

仮想3次元空間内 NURBS 自由曲面の制御点などのデータ削減と補償的最適化手法の提案

亀田 通¹, 井手口 哲夫², 厚井 裕司¹

E-mail:kameda@isl.melco.co.jp

¹三菱電機情報技術総合研究所 ²愛知県立大学 情報科学部

移動体通信等の狭帯域回線で、3次元仮想空間や仮想物体を送受信する場合、とくにそれが個性的な表現を可能にする3次元自由曲面を転送する場合、そのデータの膨大性によって、転送の困難性が顕著に現れてしまう。本論文はNURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)自由曲面を転送する際に、制御点データ群を削減し、その後にその削除に対し補償的補正再現する方式での最適化再現の手法に関するものである。特にNURBS付随パラメータの内の制御点パラメータについて最適化を施す手段を提案するものである。

Recommendation of data reduction and compensational optimization method for control point reduced NURBS free surface.

Tohoru Kameda¹, Tetsuo Ideguchi², Yuuji Kouji¹

¹Information Technology R&D Center, Mitsubishi Electric Corporation

²Faculty of Information Science and Technology, Aichi Prefectural University

Access to web3D on limited bands such as mobile terminals is more difficult and idiomatically appeared due to data explosion when we want to transmit a more conspicuous character with 3D free surface. This paper describe control point data reduction NURBS free surface, especially focus on control points compensate optimization correspond with this reduction.

1. まえがき

伝送帯域幅の狭いモバイル通信等からwebの仮想3次元空間内仮想物体にアクセスする時、それが特に自由曲面で構成された個性あるキャラクタでは、膨大なデータ量が発生し、そのため通信ボトルネックとなってしまう。日本では、増田ら¹⁾がデータ圧縮の研究しており、米国でもインターネットのネットワークゲームが盛んなゆえに、これらの3次元形状をデータ圧縮しようという研究^{2),3)}は、年ごとに増してきている。またこれらの手法をWeb 3Dに取り込もうとする米国の企業⁴⁾も現れてきた。筆者ら⁵⁾においても、図1に示す自由曲面構成の顔の概形の転送において、従来のポリゴン方式に比べ、データ個数を約1/887に削減したにも拘わらず、原型の形状と比較して同品質か、それ以上の滑らかさで再現できている事を確認した。表1、表2が、その時の実験結果である。NURBS方式でのさらなる圧縮効果と、ポリゴン方式との比較である。

先のこれらの計算実験では、適度な値でモデルを作り、本研究の方向の妥当性を見極めるために行ったもの

である。本研究では、この方向でさらに一般的な事例の自由曲面にも自在に適用できるように、汎用化されたアルゴリズムを作成するものである。

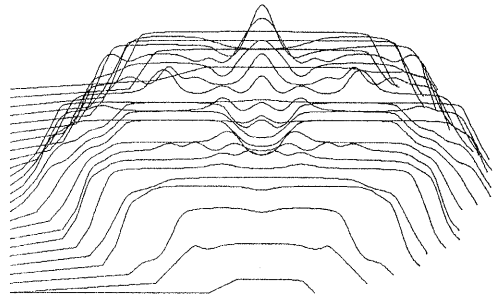


図1 残存データ群から再現された顔の概形

Fig.1 Reconstructed Face shape with reduced data

表1 NURBS無冗長化でのさらなる圧縮効果

圧縮率	処理後の個数	元の個数
1/4.3	706	3053

表2 ポリゴン方式との圧縮率比較
(各々の曲面の滑らかさで)

	圧縮率	実際個数
10分割	1/221.8	706/156660
20分割	1/443.7	706/313320
40分割	1/887.5	706/626640

NURBS 処理自体は、機械 CAD 分野で普及しつつある。本研究では、これらを通信分野に取り込み、さらに新たに NURBS 制御点の削減処理や、残存 NURBS 制御点や付随パラメータを補償的に適応化するという処理を施して、従来と同程度や、それ以上の品質の曲面を再現するというアルゴリズムに仕上げたものである。

2. 本研究の基本方式の概略説明

図2に、本研究の基本方式の処理手順を示す。

下準備として、仮想物体での自由曲面部分を取り出ししておき、その後、下記の処理を行う。

- ① NURBS 曲面の制御点と、関連パラメータデータを取り出し、これらの曲面曲率に対する寄与率を計算する。そして寄与が少ないものは削除し、他を残す。
- ② 原型の曲線に近似するように、現曲線の残存している制御点データと付随パラメータの値を、補償的に変化させる。

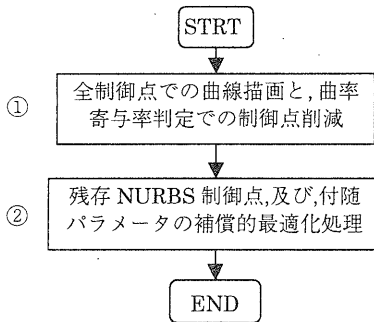


図2 データ削減、適応化処置の流れ

Fig.2 The flow of data reduction and adaptation

この2項目の処理が、この方式の基本を成すものである。

図3は、この手法を理解し易いように示した図である。いま $P_1 \sim P_6$ のすべての制御点を使って作成した原型曲線 $C(u)$ があり、これに対し $p_3 \sim p_4$ を削減し、残

りの制御点のみで生成した曲線 $C'(u)$ を、近似させようと操作する様子の図である。

制御点の位置座標と、付随パラメータのすべてを、変化させ、適応的に曲線を近似させようとしている。

図3 削減・補償操作の原理を示す図

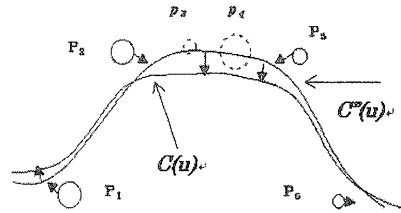


Fig.3 Explanation of principle of reduction and compensate operation

つまり、この「なるべく元の曲線と同じ曲線を再現する」所謂、近似再生の計算アルゴリズムを、本研究で作成し検討した。

3. 理論的背景

本章ではこの研究で使用した理論と、それを採用した背景を示す。

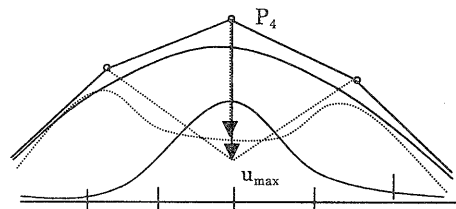


図4 3次曲線の $P_s=C(u=3/5)$ での変形。

Fig.4 Curve deformation on $P_s=C(u=3/5)$ with degree three

3.1 NURBS 曲線の制御点の再設定による変形

有理、非有理にかかわらず B-spline 曲線を $C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i$ とし、任意の制御点 P_k , $0 \leq k \leq n$, 変換後の制御点 \hat{P}_k , 変換ベクトル $V = \hat{P}_k - P_k$ すると、変換後の曲線 $\hat{C}(u)$ は、

$$\begin{aligned} \hat{C}(u) &= R_{0,p}(u)P_0 + \dots + R_{k,p}(u)(P_k + V) + \dots + R_{n,p}(u)P_n \\ &= C(u) + R_{k,p}(u)V \end{aligned} \quad (1)$$

この式(1)はすべて、曲線 $C(u)$ の $u \in [u_k, u_{k+p+1}]$ に対する関数的変換された点を表している。

いま、最大の変換は、関数 $R_{k,p}(u)$ の最大値で起こるとし、 u を $u \in [u_k, u_{k+p+1}]$ や $P=C(u)$ の定数とすると、もし、 P を V 方向に、距離 d で、 P_k に変位させた時、 α は、以下のように決められる。

$$\hat{P}_k = P_k + \alpha V \quad (2)$$

要望の変換での効果は、 $\hat{P}=C(u)$ として、以下が自明である。

$$|\hat{P} - P| = d = \alpha |V| R_{k,p}(\bar{u})$$

すると、 α にまとめると。

$$\alpha = \frac{d}{|V| R_{k,p}(\bar{u})} \quad (3)$$

となる。

曲線変形は、2つの方法がある。1つは、制御点を単純に移動する事であり（図4参照）、他は、曲線をつかむ事である（図5参照）。この場合、ノット(knot)を自動挿入し、曲線を変形しなければならない。 $R_{k,p}(u)$ は、基本関数であり、その変位の最大値は、 \bar{u} に最も近い。 t_i は、ノードと呼ばれる。

$$t_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p u_{i+j} \quad i=0, \dots, n \quad (4)$$

t_i は、非ゼロの $R_{k,p}(u)$ の領域に内在するノットの平均値である。実際の計算する場合、代わりに k 値を選べば良い。その場合、

$$|\bar{u} - t_k| = \min_i |\bar{u} - t_i| \quad (5)$$

となる。図5は、ノード近くの指標 k の1個の制御点が再設置している事を示している。

ノットを挿入する場合の \bar{u} 値の設定は、

$$\bar{u} = t_{k+1} = \frac{1}{p} \left(\hat{u} + \sum_{j=2}^p u_{k+j} \right) \quad (6)$$

$$\hat{u} = p\bar{u} - \sum_{j=2}^p u_{k+j}$$

とすれば良い。

$P=C(u)$ を、 V に沿って、移動した場合、 $0 \leq \gamma \leq 1$ として、

$$\hat{P}_k = P_k + (1-\gamma)\alpha V \quad (7)$$

$$\hat{P}_{k+1} = P_{k+1} + \gamma\alpha V$$

P_k と P_{k+1} は隣り合う制御点であり、

$$\gamma = \frac{\bar{u} - t_k}{t_{k+1} - t_k} \quad (8)$$

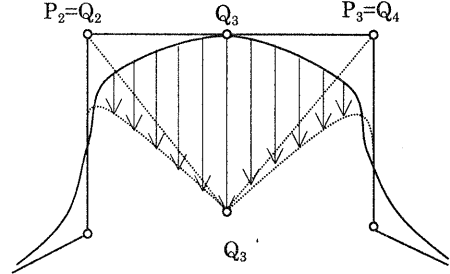


図5 2次曲線での制御点の再配置による変化。

Fig.5 Curve warping cause by control point reposition

ここでは、 $t_k \leq u \leq t_{k+1}$ で、変換定数から、

$$|\hat{P} - P| = d = |(1-\gamma)\alpha V R_{k,p}(\bar{u}) + \gamma\alpha V R_{k+1,p}(\bar{u})|$$

同様に α についてまとめると

$$\alpha = \frac{d}{|V| [(1-\gamma)R_{k,p}(\bar{u}) + \gamma R_{k+1,p}(\bar{u})]} \quad (9)$$

ここで、NURBS 曲面に拡張すると、

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,p;j,q}(u, v) P_{i,j} \quad (10)$$

と表され、これを V ベクトルに沿って曲面点 $P=S(u, v)$ を $P_{k,l}$ に変位させると、

$$\hat{P}_{k,l} = P_{k,l} + \alpha V \quad (11)$$

ここで

$$\alpha = \frac{d}{|V| R_{k,l}(\bar{u}, \bar{v})} \quad (12)$$

k と l を選定したり、 u と v を u と v ノードに近似させる場合は、以下で定義される。

$$s_i = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p u_{i+r} \quad i=0, \dots, n \quad (13)$$

$$t_j = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q v_{j+r} \quad j=0, \dots, m$$

さらにそれぞれは、

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{k,l} &= P_{k,l} + (1-\delta)(1-\gamma)\alpha V \\
\hat{P}_{k+1,l} &= P_{k+1,l} + \delta(1-\gamma)\alpha V \\
\hat{P}_{k,l+1} &= P_{k,l+1} + (1-\delta)\gamma\alpha V \\
\hat{P}_{k+1,l+1} &= P_{k+1,l+1} + \delta\gamma\alpha V
\end{aligned} \tag{14}$$

となる。

ここで α について、同様にまとめると、

$$\alpha = \frac{d}{|V|[(1-\delta)(1-\gamma)R_{k,l}(\bar{u}, \bar{v}) + \dots + \delta\gamma R_{k+1,l+1}(\bar{u}, \bar{v})]}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= u_{k+1} + \alpha(u_{k+p+1} - u_{k+1}) \\
\hat{v} &= v_{k+1} + \beta(v_{k+p+1} - v_{k+1})
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{w_{k,l}|Q_u - P_{k,l}|}{w_{k,l}|Q_u - P_{k,l}| + w_{k+1,l}|P_{k+1,l} - Q_u|} \\
\beta &= \frac{w_{k,l}|Q_v - P_{k,l}|}{w_{k,l}|Q_v - P_{k,l}| + w_{k,l+1}|P_{k,l+1} - Q_v|}
\end{aligned} \tag{16}$$

となる。この α を用いる。

3.2 最適化手法での線形計画問題

3.2.1 線形計画問題の基礎事項

いま、 n 個の不等式制約を持つ線形計画問題を考えると、

$$\min b^T y, \quad s.t. \quad A^T y - c = s, \quad s \geq 0 \tag{17}$$

これは主問題に変数 s を導入して置き換えたもので、 s の次元は n 、 y の次元を m とする。問題(17)を主問題(primal problem)と呼び、また、 s を非負変数と呼ぶ。制約条件を満たす点 (s, y) のことを、許容解(feasible solution)という。特に各要素が正であるような許容解を内点許容解(interior feasible solution)と呼び、許容解の集合を許容領域(feasible region)と呼び H と記す。主問題に対し双対問題(dual problem)を次のように定義する。

$$\max c^T x, \quad s.t. \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{18}$$

主問題と同様に、 $x > 0$ であるような(18)の許容解を内点許容解と呼ぶ。

任意の主問題の許容解 (x, y) と双対問題の許容解 x における目的関数値の間には、次の関係がある。

$$b^T y - c^T x = (A^T y - c)^T x = s^T x \geq 0 \tag{19}$$

つまり、任意の主問題の許容解における主問題の目的関数値は、双対問題のそれよりも大きい。この関係により、 $b^T y = c^T x$ が成り立つならば、任意の主問題

の許容値解 (s, y) について、 $b^T(y - y) = b^T y - c^T x > 0$ が成り立つので、 (s, y) は(18)の最適解であり、同様に x は(19)の最適解である。

主問題や双対問題の許容領域の頂点は、 A, b, c に部分行列として、ベクトルを係数とした連立方程式の解として表現できるので、入力変数が有理数であれば、最適値は有理数で、さらに最適解の中に書く座標が有理数である点が存在する。

3.2.2 ポテンシャル減少法

多項式解法として、主双対ポテンシャル減少法⁶⁾がある。ポテンシャル減少法(potential reduction algorithm)では、線形計画問題を Tanabe⁷⁾-Todd⁸⁾-Ye ポテンシャル関数と呼ばれる次の関数 $f(x, s)$ の最小化に帰着させて解く。

$$f(x, s) = (n + \rho) \log x^T s - \sum_i^n \log x_i s_i \tag{20}$$

ここで、 ρ は任意の正数である。この関数は、

$$\begin{aligned}
f(x, s) &= \rho \log x^T s + g(x, s) \\
g(x, s) &= n \log x^T s - \sum_i^n \log x_i s_i
\end{aligned} \tag{21}$$

と書ける。相加相乗平均の不等式を用いると、任意の (x, s) ($x > 0, s > 0$) について

$$\exp(g(x, s)) = \left[\frac{s^T s}{(\prod_i x_i s_i)^{1/n}} \right]^n \geq n^n \tag{22}$$

つまり、 $g(x, s) > n \log n$ であることがわかる。したがって

$$f(x, s) \geq \rho \log x^T s + n \log n \tag{23}$$

が成立し、 $f(x, s) \rightarrow -\infty$ で $x^T s \rightarrow 0$ となる。

実際、許容型主双対内点法の場合、 $\rho = \sqrt{n}$ ととり、(22)式と殆ど同じ方程式の解 $(\Delta x, \Delta s, \Delta y)$ として得られる探索方向に適当なステップ幅だけ進むと、 $(\rho = \sqrt{n}$ とおいた) Tanabe-Todd-Ye ポテンシャル関数の値を一定値以上減少させることが出来、 $O(\sqrt{nL})$ 反復の多項式アルゴリズムが得られることが知られている。

$$X\Delta s + S\Delta x = - \left[\frac{Xs}{x^T s} - \frac{1}{n+\rho} \mathbf{1} \right] \tag{24}$$

$$A\Delta x = 0, \quad A^T \Delta y = \Delta s \tag{25}$$

(25)式を解いて得られる探索方向は、(20)において、 $\nu = [n / (n + \sqrt{n})]\mu$ と取って得られる探索方向に他ならない。

もともと、ポテンシャル減少法は主双対内点法に対して提案されたものである。

特に Karmarkar の射影スケジューリング法⁹⁾は、Karmarkar ポテンシャル関数という関数を用いたポテンシャル法である。(多項式性を持つ主ポテンシャル減少法としては、他にも、伊理・今井による乗法的障壁関数法¹⁰⁾、Gonzaga¹¹⁾やYe¹²⁾によるアフィン・ポテンシャル減少法などがある。この Tanabe-Todd-Ye ポテンシャル関数は、Karmarkar ポテンシャル関数の主双対版といってもよい。

3.2.3 アルゴリズムの実装

ここで実装するアルゴリズムは、基本的にはロング・ステップ法をベースにしているが、経験的に効率性を追及したため、理論的なものと多少ギャップがある。

実装で重要な部分は、Newton 方向を求めるための線形方程式を解く部分である。あらためて Newton 方程式を記すと次のようになる

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_s \\ -r_x \\ \rho \mu I - X_s \end{pmatrix}. \quad (26)$$

A が通常のスパースな巨大行列であるという状況で、上の方程式をいかにして解くかというのが数値線形代数的に見た場合の内点法の実装に関する主要な課題である。

ブロック消去を行うと、この正規方程式は

$$AD^2 A^T \Delta y = AD[\rho \mu V^{-1} I - V] \quad (27)$$

($D = S^{1/2} X^{-1/2}$) を解く事に帰着する。このように変形した小さな方程式を解くのが1つのやり方で、もう1つは、元のままの方程式に対して、疎性を生かした分解を用いて解くというやり方である。

いずれも、もとの係数行列が持つ疎性を解法の途中で、できるだけ崩さないようにする工夫が必要である。

また、実際に問題を速く解くためには、 ρ を各反復で適応的に選び、ステップ幅の選択にも工夫をこらす必要がある。

ρ については、実用的な実装の初期では、 $1/n$ や $1/\sqrt{n}$ 程度の大きさにとることが多く、それでも十分に大きな問題が解けたが、現在では、2次微分の情報まで取り込んだ上で、 ρ を決定する Mehrotra の predictor-corrector 法¹³⁾が殆どの実装において用いられている。

ステップ幅については、単に \mathbf{x} の空間あるいは \mathbf{s} の各空間で、第1象限のへりにぶつかるまで進むという方法が、一般的に使われている。

このようにすると、もはや Newton 方向に進んでいるとはいえないが、いずれにせよ、さまざまな工夫を凝らすことで、数百万変数の問題¹⁴⁾までが解けるようになっている。

主双対内点法は N.Megiddo に示唆され、小島¹⁵⁾らと田辺¹⁶⁾らが具体化した。また小島らは、許容型主双対内点法の多項式性を証明した。

田辺らは主双対ポテンシャル関数を提案し、他に拡張適用している。シュートステップ法は、計算複雑度を改善し小島、Monteiro らによって提案され、非許容性のアルゴリズムは、Lustzig、田辺で提案され、小島らによって大域的収束性が、Zhang によって多項性が証明され、水野¹⁷⁾によって改良された。

4. 理論適用と適用結果の検討

4.1 本研究の収束改良型ベクトル

本研究では、まずポテンシャル減少法を採用し、準ニュートン法でおこなった。XY軸とW軸とK軸は、それぞれの関数で寄与性質が異なる為、テイラー展開係数も、単なる0次から2次までを、それぞれの軸に対して適用してみた。

$$\begin{bmatrix} XX_{n+1} \\ YY_{n+1} \\ WW_{n+1} \\ KK_{n+1} \end{bmatrix} = \gamma_{irr} \begin{bmatrix} \delta_1 \cdot \bar{\epsilon}XX & 0 & \delta_1 \cdot \bar{\epsilon}W_X & \delta_2 \cdot \bar{\epsilon}K_X \\ 0 & \delta_1 \cdot \bar{\epsilon}YY & \delta_1 \cdot \bar{\epsilon}W_Y & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \cdot \bar{\epsilon}WW & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \cdot \bar{\epsilon}KK + \delta_2 \cdot \bar{\epsilon}W_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XX_n \\ YY_n \\ WW_n \\ KK_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XX_n \\ YY_n \\ WW_n \\ KK_n \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{R}_{n+1(x,y,w,k)} = \sum_{n \rightarrow \infty} \bar{\lambda} \cdot \mathfrak{R}_{n(x,y,w,k)} + \mathfrak{R}_{n(x,y,w,k)} \quad (28)$$

ここで、 γ_{irr} = 安定係数

$\epsilon XX, \epsilon YY, \epsilon WW, \epsilon KK$ は各主因誤差、 $\epsilon W_X, \epsilon W_Y$ は、各主因のX,Yベクトル成分

図6は、準ニュートン法で行った場合のWK相の収束トラジェクトリである。W軸では漸近が見られ、収束が予想されたが、K軸ではリミットサイクルが続くことを示しており、収束しないことが予想された。これらは、当初は収束するが、あるイテレーション回数以降からは漸近する事はなくなり、リミットサイクルに陥ってしまっていた。

この事から、独立している筈のXY座標の移動と、W,K値の変化との間に、つまり、制御フィードバック・ループ系の間に、相反関係が内在することが明らかとなった。

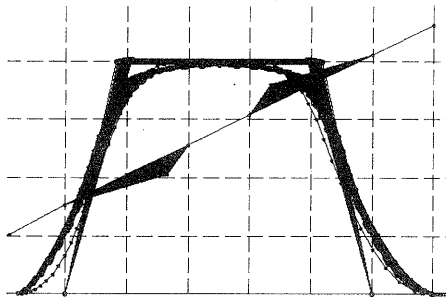


図6 準ニュートン法での曲線の変形の様子
Fig.6 Curve warping by pseudo Newton method

この計算実験では、両方の系とも、約90回数のニュートン・イテレーションでリミットサイクルが発生し、それ以降では収束しなくなっていた。

それゆえ最適化の収束過程での相反関係を回避するため、ループ系の中に一定の寄与率の関係を設定し、さらにイテレーション回数に応じて収束性を強調させるためのパラメータ項を追加した。これを施す事で、完全に収束した。

式(28)が、これを施した改良収束ベクトルである。

これによって収束を保証する事が可能となった。これは原則的にヘッセ行列を満足している。

図7～図10は、改良収束ベクトルで用いた、変形曲線からの様々な検出ベクトルの波形である。

現時点で、これらの有意値を使用している。

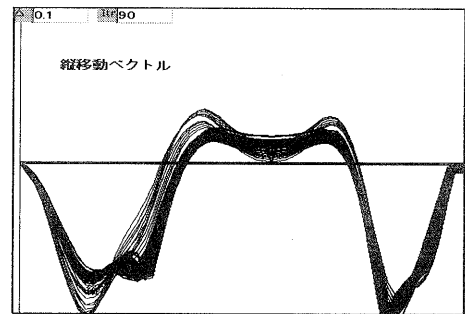


図7 縦移動ベクトル
Fig.7 Vertical reposition value

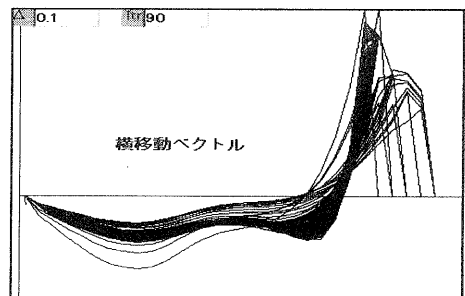


図8 横移動ベクトル
Fig.8 Horizontal reposition value

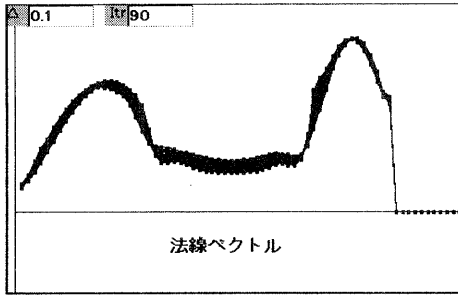


図9 法線ベクトル
Fig.9 Norm vector

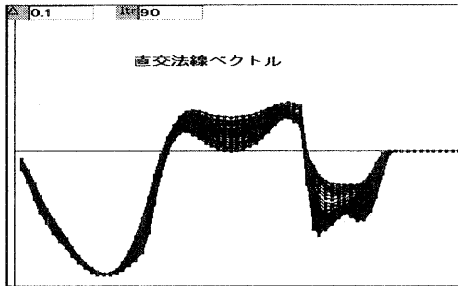


図10 直交法線ベクトル
Fig.10 Transverse Norm vector

それぞれ図 11, 図 12 の両方とも、あきらかに最適収束点に達していることを示している。

4.2 結果の考察

各相のトラジェクトリに関しては、曲線が4次のNURBS関数であるため C^2 連続性を持っており、ヘッセ行列は容易に作成できる筈だったが、この関数は、区間接合型であるため、一般的な偏微分方法が適用出来ない。

それゆえ、これらを最適化するためには汎関数としての扱いをしなければならなかった。

基本パラメータは、 XY, WK 系軸であるが、これによって生成された実曲線データは、非常に大きな量となる。このような非対称な相空間での相トラジェクトリでは、この系のベクトル列は4次元凸多面体として扱ったほうが良いと考えられる。そして、この系の不安定性に、なんらかの対策が必要である事がわかった。

この系を安定させるために、以下の2種類の係数を導入する事で、順調に収束する事が確認できた。

- ①イテレーション程度に応じた傾度係数
- ②各軸関係の固定的な任意の寄与率係数

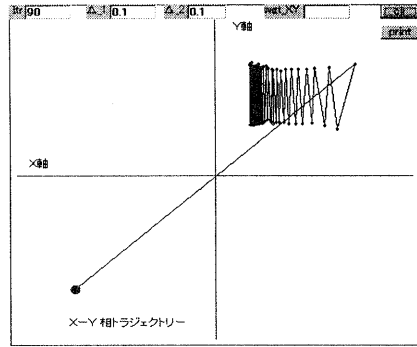


図11 収束可能改良した XY 相トラジェクトリ
Fig.11 XY phase trajectory by improved pseudo Newton method

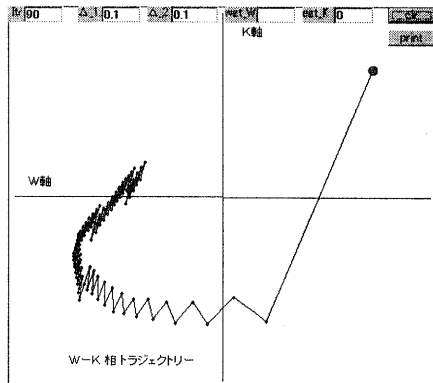


図12 収束可能改良した WK 相トラジェクトリ
Fig.12 WK phase trajectory by improved pseudo Newton method

一般に再帰関数の連結複合であるNURBS曲線は、たとえば動物生体における骨格とそれを覆う外表皮の関係にある。それゆえ、本方式では、外表皮の形状の差を計測し、比較し、検出した誤差データのみを使用して、逆に骨格を変位させようと、最適化のフィードバック・ループ中に置くようにしている。そのため、原則的に逆問題を解く事となる。そしてその地点での外表皮は、隣り合う多くの骨格からの影響もあり、それが重なって、非線型な多変量の組み合わせの状態関数となっている。これらすべてを考慮して計算する事は、非常に困難と推測される。

また、ここで得られる最適収束値は、完全な最適曲線であるとは証明できないが、少なくともローカルミニマにあると考えられる為、適応値であるとは明で

きる。

5. むすび

以上、本研究では、曲面を構成する曲線の制御点および関係データの削減に伴う最適化復元過程において、各収束フィードバック系間の相反によるリミットサイクル発生を防ぐあらたな方法を提案した。そして、自由曲面のデータ削減のアルゴリズムの汎用化に一步近づいた。そこで今後は、任意の仮想物体の、任意の自由曲面に対し、その効果を確認する事と、実用化に向けた取り組みを行う。

また現在、重み係数とノット係数の値の変化に対する理論解析を実行中である。現行のラスタ形式の外に、NURBS 曲線を直交格子状に構成しての曲面に対しても、その理論展開とアルゴリズム展開をおこなう予定である。

参考文献

- 1) 増田,大淵,青野”周波数領域での曲面データの圧縮と転送”情報処理学会論文誌 pp1188-1195, Vol.40 No.3 (1999)
- 2) 品川”情報処理最前線：3次元形状圧縮手法の最近の動向”情報処理学会本誌 pp280-285 Vol.40 No.3 (1999)
- 3) <http://www.lattice.co.jp/compinfo.html> ラティス・テクノロジー(株) 慶応大 千代倉 Prof.社長 XVL Format (eXtended Vrml with Lattice)
- 4) <http://www.blaxxun.com/> (blaxxun Contact 4.1) NURBS Extension for VRML97] tentative
- 5) 亀田 他”再帰的NURBS 処理手法を用いたモバイル通信での3次元仮想空間内での自由曲面の圧縮転送方法の検討”情報処理学会 情処研報 Vol.99, No.13 モバイルコンピューティング研究会 99-MBL-8 pp.55-62 (1999)
- 6) M.Kojima, S.Mizuno and A.Yoshise “An $O(\sqrt{nL})$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems” *Mathematical Programming*, Vol. 50, pp.323-342 (1991)
- 7) K.Tanabe “Centered Newton method for mathematical programming” *System Modeling and Optimization* (M.Iri and K.Yajima), pp.197-206, Springer Verlag (1988)
- 8) M.Todd and Y.Ye “A centered projective algorithm for linear programming 2 mathematics of Operations Research, Vol.38, pp.1006-1018 (1990)
- 9) N.Karmarkar “A new polynomial-time algorithm for linear programming”; *combinatorica*, Vol.4 No.4, pp.373-395 (1984)
- 10) M.Iri and H.Imai “A proof of the polynomiality of the Iri-Imai method”; *Journal of Complexity*, Vol.9, pp.269-290 (1993)
- 11) C.Gonzaga “Polynomial affine algorithms for linear programming”; *Mathematical Programming*, Vol.49, pp.7-21
- 12) Y.Ye “An $O(n^3L)$ potential reduction algorithm for linear programming” *Mathematical Programming*, Vol.50, pp.239-258 (1991)
- 13) S.Mehrotra “On the implementation of a primal-dual interior point method” *SIAM Journal on Optimization*, Vol.2, pp.575-601 (1991)
- 14) S.Wright “Primal-Dual Interior Point Methods” *SIAM* (1997)
- 15) 小島,水野,吉瀬 “多項式オーダの主双対内点法”;統計総理研究所共同研究レポート,
- 16) 田辺”中心化ニュートン法と最適化の微分幾何”統計数理研究所共同研究レポート No.89 (1996)
- 17) S.Mizono “Polynomiality of infeasible-interior-point algorithms for linear programming” *Mathematical Programming*, Vol.67, pp.109-119 (1994)