

## 空間充填曲線と画像圧縮応用

鎌田 清一郎

九州大学大学院 システム情報科学研究科

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

TEL:092-642-4070

E-mail:kamata@is.kyushu-u.ac.jp

あらまし G. ペアノは、1890年『平面領域内の全ての点を通過するような曲線』を発見し、その存在を明らかにした。現在、単位線分を単位超立方体全体へ移すこのような連続曲線は、空間充填曲線、あるいはペアノ曲線と呼ばれている。この曲線の応用研究は、画像処理、情報検索、計算機ホログラム、リモートセンシングなど様々な分野に及ぶ。空間充填曲線の中で応用研究の最も多い曲線は、ヒルベルト曲線である。ヒルベルト曲線に沿った画像走査により画像の1次元データが得られるが、この周波数スペクトルを見ると、ラスタ走査より低域にエネルギーがより集中することが確認される。この近傍保存性の良さから画像圧縮に利用した研究が数多くなされている。本論文では、まず空間充填曲線についての定義といくつかの例を紹介し、次にその画像圧縮の応用研究について幾つかを概観する。

キーワード 空間充填曲線、画像圧縮、ヒルベルト曲線

## Space Filling Curve and its Application to Image Compression

Sei-ichiro Kamata

Graduate School of Information Science and Electrical Engineering,

Kyushu University

6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka-shi, 812-8581, Japan

TEL:092-642-4070 E-mail:kamata@is.kyushu-u.ac.jp

**Abstract** In 1890, G. Peano has found a curve which passes through all points in a space and has proved its existence. So far such a continuous curve mapping a unit interval into a unit hypercube is called space-filling curve or Peano curve. There are several applications using this curve such as image processing, database retrieval, computer hologram, remote sensing, etc. Looking at the frequency distribution of spectral energy of 1-dimensional data which is obtained by scanning an image along with this curve, we can recognize the energy compaction property in comparison to raster scan. In this paper, we introduce the definition of the space filling curve and some examples, and then overview the application to image compression.

**key words** space filling curve, image compression, Hilbert curve

### 1 まえがき

G. カントールは、『線分上の点と正方形内の点との1対1対応の存在』を発見し、数学会を驚かせ

た。しかし、E. ネットは、この写像が必ず不連続となることを証明したのである。その結果、数学者の関心は、連続となる全射写像が存在するかという点に移っていった。一般に、ある区間から平面への

連続写像が曲線と呼ばれることから、上述の問題は『平面領域内の全ての点を通過するような曲線は存在するのか?』ということになる。これに対し、G. ペアノは、1890年この曲線を発見し、その存在を明らかにした。現在、単位線分を単位超立方体全体へ移すこのような連続曲線は、空間充填曲線、あるいはペアノ曲線と呼ばれている。19世紀後半から20世紀にかけてペアノの他に、D. ヒルベルト、W. シェルピンスキー、K. クノッパ、G. ポーヤ、H. ルベグ、I.J. シェーンベルクなど錚々たる数学者が様々な空間充填曲線を描いている。

空間充填曲線の中で応用研究の最も多い曲線は、ヒルベルト曲線である。これは、例えば2次元の場合、図1のように画像の空間4分割表現になっていることによる。ヒルベルト曲線に沿った画像走査により画像の1次元データが得られるが、この周波数スペクトルを見ると、ラスタ走査より低域にエネルギーがより集中することが確認される。この近傍保存性の良さから画像圧縮に利用した研究が数多くなされている。本論文では、まず空間充填曲線についての定義といくつかの例を紹介し、次にその画像圧縮の応用研究について幾つかを概観する。

## 2 空間充填曲線

### 2.1 空間充填曲線の定義

本節では空間充填曲線の定義について述べる。まず、順像を定義1に示す。

**定義 1**  $f$  が  $m$  次元ユークリッド空間 ( $\mathbb{E}^m$ ) の部分集合から  $n$  次元ユークリッド空間 ( $\mathbb{E}^n$ ) 内への関数であれば、 $A \subseteq \mathbb{E}^m$  における

$$f_*(A) = \{f(x) \in \mathcal{R}(f) \mid x \in A \cap \mathcal{D}(f)\}$$

を  $f$  による  $A$  の順像と呼ぶ。 $\mathcal{D}(f)$ ,  $\mathcal{R}(f)$  は各々、関数  $f$  の定義域および値域である。

次に、 $I = [0, 1]$  とすると、定義1を用いて曲線を次のように定義する。

**定義 2**  $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  が連続であるとき、その像  $f_*(I)$  を曲線と呼ぶ。 $f(0)$  は曲線の始点であり、 $f(1)$  はその終点である。また、

$$x = f(t), \quad t \in I$$

を曲線  $C = f_*(I)$  のパラメータ表現と呼ぶ。

例えば、 $t \in I$  に対して、

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \varphi(t) \\ \eta = \psi(t) \end{array} \right\} \mathbb{E}^2 \text{内, そして} \quad \left. \begin{array}{l} \xi = \varphi(t) \\ \eta = \psi(t) \\ \zeta = \chi(t) \end{array} \right\} \mathbb{E}^3 \text{内}$$

である。

定義1と定義2より、空間充填曲線を表す連続写像  $f$  は次のように定義される。

**定義 3**  $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  ( $n \geq 2$ ) が連続、かつ、 $J_n(f_*(I)) > 0$  であれば、 $f_*(I)$  は空間充填曲線と呼ばれる。

ただし、 $J_n$  はジョルダン容量を表し、 $f$  が空間充填曲線を生成するならば、前章で述べたように、これは全射写像ではあるが、全単射写像ではない。つまり、空間充填曲線は、重複点 ( $f(t_1) = f(t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$  となる点) が無数にあることを許した曲線である。従って、重複点を含まないジョルダン曲線 (単純閉曲線) は空間充填曲線になり得ないことが分かる。

2次元の場合を例にとれば、空間充填曲線とはユークリッド平面  $E^2$  上の連続曲線、すなわち線分  $I = [0, 1]$  から  $E^2$  への連続写像  $f$  による像  $f_*(I)$  で、正方形全体を埋めつくすものである。これは、像  $f_*(I)$  が正のジョルダン容量 (2次元であれば面積、3次元であれば体積に相当する量) をもつ連続写像  $f$  と言い替えることができる。

### 2.2 空間充填曲線の例

ペアノは、 $t_j = 0, 1, 2$  に対して、演算子

$$\kappa t_j = 2 - t_j (t_j = 0, 1, 2)$$

を使い、 $I = [0, 1]$  から  $\mathcal{Q} = [0, 1]^2$  への写像  $f_p$  を以下のように定義し、これが連続な全射写像であることを示した。

$$f_p(0_3 t_1 t_2 t_3 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 t_1 (\kappa^{t_2} t_3) (\kappa^{t_2+t_4} t_5) \dots \\ 0_3 t_1 (\kappa^{t_1} t_2) (\kappa^{t_1+t_3} t_4) \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $\kappa^m$  は、 $\kappa$  の  $m$  回の繰り返しを表す。これがペアノが発見した空間充填曲線である。

しかし、1890年 G. ペアノはこの解析的な表現に対する幾何学的な解釈は与えていなかった。E.H. Moore の言葉を借りると、「曲面充填曲線の現象を幾何的なイメージとして明らかにしたのは

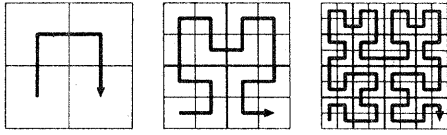


図 1: ヒルベルト曲線の例

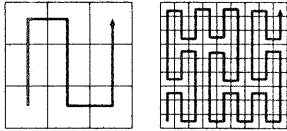


図 2: ペアノの空間充填曲線の幾何的生成法

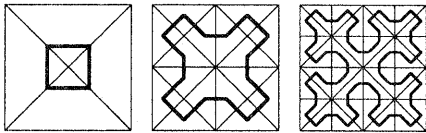


図 3: シェルピンスキーの空間充填曲線

ヒルベルトであった」。D. ヒルベルトは初めて空間充填曲線をつくり出す幾何的な生成手順を示したのである。彼によって示された空間充填曲線を図 1 に示す。この曲線が、ヒルベルト曲線と呼ばれる空間充填曲線である。さらに、彼は、式 (1) に示されたペアノの空間充填曲線に対する幾何的解釈を得ている。これを図 2 に示す。

この他にもシェルピンスキーにより示された空間充填曲線がある。これを図 3 に示す。

これまで、3つの空間充填曲線の例を示したが、共通する性質として、次の性質があげられる。

**性質 1** 上述の三つの曲線の座標関数はいずれもいたるところ微分不可能である。

ここで、ヒルベルトの言葉を借りれば、これらの写像は「いたるところ連続で、同時に、いたるところ微分不可能な写像の簡単な例」である。これ以外にもいくつかの空間充填曲線が存在するが、ここでは、省略する (参考文献 [26])。

## 2.3 空間充填曲線の生成方法

$N$  次元ヒルベルト曲線の生成方法は、1970 年から 1980 年前半にかけて開発された Butz アルゴリズムや Quinqueton アルゴリズムなどがある。Butz アルゴリズムは、シフト操作や排他的 OR などの数ビットの演算を使う写像関数である。一方、Quinqueton アルゴリズムは、ヒルベルト曲線のすべてのアドレスを再帰的な関数を使って計算するものであるが、1 対 1 写像の対応を計算するのに時間がかかる。いずれのアルゴリズムも、計算が複雑で、ハードウェア上での実現が難しい。近年、kamata et al [16] は、ルックアップテーブルを使った簡単、かつ非再帰的な  $N$  次元ヒルベルト曲線の生成方法を提案した。この方法の利点は、計算量が少なく、ハードウェア化が容易なことである。なお、ペアノ曲線やシェルピンスキー曲線の生成方法は、このルックアップテーブルを変えることにより同様にできる。

## 3 空間充填曲線の画像圧縮応用

空間充填曲線の計算方法は、応用数学の分野で研究されてきたが、その応用研究は、巡回セールスマン問題、スペクトル画像分類、データベース情報検索、画像圧縮、計算機ホログラムなど、様々な分野に及ぶ。ヒルベルト曲線を情報圧縮に応用した研究は、Lempel and Ziv [18] の発表以降多くなっており、主に非可逆圧縮が検討されてきた。非可逆圧縮は、2 値画像、濃淡画像、カラー画像、動画の画像対象によって 4 つに大別することができる。なお、可逆圧縮は、ここではほとんど触れないが、濃淡画像を対象としている場合が多い。

### 3.1 2 値画像の非可逆圧縮

Cole [7] は、ラスタグラフィック画像の圧縮に、ヒルベルト走査によるランレングス符号化を用いた。また、Quin et al [25] は、完全なランダム画像であれば、画像走査法に関係なくランの符号量は同じになることを理論的に論じた。Starbek et al [30] は、ディザ画像の圧縮に関して Lempel-Ziv 符号化や Q-コードを組み合わせ比較検討した。さらに、Kamata et al [12, 13] は、2 次元、3 次元の 2 値データの圧縮に関してヒルベルト走査によるランレン

グス符号化を適用し、ラン長の分布を考察した。一般に、ヒルベルト・ペアノ走査による得られるランは、ラスタ走査により得られるランより長くなる傾向にある。これは、標準データとして用いられる2値画像(ランダム画像を除く)で、ラン長の分布を見れば明らかである。

### 3.2 濃淡画像の非可逆圧縮

Oliveri et al. [23] は、ベクトル量子化 (VQ) におけるコードブック生成への応用を検討した。Sorek et al. [31] は、視覚特性に基づく線形近似 (0次近似) アルゴリズムを用いたランレングス符号化を検討した。Moghaddam et al. [21] は、ヒルベルト走査に沿った1次元データへのDCTの利用を検討した。また、Ansari et al. [1, 2, 3] は、DCT、ウェーブレット変換、またはLOTのための画像の1次元データへの並べ替えについて考察した。HyungJun [11] も、ウェーブレット変換による圧縮処理を行う前処理にヒルベルト走査を利用した。Bormans et al. [5, 6] は、領域ベースの符号化について画像処理とVLSIへの実装の両面から考察した。Fan [8] は、あるパラメータの値により可逆と非可逆とを適応的に切替えるヒルベルト走査された1次元データに対するランレングス符号化方式を提案した。Modayil et al. [20] は、ラスタ走査、ヒルベルト走査、バイナリ走査の各走査法により得られた1次元データに対する圧縮効率の違いを考察した。圧縮手法には、2種類の区分線形近似法と整数型ウェーブレット変換法を用いている。Saupe [28] は、ブロック (4 × 4 画素) を走査単位としたヒルベルト走査を行い、その結果得られたブロックの1次元系列に対してVQの適用を検討した。Kamata et al. [14, 15] は、ヒルベルト走査による画像の1次元データに対して、簡単なセグメンテーション処理で近似直線を求める圧縮手法を検討した。以上の手法は、ヒルベルト走査によって1次元データ系列に置き換えるため、その後の圧縮等の処理において計算量が少なくてすむという特徴を利用したものである。

最近、文字、図形、イラストなどの人工画像の一部を含む自然画像において、領域境界の画質劣化を抑えるために、領域分離に基づいた画像圧縮手法の開発が行われている [22]。また、フラクタル画像圧縮において、計算量削減のためにシェルピンスキー走査を用いた方法の提案がなされた [9]。

### 3.3 カラー画像の非可逆圧縮

Preston et al. [32] は、3次元ヒルベルト曲線を用いたRGBカラー空間の解析とカラー画像の表示について考察した。Lafruit et al. [17] は、RGBカラー空間内の走査に3次元ヒルベルト曲線を用い、ウェーブレット変換における処理メモリを低減するため、2次元ドヴテイル (Dovetail) 曲線を用いた。Kamata et al. [15] は、濃淡画像圧縮手法を拡張し、輝度・色差表現によるカラー画像への圧縮を検討した。

### 3.4 動画の非可逆圧縮

Schuster et al. [29] は、可変ブロックサイズのブロックマッチングによる動き推定にヒルベルト走査に基づく4分木表現を利用した。また、Wang et al. [33] は、動き推定におけるブロックマッチングを高速に行うため、ヒルベルト走査後の1次元系列に対してブロックマッチングを行う方式を検討した。坂東他 [4] は、3次元ヒルベルト走査を用いた時空間領域分割による高速動画圧縮法を検討した。

### 3.5 濃淡画像の可逆圧縮

Lempel et al [18] は、無限に広がる2次元データを仮定し、その最適圧縮問題が、ヒルベルト走査による1次元データの最適圧縮問題に置き換えることができるという理論的考察をした。この結果は、非現実的なものである。Provine [24] は、ヒルベルト走査による1次元データに対して差分操作を行い、その結果にエントロピー符号化を適用する方法を提案した。Memon [19] は、コンテキストを利用した符号化方式において、いくつかの走査方法を比較し、ヒルベルト走査が不適であることを示した。

## 4 まとめ

空間充填曲線は、フラクタルの一部としてよく紹介されているが、数学的にみれば全く異なったものである。本論文では、まず空間充填曲線についての定義とヒルベルト曲線、ペアノ曲線、シェルピンスキー曲線の例を紹介し、次にその画像圧縮の応用研究について幾つかを概観した。空間充填曲線の中

でヒルベルト曲線の利用が最も多いので、画像圧縮手法では、ヒルベルト走査を用いたものを中心に紹介した。

## 参考文献

- [1] A.C. Ansari, I. Gertner, Y.Y. Zeevi, "Image compression: wavelet-type transform along generalized scan," *Proc. SPIE Conf. Synthetic Aperture Rader*, vol. **1630**, pp. 99-107, 1992.
- [2] A.C. Ansari, I. Gertner, Y.Y. Zeevi, "Combined wavelets-DCT image compression," *Proc. SPIE -Int. Soc. Opt. Eng.*, vol. **1699**, pp. 308-317, 1992.
- [3] A.C. Ansari, A. Fineberg, "Image data ordering and compression using Peano scan and LOT," *IEEE Trans. Consum. Electron.*, vol. **38**, no. 3, pp. 436-445, Aug. 1992.
- [4] 坂東幸浩, 西修功, 鎌田清一郎, "ヒルベルト走査を用いた時空間領域分割による高速動画画像圧縮法," 映像情報メディア学会誌, vol.53, no.4, pp.559-564, 1999.
- [5] J. Bormans, S. Vernalde, J. Cornelis, I. Bolsens, H. De Man, "A Hilbert fractal codec for region oriented compression of color images," *Proc. of the Third IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems. ICECS '96*, pp.41-44, 1996.
- [6] J. Bormans, I. Bolsens, G. Lafruit, J. Cornelis, H. De Man, "A fractal-based region-oriented color image compression scheme for VLSI implementation," *VLSI Signal Processing VII*, pp.482-490, 1994.
- [7] A.J. Cole, "Compaction techniques for raster scan graphics using space-filling curves," *Computer Journal*, vol. **30**, no. 1, pp. 87-92, 1987.
- [8] N. Fan, "A modified run-length algorithm for unified lossy and lossless image compression," *Proc. SPIE*, vol.2847, pp. 458-468, 1996.
- [9] D.J. Hebert, E. Soundararajan, "Fast Fractal image compression with triangular multiresolution block matching," *Proc. of IEEE International Conference on Image Processing*, 1998.
- [10] D. Hilbert, "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück," *Math. Ann.*, vol. **38**, pp. 459-460, 1891.
- [11] Kim HyungJun, "Image compression using biorthogonal wavelet transforms with multiplierless 2-D filter mask operation," *Proc. of IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 648-651, 1997.
- [12] S. Kamata, R.O. Eason and E. Kawaguchi, "An implementation of Hilbert scanning algorithm and its application to data compression," *IEICE Trans. Information and Systems*, vol. **E76-D**, no. 4, pp. 420-428, Apr. 1993.
- [13] S. Kamata, R.O. Eason, E. Kawaguchi, "An efficient Hilbert scanning algorithm and its application to data compression," *Proc. of the 8th Scandinavian Conference on Image Analysis*, pp.1333-1340, 1993.
- [14] S. Kamata, M. Niimi, E. Kawaguchi, "A gray image compression using a Hilbert scan," *Proc. of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp.905-909, 1996.
- [15] S. Kamata, N. Nishi, Y. Bandoh, "Color image compression using a Hilbert scan," *Proc. of the 14th International Conference on Pattern Recognition*, pp.1575-1578, 1998.
- [16] S. Kamata, R. Eason, and Y. Bandou, "A new algorithm for  $N$ -dimensional Hilbert scanning," *IEEE Trans. on Image Processing*, **IP-8**, 7, pp. 964-973 (1999).
- [17] G. Lafruit, T. Luckx, J. Bormans, I. Bolsens, J. Cornelis, "Space-filling curves in advanced image compression applications," *Proceedings of the European Conference on Multimedia Applications, Services and Techniques*, pp.595-613, 1996
- [18] A. Lempel and J. Ziv, "Compression of two-dimensional data," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. **IT-32**, no. 1, pp. 2-8, Jan. 1986.
- [19] N. Memon, D. Neuhoff, S. Shende, "On scanning techniques for lossless image coding with limited context supports," *Proc. of IEEE International Conference on Image Processing*, 1998.
- [20] J. Modayil, H. Cheng, Li Xiaobo, "Experiments in simple one-dimensional lossy image compression schemes," *Proc. of IEEE International Conference on Multimedia Computing and Systems '97*, pp.614-615, 1997
- [21] B. Moghaddam, K.J. Hintz, C.V Stewart, "Space-filling curves for image compression," *Proc. SPIE Conf. Automatic Object Recognition*, vol. **1471**, pp. 414-421, 1991.
- [22] 茂木 健, "領域分離に基づく自然人工混在画像の圧縮," 信学論 (D-II), Vol.J82-D-II, No.7, pp. 1150-1160, Jul.1999.
- [23] F. Oliveri, G. Conte, M. Guglielmo, "A technique using a one-dimensional mapping for vector quantisation of images," *Proc. of IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing*, Tokyo, pp. 149-152, 1986.

- [24] J.A. Provine, R.M.Rangayyan, "Lossless compression of Peanoscanned images," *Journal of Electronic Imaging*, vol.3, no.2, pp.176-181, Apr. 1994.
- [25] A. Quin and Y. Yanagisawa, "On data compaction of scanning curves," *Computer Journal*, vol. 32, no. 6, pp. 563-566, 1989.
- [26] ザーガン著, 鎌田清一郎 訳: "空間充填曲線とフラクタル", シュブリンガー・フェアラー東京 (1998)
- [27] A. Sampath, A.C. Ansari, " Combined Peano scan and VQ approach to image compression," *Proc. SPIE*, vol.1903, 175-186, 1993
- [28] D. Saupe, " Optimal piecewise linear image coding," *Proc. SPIE*, vol.3309, 747-760, 1997
- [29] G.M. Schuster, A.K. Katsaggelos, " A video compression scheme with optimal bit allocation among segmentation, motion, and residual error," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.6, no.11, 1487-1502, Nov. 1997
- [30] W. Skarbek, T. Agui and M. Nakajima, "Compression of dithered binary images using hilbert scan," *Trans. of IEICE*, vol. E72, no. 11, pp. 1235-1242, Nov. 1989.
- [31] N. Sorek, Y.Y. Zeevi, "On-line visual data compression along a one-dimensional scan," *Proc. SPIE Conf. Visual Communication and Image Processing*, vol. 1001, pp. 764-770, 1988.
- [32] R.J. Stevens, A.F. Lehar and F.H. Preston, "Manipulation and presentation of multi-dimensional image data using the peano scan," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-5, no. 9, pp. 520-526, Sep. 1983.
- [33] Y. Wang, Y. Wang, H. Kuroda, " A novel block matching algorithm for motion estimation," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E81-B, no.3, 575-585, Mar. 1998