能シャプレイ値が満たすべき公理系として，パレート効率性，緩ヌルスキル公理，緩対称性，演繹可能性が構築される．

**定理 1** ヌルスキル公理と，パレート効率性，匿名操作不可能性を同時に満たす解概念は存在しない．

**証明** ヌルスキル公理と，パレート効率性，匿名操作不可能性を同時に満たす解概念 $\alpha$ が存在すると仮

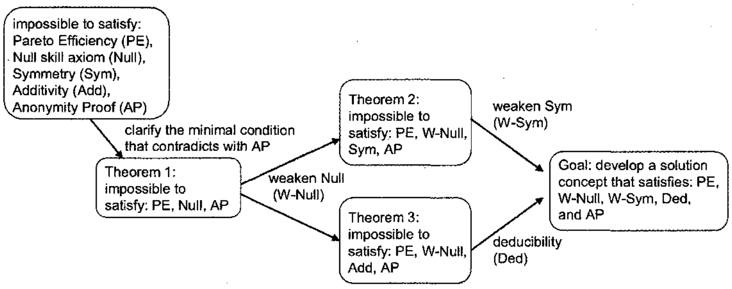


**図 1　匿名操作不可能シャプレイ値の公理系の構築方法**

定する．次に $T=\{a,b,c,d\}$ と以下のように定義された特性関数 $v$ を持つ協力ゲームについて考える．

- $v(a,b,c,d)=1$,
- $v(a,b,c)=v(a,b,d)=$
  $v(a,c,d)=v(b,c,d)=1$,
- $v(a,b)=v(c,d)=1$,
- その他の部分集合 $S$ に対して，$v(S)=0$.

この協力ゲームに対し，解概念 $\alpha$ を用いた場合，得られる利得関数を $\pi$ とおく．パレート効率性より

$$\sum_{s\in T}\pi(s,T)=1$$

が成立する．本証明ではこの式が成立し得ないことを示し，定理 *1* が正しいことを示す．まず参加スキルが $a,b,d$ の場合について考える．この時スキル $d$ はヌルスキルであるため，$\pi(d,\{a,b,d\})=0$ となる．この式とパレート効率性を満たすことから，$\pi(a,\{a,b,d\})+\pi(b,\{a,b,d\})=1$ が成立する．さらに匿名操作不可能性から

$$\pi(a,T)+\pi(b,T)+\pi(c,T)\geq 1 \qquad (1)$$

が導かれる．

この方法を他のヌルスキルにも用いることで，$\pi$ がパレート効率性を持たないことを証明する．具体的には以下の事実に着目する．

- 参加スキルが $a,b,c$ の時 $c$ がヌルスキルである．
- 参加スキルが $b,c,d$ の時 $b$ がヌルスキルである．
- 参加スキルが $a,c,d$ の時 $a$ がヌルスキルである．

これらの事実に対し，前の方法を用いることで以下の式が導かれる．

$$\pi(a,T)+\pi(b,T)+\pi(d,T)\geq 1 \qquad (2)$$

$$\pi(a,T)+\pi(c,T)+\pi(d,T)\geq 1 \qquad (3)$$

$$\pi(b,T)+\pi(c,T)+\pi(d,T)\geq 1 \qquad (4)$$

式 *1-4* より，$4/3\leq\sum_{s\in T}\pi(s,T)\neq 1$ が成立する．よって $\pi$ はパレート効率性を持たず，仮定と矛盾する．よって定理 *1* は成立する．□

以上よりシャプレイ値に匿名操作不可能性を追加するためにはヌルスキル公理を緩和する必要がある．よってヌルスキル公理を緩和した緩ヌルスキル公理を定義する．これはスキルの全体集合 $T$ にとってのヌルスキルに，利得を与えないという公理である．緩ヌルスキル公理を満たす解概念は，何の意味も持たないようなスキルが，とりあえず利得を得る可能性があるからという理由で参加することを防止できる．

しかし前に述べたとおりヌルスキル公理を緩めるだけでは，シャプレイ値に匿名操作不可能性を与えることは不可能である．具体的にはパレート効率性，緩ヌルスキル公理，対称性，そして匿名操作不可能性の4つを同時に満たす解概念は存在せず，また緩ヌルスキル公理とパレート効率性と加法性と匿名操作不可能性を満たす解概念も存在しない．ここからは緩ヌルスキル公理を定義し，その上で緩ヌルスキル公理を緩めるだけでは，シャプレイ値に匿名操作不可能性を与えることは不可能であることを示す．

**定義 14 (緩ヌルスキル公理)** 以下の条件を満たす利得関数 $\pi$ を定義する解概念は緩ヌルスキル公理を満たす．

- *if* $s$ *is null skill for* $T$ *then* $\forall S\subseteq T,\ \pi(s,S)=0$

**定理 2** 緩ヌルスキル公理と対称性とパレート効率性と匿名操作不可能性を同時に満たす解概念は存在しない．

スペースの都合上証明は省略する．しかし $T=$

$\{a,b,c,d,e\}$，定理 1 の証明に用いた特性関数 $v$ に $T$ におけるヌルスキル $e$ を加えた特性関数 $v'$ を持つ協力ゲーム $(T,v')$ について，緩ヌルスキル公理と対称性より $\pi(d,\{a,b,d,e\})=0$ であることを導けば，以下は定理 1 と同じ方法で証明できる．

**定理 3** 緩ヌルスキル公理とパレート効率性と加法性と匿名操作不可能性を同時に満たす解概念は存在しない．

**証明** 定理 *1* の証明にある特性関数を $v_1$ とし，また $v_2(\{a,b,c,d\})=1$, $\forall S \subset \{a,b,c,d\}$, $v_2(S)=0$ を満たす特性関数を $v_2$ とする．次に $v_1+v_2=v_3+v_4$ が成立するよう以下のように $v_3$, $v_4$ を定義する．

- $v_3(\{a,b,c,d\})=v_3(\{a,b,c\})=v_3(\{a,b,d\})=v_3(\{a,b\})=1$,
- その他の部分集合 $S$ に対して，$v_3(S)=0$.
- $v_4(\{a,b,c,d\})=v_4(\{a,c,d\})=v_4(\{b,c,d\})=v_4(\{c,d\})=1$,
- その他の部分集合 $S$ に対して，$v_4(S)=0$.

緩ヌルスキル公理とパレート効率性と加法性と匿名操作不可能性を同時に満たす解概念 $\alpha$ が存在すると仮定する．特性関数 $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ に $\alpha$ を用いることで得られる利得関数を $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$ とおく．この時加法性より，$\pi_1+\pi_2=\pi_3+\pi_4$ が成立する．

本証明では $\pi_1$ に注目し，$\pi_1$ が匿名操作不可能性を持たないことを示すことで，定理 *3* が正しいことを示す．$\alpha$ はパレート効率性を持っているため $\pi_1(s,\{a,b,c,d\})>0$ を満たすスキル $s$ が少なくとも 1 つは存在する．以下スキル $c$ が $\pi_1(c,\{a,b,c,d\})>0$ を満たすと仮定する．$c$ が $\pi_1(c,\{a,b,c,d\})>0$ を満たさない場合，$\pi_1(s,\{a,b,c,d\})>0$ を満たすスキルについて議論を進めることで，証明できる．

まず参加スキルが $a,b,c$ の場合について考える．この時，緩ヌルスキル公理より $\pi_3(c,\{a,b,c\})=0$ が成立する．この式と $\pi_4(c,\{a,b,c\})=0$ より，$\pi_1(c,\{a,b,c\})=0$ が成立し，$\pi_1(c,\{a,b,c\})=0$ より $\pi_1(a,\{a,b,c\})+\pi_1(b,\{a,b,c\})=1$ が成立する．

次に参加スキルが $a,b,c,d$ の場合を考える．$\pi_1$ は匿名操作不可能性を持つため $\pi_1(a,\{a,b,c,d\})+\pi_1(b,\{a,b,c,d\})+\pi_1(d,\{a,b,c,d\})\geq\pi_1(a,\{a,b,c\})+\pi_1(b,\{a,b,c\})=1$ が成立する．しかし $\pi_1(c,\{a,b,c,d\})>0$ より $\pi_1(a,\{a,b,c,d\})+\pi_1(b,\{a,b,c,d\})+\pi_1(d,\{a,b,c,d\})<1$ が成立してしまい矛盾が生じる．よって定理 *3* は成立する．□

定理 2 及び 3 よりシャプレイ値に匿名操作不可能性を持たせるには対称性と加法性を緩める必要がある．そのため対称性を緩めた公理である緩対称性と加法性を緩めた公理である演繹可能性を定義する．緩対称性とはスキルの全体集合にとって対称であるスキルの組は，同じ利得を得るという公理であり，これを満たす解概念は，全く同じ能力を持つ参加者が，異なる利得を得るという不公平性を持たない．また演繹可能性とは全体の問題の解を副問題の解から構成可能という公理系であり，これは，計算の簡略化を可能とする．

**定義 15 (緩対称性)** 以下の条件を満たす利得関数 $\pi$ を定義する解概念は緩対称性を持つ．

- *if* $s$ *and* $s'$ *are symmetry for* $T$ *then* $\forall S$, $S \not\ni s$ *and* $S \not\ni s'$, $\pi(s,S\cup\{s\})=\pi(s',S\cup\{s'\})$ *and* $\pi(s,S\cup\{s,s'\})=\pi(s',S\cup\{s,s'\})$

**定義 16 (演繹可能性)** $v_1+v_2=v$ を満たす任意の特性関数 $v_1$, $v_2$, $v$ について，以下の条件を満たす利得関数 $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi$ を定義する解概念は演繹可能性を満たす．但し $g$ とは任意の関数である．

- $\forall S \subseteq T$, $S=(s_1,\ldots,s_m)$, $\pi(s,S)=g(\pi_1(s_1,T),\pi_2(s_1,T),\ldots,\pi_1(s_m,T),\pi_2(s_m,T))$

ヌルスキル公理，対称性，加法性の 3 つの公理系を緩めることで，公理系と匿名操作不可能性を同時に満たす解概念が定義可能となる．本論文では，パレート効率性，緩ヌルスキル公理，緩対称性，演繹可能性，匿名操作不可能性を同時に満たす解概念である匿名操作不可能シャプレイ値を提案する．

## 4 匿名操作不可能シャプレイ値

本節では匿名操作不可能シャプレイ値を定義し，この解概念がパレート効率性，緩ヌルスキル公理，緩対称性，演繹可能性，匿名操作不可能性を満たすことを示す．まず最初に匿名操作不可能シャプレイ値を定義する．匿名操作不可能シャプレイ値は，シャプレイ値をもとに以下のように定義される．

**定義 17 (匿名操作不可能シャプレイ値)** ある協力ゲーム $(T,v)$ に対する匿名操作不可能シャプレイ

値とは，以下のように定義される利得関数である．但し $sh(v,s)$ とは $(T,v)$ に対するシャプレイ値である．

- $\forall S \subseteq T$, $\forall s \in S$,
  $\pi(s,S) = v(S)sh(v,s)/\sum_{t\in S} sh(v,t)$

この定義より明らかなように，匿名操作不可能シャプレイ値は，シャプレイ値から容易に算出できる．

**例 1** 定理 *1* で定義された協力ゲームシャプレイ値は以下のように算出される．

$$sh(v,a) = sh(v,b) = sh(v,c) = sh(v,d) = 1/4$$

これを用いることで例えば $\pi(c,\{a,b,c\})$ 等は，$\pi(c,\{a,b,c\}) = \frac{1*1/4}{1/4+1/4+1/4} = 1/3$ と容易に求まる．

次に匿名操作不可能シャプレイ値が提案した公理系を満たすことを示す．

**定理 4** 匿名操作不可能シャプレイ値は，緩ヌルスキル公理，緩対称性，演繹可能性を同時に満たす．

証明はスペースの都合上省略する．しかし，シャプレイ値がヌルスキル公理，対称性，加法性を持つことより，容易に証明できる．

**定理 5** 匿名操作不可能シャプレイ値は匿名操作不可能性を満たす．

**証明** 任意の協力ゲーム $(T,v)$ について考える．$S' \subset S \subseteq T$ を満たす任意の提携 $S, S'$ と $S \cap S_{-x} = \emptyset$ 及び $S_{-x} \subseteq T$ を満たす任意の提携 $S_{-x}$ について協力ゲーム $(T,v)$ の匿名操作不可能シャプレイ値 $\pi$ は

- $\sum_{s\in S'} \pi(s, S' \cup S_{-x}) =$
  $v(S' \cup S_{-x}) \sum_{s\in S'} sh(v,s)/\sum_{t\in S' \cup S_{-x}} sh(v,t)$
- $\sum_{s\in S} \pi(s, S \cup S_{-x}) =$
  $v(S \cup S_{-x}) \sum_{s\in S} sh(v,s)/\sum_{t\in S \cup S_{-x}} sh(v,t)$

を満たす．以下，

$$\frac{\sum_{s\in S'} sh(v,s)}{\sum_{t\in S'\cup S_{-x}} sh(v,t)} \leq \frac{\sum_{s\in S} sh(v,s)}{\sum_{t\in S\cup S_{-x}} sh(v,t)} \quad (5)$$

が成立することを示す．$v$ は単調性を満たすため，$v(S' \cup S_{-x}) \leq v(S \cup S_{-x})$ が成立する．この式と，$A \leq B$ を満たす任意の正の実数 $A, B, C$ について $A/B \leq (A+C)/(B+C)$ が成立することより式 *5* が成立する．以上より $\sum_{s\in S'} \pi(s, S' \cup S_{-x}) \leq \sum_{s\in S} \pi(s, S \cup S_{-x})$ となり，定理 *5* が成立する．□

このように匿名操作不可能シャプレイ値は，シャプレイ値が満たしていた公理系をある程度満たしている．また匿名操作不可能シャプレイ値は匿名操作不可能コアに比べ以下の点で優れている．

- 匿名操作不可能コアは優加法的な特性関数を持つ協力ゲームの内，一部のものにのみ適用可能と適用できるゲームが限定的であるが，匿名操作不可能シャプレイ値は単調的な特性関数を持つ全ての協力ゲームに対し適用可能
- 匿名操作不可能コアから算出される利得関数は，不公平なものが存在するが匿名操作不可能シャプレイ値から算出される利得関数は，不公平なものが存在しない
- 参加しうるスキルの数が $n$ の時，匿名操作不可能コアは最悪 $n * 2^{n-1}$ の表記量を必要とするが，匿名操作不可能シャプレイ値はシャプレイ値から容易に算出できるため常に表記量 $n$ といえる
- 匿名操作不可能コアを算出するには，変数と制約式の数が $2^n$ 個を超える線形計画法を解く必要があるが，匿名操作不可能シャプレイ値の算出方法はシャプレイ値の算出方法とほぼ同じ

しかし匿名操作不可能シャプレイ値は，全ての参加者が満足する利得関数を算出しない場合があるという短所を持つ．そのため匿名操作不可能シャプレイ値を用いた場合，一部の参加者が独自に提携を組んでしまい協力ゲームが成立しない可能性がある．

## 5 匿名操作不可能シャプレイ値の評価

本節では匿名操作不可能シャプレイ値が，シャプレイ値とどの程度乖離しているか評価する．本論文では匿名操作不可能シャプレイ値を提案したが，これはシャプレイ値が匿名操作不可能性を持っていないためであり，匿名操作不可能性を無視すれば，シャプレイ値のほうがより望ましい解概念といえる．そのため両者がどの程度離れた利得を与えるかは，匿名操作不可能シャプレイ値を評価する上で一つの指針となる．

評価の指標として乖離度という値を用いる．参加しうるスキルの集合 $T$，特性関数 $v$ を持つ任意の協力ゲームの乖離度 $d(t)$（但し $t = |T|$）は以下のように定義される．

$$d(t) = \frac{1}{2^t - (2+t)} \sum_{S\subseteq T} \frac{\sum_{s\in S}(|\pi(s,S) - sh_S(v,s)|)}{2v(S)}$$

但し $\pi$ はこの協力ゲームの匿名操作不可能シャプレ

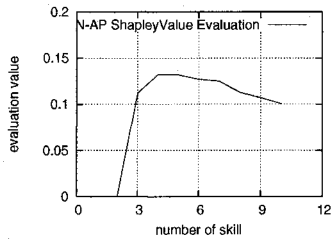


**図 2　匿名操作不可能シャプレイ値の評価**

イ値である．乖離度は，ある協力ゲームにおけるシャプレイ値と匿名操作不可能シャプレイ値に生じる差をを示しており，両者が等しい時，最小値の 0 をとり，差が最も大きい時，最大値の 1 をとる．以下，乖離度を匿名操作不可能シャプレイ値の評価値とする．本節ではスキルの総数が $t$ となる協力ゲームについて，評価値を算出した．特性関数は単調かつランダムに生成．$t = 1 \ldots 10$ を 1 インスタンスとし，100 インスタンスを平均する．

この評価の結果は図 2 の通りである． 匿名操作不可能シャプレイ値はスキル数に関係なく乖離度を低く保っている．またグラフの形から，$t$ が増加しても乖離度が大きく上昇するとは考えがたい．そのため，シャプレイ値に近い利得を与えると言う点では，匿名操作不可能シャプレイ値に一定の評価を下せる．

## 6　おわりに

インターネットのような匿名の開環境下で協力ゲームを行う場合，既存の解概念は適用不可能である．そのため匿名の開環境下で適用可能な解概念である匿名操作不可能コアが提案された．しかし匿名操作不可能コアは1）膨大な表記量および計算量が必要，2）得られる配分の不公平性，3）適用できるゲームが限定的と言った短所を持っている．

そのため本論文では匿名操作不可能シャプレイ値という解概念を提案した．この解概念は計算量や表記量も既存のシャプレイ値とほぼ等しく，匿名操作不可能コアが持つ不公平性を持たず，また匿名操作不可能コアより多くの協力ゲームに対して適用可能である．

しかし，この匿名操作不可能シャプレイ値は，既存のシャプレイ値と違い，公理系を満たす唯一の解概念となっていない．そのため匿名操作不可能シャプレイ値が公理系を満たす唯一の解概念であるか，公理系を満たす解概念が複数ある場合，匿名操作不可能シャプレイ値はそれらの解概念と比較して優れているか確認する必要がある．