

タンデムネットワークにおける複数フローの エンドツーエンドバックログの漸近解析

小林 和朝† 高橋 幸雄‡ 高田 寛之†
†長崎大学 情報システム工学科
‡東京工業大学 数理・計算科学専攻

ネットワークカリキュラスの手法を用いた決定論的なネットワークの評価手法が注目を浴びているが、統計的
多重効果が無視されるため、過剰見積もりになると言われている。本論文では、ネットワークカリキュラスの
手法を使ってサンプルパスについてエンドツーエンドで成り立つ関係式を導き、次に大偏差原理を用いて複
数フローあるタンデムネットワークにおけるエンドツーエンドのバックログの確率分布を解析する。具体的
には、時刻 t でのエンドツーエンドのバックログ $Q^L(t)$ に関して、 $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log P(Q^L(t) > Ly) = -\gamma_t(y)$
であることを示した。ここで $\gamma_t(y)$ は、 $0 \leq s \leq s' \leq t$ に対する時間間隔 $(s, t]$ における初段のノードに到着
するフローのトラフィック量のキュムラントと時間間隔 $(s, s']$ におけるフローに対するノード i でのサー
ビス量のキュムラントから求められる関数である。

Asymptotic Analysis of End-to-end Backlog for Many Flows in Tandem Networks

Kazutomo KOBAYASHI†, Yukio TAKAHASHI‡ and Hiroyuki TAKADA†
†Dept. of Computer and Information Sciences, Nagasaki University
‡Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology

In this paper, we analyze the decay rate of the distribution of the end-to-end backlog in tandem networks
with many flows, by using network calculus and large deviation techniques. Considering a network with
 L flows, we obtain $\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log P(Q^L(t) > Ly) = -\gamma_t(y)$, where $\gamma_t(y)$ is a function derived from the
cumulants of arrivals to the network in time interval $(s, t]$ and of services at node i in time interval $(s, s']$,
with $0 \leq s \leq s' \leq t$.

1 はじめに

1990年代にネットワークカリキュラスと呼ばれるネットワークの最悪値評価のための方法論が開発さ
れ [6], インターネットの QoS 制御に大きな影響を与えた [10]. ネットワークカリキュラスの特徴は、*min-
plus* 代数を使って、エンドツーエンドのバックログ、遅延、バースト性などの評価を、単一ノードの評価
に帰着できることである [2, 4, 6, 10]. 具体的には、ノード i でのあるサービスカーブを $S_i(t)$ とすれば、
 $S^{net}(t) = S_1 * S_2 * \dots * S_n(t)$ はエンドツーエンドのサービスカーブとなり、エンドツーエンドの評価が
 $S^{net}(t)$ のサービスカーブを持つ単一ノードの評価に帰着できる。これは決定論的に最悪値評価を行って
いることになる。ここで演算子 $*$ は二つの関数 $f(t), g(t)$ に対して $f * g(t) = \min_{0 \leq s \leq t} \{f(s) + g(t-s)\}$ の演
算を行うもので、畳込み演算子と呼ばれている。またノード i のサービスカーブとは、 $A_i(t)$ を時刻 0 から時
刻 t までのノード i へ到着量、 $D_i(t)$ をノード i からの退去量としたとき、任意の $t > 0$ で $D_i(t) \geq A_i * S_i(t)$
を満足する $S_i(t)$ のことである。

しかし決定論的な最悪値評価に従ってネットワーク資源を決定すると、統計的多重効果が無視されるた
め、過剰品質となりやすいことが知られている。特に、フロー数や経由するノード数が多く、トラフィック
の負荷が軽い場合などは、その傾向が顕著に現れる。この問題を解決するために、*min-plus* 代数を保存し

つつ、確率評価を導入して、統計的多重効果を考慮したストカスティックネットワークカリキュラスが最近議論されるようになった [1, 3-5, 9]. これらの中で最新の結果は、次のようなものである [5]. $S^{i,\epsilon}(t)$ を

$$P(D_i(t) > A_i * [S^{i,\epsilon} - \sigma]_+(t)) \leq \epsilon_i(\sigma)$$

を満足するノード i のサービスカーブとすると、全体のネットワークでは、

$$P(D^{net}(t) > A^{net} * [S_{-\delta}^1 * \dots * S_{-(n-1)\delta}^n(t) - \sigma]_+(t)) \leq \epsilon(\sigma)$$

を満足する. なお, $\delta > 0, \tau_0 > 0$ はフリーパラメータであり, $f_{-\delta}(t) \equiv f(t) - \delta t$, $[x]_+ \equiv \max\{0, x\}$,

$$\epsilon(\sigma) = \inf_{\sigma_1 + \dots + \sigma_n = \sigma} \left\{ \epsilon_n(\sigma_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\delta \tau_0} \int_{\sigma_i}^{\infty} \epsilon_i(u) du \right\}$$

である.

本論文では、これらとは異なるアプローチによって、エンドツーエンドのバックログの分布を解析する. まずはネットワークカリキュラスの手法を使ってサンプルパスについてのエンドツーエンドで成り立つ関係式を導き、次にその関係式に大偏差原理を適用して複数フローあるタンデムネットワークにおけるエンドツーエンドのバックログの漸近解析を行う. 具体的には、時刻 t で L フローのエンドツーエンドのバックログ $Q^L(t)$ に対して、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log P(Q^L(t) > Ly) = -\gamma_t(y)$$

を得る. ここで、 $\gamma_t(y)$ は

$$\begin{aligned} \gamma_t(y) &= \min_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} \sup_{\theta \in R} \{\theta x - \mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1})\}, \\ \mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1}) &= \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log E[e^{\theta(A^L(t, s_0) - C_n^L(t, s_{n-1}) - \dots - C_1^L(s_1, s_0))}] \end{aligned}$$

である. 但し、 $A^L(t, s_0)$ は時間区間 $(s_0, t]$ に初段のノードに到着した L フローの到着量、 $C_i^L(s_i, s_{i-1})$ はノード i で時間区間 (s_{i-1}, s_i) に L フローに対するサービス量である.

以下では、準備として、2 節で、サンプルパスに対して決定論的なネットワークカリキュラスを適用し、エンドツーエンドバックログに対する関係式を導く. さらに 3 節で大偏差原理に用いて漸近解析を行い、4 節で応用例を示す.

2 準備

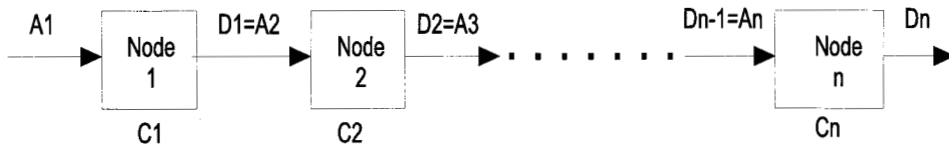


図 1: n ノードのタンデムネットワーク

図 1 に示す n ノードからなるタンデムネットワークを考える. 時刻 t は、 $0, 1, 2, \dots$ の離散時間をとる. ノード i において、時間区間 $(0, t]$ に到着するトラヒックの到着量を $A_i(t)$, サービス量を $C_i(t)$, 退去量を

$D_i(t)$ とし、時刻 t でのバックログを $Q_i(t)$ とする。但し、 $A_i(0) = 0, C_i(0) = 0$ とする。本節では、 $A_i(t), C_i(t), D_i(t)$ は、確率過程におけるサンプルパスもしくは単なる時刻 t に関する非減少関数として考える。このとき、

$$Q_i(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{A_i(t) - A_i(s) - (C_i(t) - C_i(s))\}, \quad (1)$$

$$D_i(t) = A_i(t) - Q_i(t) = \min_{0 \leq s \leq t} \{A_i(s) + (C_i(t) - C_i(s))\} \quad (2)$$

が成り立つ。また、タンデムネットワークの特徴から、前段の退去量が次段の到着量となるため、

$$A_i(t) = D_{i-1}(t), \quad i = 2, \dots, n \quad (3)$$

が成り立つ。今、 $0 \leq s \leq t$ に対して

$$A_i(t, s) = A_i(t) - A_i(s), \quad (4)$$

$$C_i(t, s) = C_i(t) - C_i(s), \quad (5)$$

$$D_i(t, s) = D_i(t) - D_i(s), \quad (6)$$

とおく。また、2変数関数 $f(t, s)$ と $g(t, s)$ に対するふたつの演算子 $*$, \circ を次のように定義する。

$$f * g(t, s) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{f(t, \tau) + g(\tau, s)\}, \quad (7)$$

$$f \circ g(t, s) = \max_{0 \leq \tau \leq s} \{f(t, \tau) - g(s, \tau)\}. \quad (8)$$

これらの演算子は、3つの関数 $f(t, s), g(t, s), h(t, s)$ に対して、

$$\begin{aligned} (f * g) * h(t, s) &= \min_{s \leq u \leq t} \{ \min_{u \leq v \leq t} \{f(t, v) + g(v, u)\} + h(u, s) \} \\ &= \min_{s \leq u \leq v \leq t} \{f(t, v) + g(v, u) + h(u, s)\} \\ &= \min_{s \leq v \leq t} \{f(t, v) + \min_{s \leq u \leq v} \{g(v, u) + h(u, s)\}\} \\ &= f * (g * h)(t, s), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f \circ (h * g)(t, s) &= \max_{0 \leq u \leq s} \{f(t, u) - \min_{u \leq v \leq s} \{h(s, v) + g(v, u)\}\} \\ &= \max_{0 \leq u \leq v \leq s} \{f(t, u) - h(s, v) - g(v, u)\} \\ &= \max_{0 \leq v \leq s} \{ \max_{0 \leq u \leq v} \{f(t, u) - g(v, u)\} - h(s, v) \} \\ &= (f \circ g) \circ h(t, s) \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立つ。式 (9) から演算子 $*$ は結合法則が成り立つので、 $(f * g) * h(t, s) = (f * g) * h(t, s) = f * g * h(t, s)$ と書くことができる。

式 (4), (5), (8) を (1) に適用すると、

$$Q_i(t) = A_i \circ C_i(t, t), \quad (11)$$

となり、(3), (4) と (6) から

$$A_i(t, s) = D_{i-1}(t, s). \quad (12)$$

となる。式 (1)~(12) を使って次の補助定理を証明する。

補助定理 1 任意の $t > 0$ で

$$\sum_{i=1}^n Q_i(t) = A_1 \circ (C_n * C_{n-1} * \dots * C_1)(t, t) \quad (13)$$

が成り立つ。

証明 $D_i(t, s) = D_i(t) - D_i(s)$ の $D_i(t)$ と $D_i(s)$ に式 (2) を適用し、また式 (8) を使うと、

$$\begin{aligned}
D_i(t, s) &= D_i(t) - D_i(s) \\
&= A_i(t) - Q_i(t) - \min_{0 \leq \tau \leq s} \{A_i(\tau) + C_i(s, \tau)\} \\
&= -Q_i(t) + \max_{0 \leq \tau \leq s} \{A_i(t, \tau) - C_i(s, \tau)\} \\
&= -Q_i(t) + A_i \circ C_i(t, s)
\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる. 式 (12) と (14) から

$$\begin{aligned}
A_n \circ C_n(t, t) &= D_{n-1} \circ C_n(t, t) \\
&= \max_{0 \leq \tau \leq t} \{D_{n-1}(t, \tau) - C_n(t, \tau)\} \\
&= \max_{0 \leq \tau \leq t} \{-Q_{n-1}(t) + (A_{n-1} \circ C_{n-1})(t, \tau) - C_n(t, \tau)\} \\
&= -Q_{n-1}(t) + \max_{0 \leq \tau \leq t} \{(A_{n-1} \circ C_{n-1})(t, \tau) - C_n(t, \tau)\} \\
&= -Q_{n-1}(t) + (A_{n-1} \circ C_{n-1}) \circ C_n(t, t)
\end{aligned}$$

が得られる. ここで、式 (10) を上式に適用すると、

$$A_n \circ C_n(t, t) = -Q_{n-1}(t) + A_{n-1} \circ (C_n * C_{n-1})(t, t)$$

が得られる. 上式の右辺に対して同様な式変形を A_1 が現われるまで繰り返すと、

$$A_n \circ C_n(t, t) = -\sum_{i=1}^{n-1} Q_i(t) + A_1 \circ (C_n * C_{n-1} * \cdots * C_1)(t, t).$$

が得られる. ここで、 $Q_n(t) = A_n \circ C_n(t, t)$ であることに注意すると、式 (13) が得られる. \square

時間区間 $(s, t]$ にネットワークに入ってくるトラヒックの量を $A^{net}(t, s) = A_1(t, s)$ 、時刻 t でのネットワーク内でバックログを $Q^{net}(t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t)$ とし、 $C^{net}(t, s) = (C_n * C_{n-1} * \cdots * C_1)(t, s)$ とすると、補助定理は

$$Q^{net}(t) = A^{net} \circ C^{net}(t, t) \tag{15}$$

であることを示している. これは、 $C^{net}(t, s)$ を時間区間 $(s, t]$ のサービス量をもつ単一ノードのバックログと到着量の関係を表している. 今、 $A^{net} \circ C^{net}(t, t)$ を書き下すと、

$$\begin{aligned}
A^{net} \circ C^{net}(t, t) &= \max_{0 \leq s_0 \leq t} \left\{ A^{net}(t, s_0) - \min_{s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq t} \{C_n(t, s_{n-1}) + \cdots + C_1(s_1, s_0)\} \right\} \\
&= \max_{0 \leq s_0 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq t} \{A^{net}(t, s_0) - C_n(t, s_{n-1}) - \cdots - C_1(s_1, s_0)\}
\end{aligned} \tag{16}$$

となる.

3 大偏差原理に基づくエンドツーエンドバックログの解析

前節と同様、離散時間の n ノードからなるタンデムネットワークを考える. 加えて、ネットワークに到着し、ネットワークを通過・退去するトラフィックは確率的でかつ L フローからなると考える. ただし、後に L を動かし、 $L \rightarrow \infty$ なる極限を考える. 今、 $A^L(t, s_0)$ を時間区間 $(s, t]$ にネットワークに到着する L フローの到着量、 $C_i^L(s_i, s_{i-1})$ を L フローに対するノード i での時間区間 $(s_{i-1}, s_i]$ のサービス量、 $Q^L(t)$ を

時刻 t におけるネットワーク内でのバックログとし、それぞれを確率変数とする。式 (15), (16) から、サンプルパスの意味で

$$Q^L(t) = \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} \{A^L(t, s_0) - C_n^L(t, s_{n-1}) - \dots - C_1^L(s_1, s_0)\} \quad (17)$$

が成り立つ。以下、時刻 t を固定して考え、

$$V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) = A^L(t, s_0) - C_n^L(t, s_{n-1}) - \dots - C_1^L(s_1, s_0) \quad (18)$$

と定義すると、 $Q^L(t)$ は

$$Q^L(t) = \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) \quad (19)$$

と書ける。ここで、 $K_t = \{(s_0, \dots, s_{n-1}) | 0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t\}$ とし、各 $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in K_t$ に対して、 $V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1})$ は L について無限の系列を構成するとする。いま、 $\mathcal{V}_t^L(\theta; s_0, \dots, s_{n-1})$ を

$$\mathcal{V}_t^L(\theta; s_0, \dots, s_{n-1}) \equiv L^{-1} \log E[e^{\theta V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1})}]. \quad (20)$$

と定義し、以下の仮定を置く。

A1. すべての $\theta \in R$ において

$$\mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1}) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{V}_t^L(\theta; s_0, \dots, s_{n-1}) \quad (21)$$

が有限の値で存在する。

A2. すべての $\theta \in R$ において $\mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1})$ は θ に関して微分可能である。

A3. すべての L に対して $E[V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1})] < 0$ である。

仮定 A1 と A2 の下で Gärtner-Ellis の定理が成り立ち、Legendre-Fenchel 変換によって与えられる

$$\mathcal{V}_t^*(x; s_0, \dots, s_{n-1}) = \sup_{\theta \in R} \{\theta x - \mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1})\} \quad (22)$$

が *good rate function* となる [7]。仮定 A3 を加えると、平均値が負であるから、 $y > 0$ に対して

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log P(V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly) \leq -\mathcal{V}_t^*(y; s_0, \dots, s_{n-1}) \quad (23)$$

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log P(V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly) \geq -\mathcal{V}_t^*(y+; s_0, \dots, s_{n-1}) \quad (24)$$

が成り立つ。ここで、 $y+$ は、 y より大きい値から y へ近づけた極限を意味する。この結果から、文献 [11] と同様な方法で、バックログに対する次の定理が導かれる。

定理 1 仮定 A1~A3 の下で、 $y > 0$ に対して

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log P(Q^L(t) > Ly) \leq -\gamma_t(y) \quad (25)$$

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log P(Q^L(t) > Ly) \geq -\gamma_t(y+) \quad (26)$$

が成り立つ。但し、

$$\gamma_t(y) = \min_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} \mathcal{V}_t^*(y; s_0, \dots, s_{n-1}). \quad (27)$$

証明 式 (19) に $P(\max\{X, Y\} > a) \leq P(X > a) + P(Y > a)$ の不等式を適用すると、集合 K_t の要素の数は $(t+1)^n$ 以下だから、

$$\begin{aligned} P(Q^L(t) > Ly) &= P\left(\max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly\right) \\ &\leq \sum_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} P(V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly) \\ &\leq (t+1)^n \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} P(V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\log(x)$ が $x > 0$ に対して単調増加関数であるので、上式から

$$L^{-1} \log P(Q^L(t) > Ly) \leq \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} L^{-1} \log P(V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly) + L^{-1} \log(t+1)^n$$

が成り立つ。ここで L について \limsup を取り、右辺に式 (23) を代入すると、定理の式 (25) が得られる。

一方、式 (19) に $P(\max\{X, Y\} > a) \geq \max\{P(X > a), P(Y > a)\}$ の不等式を適用すると

$$P(Q^L(t) > Ly) \geq \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} P(V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly)$$

が成り立ち、

$$L^{-1} \log P(Q^L(t) > Ly) \geq \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} L^{-1} \log P(V_t^L(s_0, \dots, s_{n-1}) > Ly)$$

が成り立つ。ここで L について \liminf を取り、右辺に式 (24) を代入すると、定理の式 (26) が得られる。 \square

モデルをより具体的にするため、以下の仮定を追加すると、次の系が成り立つ。

- A4. 任意の L および任意の $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in K_t$ に対して、確率変数 $A^L(t, s_0)$ および $C_i^L(s_i, s_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$, は互いに独立である。以下、 $C_n^L(s_n, s_{n-1})$ の s_n は t と読み替える。
- A5. 確率変数 $A^L(t, s_0)$ および $C_i^L(s_i, s_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$, に関するキュムラント母関数に対しても、A1, A2 と同様の性質が成り立つ、すなわち任意の $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in K_t$ およびすべての $\theta \in R$ に対して

$$\mathcal{A}(\theta; t, s_0) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log E[e^{\theta(A^L(t, s_0))}], \quad (28)$$

$$\mathcal{C}(\theta; s_i, s_{i-1}) \equiv - \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log E[e^{-\theta(C_n^L(s_i, s_{i-1}))}], \quad i = 1, \dots, n \quad (29)$$

が有限の値で存在し、 θ に関して微分可能である。

系 1 仮定 A3 ~ A5 の下では、定理 1 の $\gamma_t(y)$ は

$$\gamma_t(y) \geq \sup_{\theta \in R} \{\theta y - \mathcal{W}_t(\theta)\}, \quad (30)$$

$$\mathcal{W}_t(\theta) = \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1}} \{\mathcal{A}(\theta; t, s_0) - \mathcal{C}(\theta; s_n, s_{n-1}) - \dots - \mathcal{C}(\theta; s_1, s_0)\} \quad (31)$$

で表される。

証明 今、式 (18) において、仮定 A4 から、確率変数 $A^L(t, s_0)$, $C_i^L(s_i, s_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$, が互いに独立であるため、

$$\begin{aligned} &E[e^{\theta(A^L(t, s_0) - C_n^L(s_n, s_{n-1}) - C_{n-1}^L(s_{n-1}, s_{n-2}) - \dots - C_1^L(s_1, s_0))}] \\ &= E[e^{\theta A^L(t, s_0)}] E[e^{-\theta C_n^L(s_n, s_{n-1})}] E[e^{-\theta C_{n-1}^L(s_{n-1}, s_{n-2})}] \dots E[e^{-\theta C_1^L(s_1, s_0)}] \end{aligned}$$

が成り立ち、したがって、

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t^L(\theta; s_0, \dots, s_{n-1}) &= L^{-1} \log E[e^{\theta(A^L(t, s_0))}] \\ &\quad + L^{-1} \log E[e^{-\theta(C_n^L(s_n, s_{n-1}))}] + \dots + L^{-1} \log E[e^{-\theta(C_1^L(s_1, s_0))}] \end{aligned}$$

が成り立つ。仮定 A5 より、 $L \rightarrow \infty$ のとき上式の右辺の各項の極限が有限の値に収束するので、式 (21), (28), (29) の間には、

$$\mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1}) = \mathcal{A}(\theta; t, s_0) - \mathcal{C}(\theta; s_n, s_{n-1}) - \dots - \mathcal{C}(\theta; s_1, s_0) \quad (32)$$

が成り立つ。ところで、 $\gamma_t(y)$ は、式 (22), (27) から

$$\gamma_t(y) = \min_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta y - \mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1})\}$$

で表される。min と sup の交換を行うと、

$$\gamma_t(y) \geq \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta y - \max_{0 \leq s_0 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq t} \mathcal{V}_t(\theta; s_0, \dots, s_{n-1})\}$$

が得られる。ここで、式 (32) と合わせると系 1 の式 (30), (31) が得られる。 \square

4 応用例

定理 1 と系 1 の組み合わせは、 $P(Q^L(t) > Ly)$ が大きな L に対して

$$P(Q^L(t) > Ly) \lesssim B_t(L, y) \exp \left\{ -L \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta x - \mathcal{W}_t(\theta)\} \right\} \quad (33)$$

で評価できることを表している。但し、 $B_t(L, y)$ は L に関して指数関数より遅い変化をする関数である。本節では、図 2 に示すようなクロストラヒックのあるタンデムネットワークにおいて、フォワーディングトラヒックに着目したエンドツーエンドバックログの評価に近似式 (33) を適用する。また、各フローに対して以下の仮定を置く。

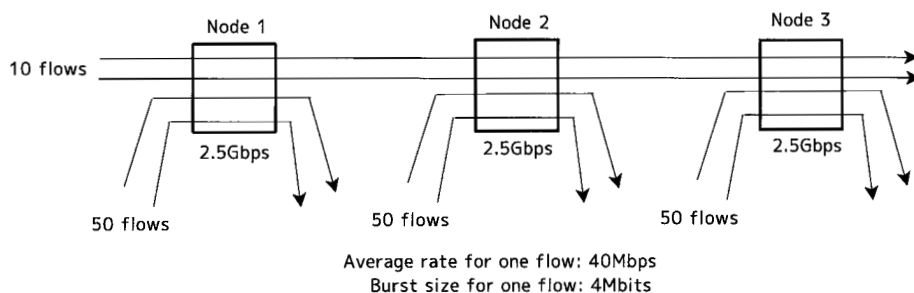


図 2: クロストラヒックのある 3 ノードのタンデムネットワーク

C1. すべてのフローの到着過程は互いに独立で、すべて同じ確率法則に従う。

C2. 各到着過程 $A(s)$ は定常増分過程であり、リーキーバケットにより平均レートは ρ 以下、バーストサイズは σ 以下に制限される。したがって $A(s)$ のキュムラント母関数は

$$\log E[e^{\theta A(s)}] \leq \log \left[1 + \frac{\rho s}{\rho s + \sigma} (e^{\theta(\rho s + \sigma)} - 1) \right] \quad (34)$$

の不等式を満足する [8].

C3. クロストラフィックはフォワーディングトラフィックより優先して処理される。

フォワードトラフィックのフロー数を L 、フロー j の時間区間 $(\tau, s]$ における到着量を $A_j(s, \tau)$ とする。一方、 α をクロストラフィックのフロー数とフォワードトラフィックのフロー数の比として、クロストラフィックは $L\alpha$ フローあり、フロー j の時間区間 $(\tau, s]$ におけるノード i への到着量を $\tilde{A}_{i,j}(s, \tau)$ とする。このとき、時間区間 $(s_0, t]$ におけるフォワードトラフィックのネットワークへの到着量は

$$A^L(t, s_0) = \sum_{j=1}^L A_j(t, s_0) \quad (35)$$

で与えられる。また、ノード i での時間区間 $(s_{i-1}, s_i]$ におけるサービス量は、仮定 C3 と付録の式 (39) から

$$C_i^L(s_i, s_{i-1}) \geq \max \left\{ 0, Lc(s_i - s_{i-1}) - \sum_{j=1}^{L\alpha} \tilde{A}_{i,j}(s_i, s_{i-1}) \right\} \quad (36)$$

を満たすと考えてよい。ここで、 c はフォワーディングトラフィックの（したがってクロストラフィックもの）1 フローに対するサービス率で、 Lc はノードのリンク容量である。 $A^L(t, s_0)$ および $C_i^L(s_i, s_{i-1})$ は仮定 A4, A5 も満足するため、系 1 が利用できる。

式 (35) と仮定 C1, C2 から

$$L^{-1} \log E[e^{\theta A^L(t, s_0)}] \leq \log \left[1 + \frac{\rho(t - s_0)}{\rho(t - s_0) + \sigma} (e^{\theta(\rho(t - s_0) + \sigma)} - 1) \right] \quad (37)$$

が得られる。また、(36), (37) と仮定 C3 から

$$\begin{aligned} & -L^{-1} \log E[e^{-\theta C_i^L(s_i, s_{i-1})}] \\ & \geq \max \left\{ 0, \theta c(s_i - s_{i-1}) - \alpha \log \left[1 + \frac{\rho(s_i - s_{i-1})}{\rho(s_i - s_{i-1}) + \sigma} (e^{\theta(\rho(s_i - s_{i-1}) + \sigma)} - 1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

が得られる。系 1 の $\gamma_t(y)$ を計算をするに当たって、式 (31) の $A(\theta; t, s_0)$ 、 $C_i^L(\theta; s_i, s_{i-1})$ に式 (37), (38) の右辺を使う。この場合、 $\gamma_t(y)$ 下から評価しているため、安全側に評価していることになる。

今回、数値計算に使ったパラメータの値は、 $L = 10$ 、 $L\alpha = 50$ 、 $Lc = 2.5\text{Gbps}$ 、 $\rho = 40\text{Mbps}$ 、 $\sigma = 4\text{Mbits}$ であり、ノード数は 3 である。リンク使用率は $((10 + 50) \times 40 \times 10^6) / (2.5 \times 10^9) \times 100 = 96\%$ である。図 3 に数値結果を示す。 x 軸はバッファ閾値 $x(=Ly)$ 、 y 軸は式 (33) の \log_{10} をとったものである。“1 node”、“2 nodes”、“3 nodes”と記してある 3 つのカーブは $Q_1(t) > x$ 、 $Q_1(t) + Q_2(t) > x$ 、 $Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t) > x$ に対応する。3 つの破線の垂線は、それぞれの最大バックログを表している。

図 3 から、ノードの数が増えるに従い、最大バックログは増えていくが、 $P(Q(t) > x)$ は 96% の高いリンク使用率に関わらず、指数より早い速度で減衰していることがわかる。

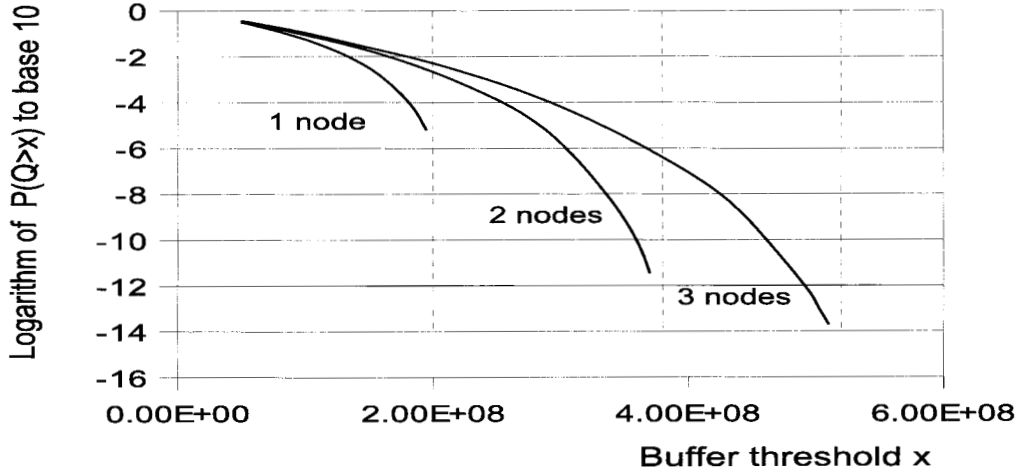


図 3: フォワードトラフィックに対するバックログの裾確率

付録

ノードに低優先フローと高優先フローが混在するとき、低優先度フローに対する時間区間 $(s, t]$ におけるサービス量 $C_l(t, s)$ をどう与えれば良いかを議論する。いま、時刻 0 から時刻 t までの低優先の到着量を $A_l(t)$ 、退去量を $D_l(t)$ 、高優先の到着量を $A_h(t)$ 、退去量を $D_h(t)$ とし、時間区間 $(s, t]$ における全体のサービス量を $C(t, s)$ すると、式 (2) と同様、全体のフローに対して

$$D_l(t) + D_h(t) = \min_{0 \leq s \leq t} \{A_l(s) + A_h(s) + C(t, s)\}$$

が成り立つ。また、高優先のフローは全体のフローに対するサービス量を利用できるため、

$$D_h(t) = \min_{0 \leq \tau \leq t} \{A_h(\tau) + C(t, \tau)\}$$

も成り立つ。したがって、2つの式の差をとると、

$$\begin{aligned} D_l(t) &= \min_{0 \leq s \leq t} \{A_l(s) + A_h(s) + C(t, s)\} - \min_{0 \leq \tau \leq t} \{A_h(\tau) + C(t, \tau)\} \\ &= \min_{0 \leq s \leq t} \left\{ A_l(s) + \max_{0 \leq \tau \leq t} \{A_h(s) - A_h(\tau) + C(\tau, s)\} \right\} \end{aligned}$$

が得られる。上式から、低優先フローに対するサービス量については、

$$C_l(t, s) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{A_h(s) - A_h(\tau) + C(\tau, s)\}$$

と考えることができ、さらに τ として、 t, s を取ると、

$$C_l(t, s) \geq \max\{0, C(t, s) - (A_h(t) - A_h(s))\} \quad (39)$$

が導かれる。

参考文献

- [1] R. Boorstyn, A. Burchard, J. Liebeherr and C. Ottamakorn, Statistical multiplexing gain of link scheduling algorithms in QoS networks (short version), Technical Report CS-99-23, University of Virginia, Computer Science Department, 1999.
- [2] J. Y. Le Boudec and P. Thiran, *Network Calculus: A Theory of Deterministic Queueing Systems for the Internet*, On line Version of the Book Springer Verlag, LNCS 2050, 2004.
- [3] A. Burchard, J. Liebeherr and S. D. Patec, A calculus for end-to-end statistical service guarantees, Technical Report CS-2001-19, University of Virginia, Computer Science Department, 2002.
- [4] C. S. Chang, *Performance Guarantees in Communication Networks*, Springer Verlag, 2000.
- [5] F. Ciucu, A. Burchard and J. Liebeherr, A network service curve approach for the stochastic analysis of networks, Proceedings of ACM Sigmetrics '05, 2005.
- [6] R. Cruz, A calculus for network delay, parts I and II, *IEEE Transactions on Information Theory* **37**(1), 114-141, 1991.
- [7] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Jones and Bartlett, 1993.
- [8] F. P. Kelly, Notes on effective bandwidths, In *Stochastic Networks: Theory and Applications*, Oxford University Press, 1994.
- [9] C. Li, A. Burchard and J. Liebeherr, A network calculus with effective bandwidth, Technical Report CS-2003-20, University of Virginia, Computer Science Department, 2003.
- [10] A. K. Parekh and R. G. Gallager, A generalized processor sharing approach to flow control in integrated service networks: the multiple node case, *IEEE/ACM Transactions Networking* **2**, 137-150, 1994.
- [11] K. Kobayashi and Y. Takahashi, Overflow probability for a discrete-time queue with non-stationary multiplexed input, *Telecommunication Systems* **15** (1,2), 157-166, 2000.