

速度空間における拘束直線の交点群のクラスタリング によるオプティカルフロー推定

林 俊輔 今村 弘樹 剣持 雪子 小谷 一孔
北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
〒 923-1292 石川県能美郡辰口町旭台 1-1
0761-51-1699 (内線 1384)
E-mail: {h-shun,imamura,kenmochi,ikko}@jaist.ac.jp

あらまし これまでのオプティカルフロー推定では、画像中に動きの異なる物体が複数存在すると対象物体の動きの複数性によって大きな推定誤差が生じた。本研究では、速度空間上で分散した拘束直線の交点群をクラスタリングして動きの異なる複数の物体の交点を分離し、注目画素の動きを含むクラスタ内でフロー成分を求めることにより、高精度なフロー推定を行う。特に、推定精度が著しく低下する物体間の境界近傍において、従来手法よりも高精度なフロー推定を目指す。

キーワード オプティカルフロー、拘束直線、クラスタリング、速度空間

Optical flow estimation by clustering of intersection group of constraint lines in a velocity space

HAYASHI Shunsuke IMAMURA Hiroki KENMOCHI Yukiko KOTANI Kazunori
Graduate School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology
1-1 Asahidai, Tatsunokuchi-machi, Nomi-gun, Ishikawa, 923-1292, Japan
0761-51-1699(ext.1384)
E-mail: {h-shun,imamura,kenmochi,ikko}@jaist.ac.jp

Abstract The current optical flow estimation method produced a large estimation error caused by a plural of movement of the objects in the image. This paper shows a new method of optical flow estimation using clustering algorithm for scattered intersection group of constraint lines in a velocity space. The clustering of intersection can separate and focused the regions of different movements, it can estimate well a optical flow especially for boundary of objects, complex movements and broad image conditions.

key words optical flow, constraint line, clustering, velocity space

1 はじめに

オプティカルフロー推定法は画像中の動物体解析に有力な手法である [2-6]。この手法は単一物体の運動に対しては、高精度な解析が可能であるが、画面中に動きの異なる物体が複数存在する場合、推定精度が著しく低下する [1]。例えば、最小 2 乗法 [2] では、動き境界近傍においてオプティカルフロー拘束直線の交点が大きく分散するためフロー推定精度が大きく低下する。また投票法を用いた手法 [3] は、交点に対する投票のピーク値を求めることで、ノイズに対しても安定にフロー推定が行えるが、境界近傍では、注目画素とは異なる動きが投票値としてピーク値を持つ可能性があり、フロー推定精度が低下する場合がある。このように動きの異なる物体が複数存在する状況では、物体の境界近傍においてフロー推定精度が低下する。

本研究では、速度空間上で分散した拘束直線の交点をクラスタリングすることで、動きの異なる複数の物体の交点群を分離させ、注目画素の動きを含むクラスタ内でフロー推定を行うことにより、オプティカルフロー推定精度の向上を試みる。特に、推定精度が著しく低下する物体間の境界近傍に注目し、高精度なフロー推定を目指す。

2 オプティカルフロー推定法

画像中の (x, y) 点の、時刻 t における輝度値を $E(x, y, t)$ とする。また $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を (x, y) の点におけるオプティカルフローベクトルの x 方向成分、 y 方向成分とする。 (x, y) におけるオプティカルフロー拘束方程式は以下の式 [7] で表される。

$$E_x u + E_y v + E_t = 0 \quad (1)$$

ここで E_x, E_y はそれぞれ x, y 方向の輝度勾配、 E_t は輝度の時間勾配である。

式 (1) は速度空間上で直線として扱うことができる。これをオプティカルフロー拘束直線と呼ぶ。オプティカルフロー拘束方程式には速度成分である 2 つの変数 u, v を含んでおり、求めたい注目画素のオプティカルフロー拘束直線一本だけでは、フローを一意に決定できない。このため拘束直線以外の制約条件が必要となる。

そこで、本研究では注目画素とその近傍画素の動きは類似しているという特徴をもとに、拘束直線に制約条件として、「注目画素のフローはその近傍の画素のフローと等しい」という条件を加える。これにより注目画素と近傍画素からなる領域（ここでは考慮領域と呼ぶ）を設定し（図 1）、この考慮領域内の画素を用いて注目画素のオプティカルフローを求める。考慮領域内の画素が n 個あるとすると、各

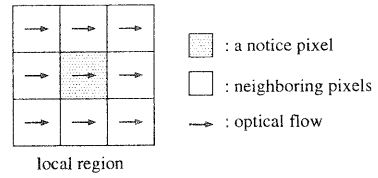


図 1: 考慮領域の設定

画素における拘束直線は以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(1)} u + E_y^{(1)} v + E_t^{(1)} &= 0 \\ E_x^{(2)} u + E_y^{(2)} v + E_t^{(2)} &= 0 \\ &\vdots \\ E_x^{(n)} u + E_y^{(n)} v + E_t^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし $E_x^{(i)} u + E_y^{(i)} v + E_t^{(i)} = 0$ は i 番目の拘束直線とする。次に速度空間上にこれらの拘束直線を引き、考慮領域内の画素の拘束直線の交点から注目画素のオプティカルフロー成分 (u, v) を得る（図 2）。

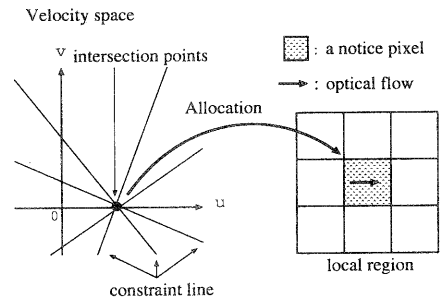


図 2: 注目画素へのフローの割り当て

3 交点の分散原因の解析

理想的には考慮領域内の拘束直線は速度空間上で一点で交わり、その交点を注目画素のフロー成分として割り当てることが可能である。しかし、実際には速度空間上の交点は分散し、フロー推定精度が低下する。交点の分散原因としては、運動によるものと物体境界における遮蔽や輝度変化等が挙げられる。ここでは各々について解析を行う。

3.1 運動における交点分布の解析

等方的な運動における交点の分散具合の解析を行う。ある画素 (x, y) の等方的な変換は次式によって表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \mathbf{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

ただし、 $(\hat{x}, \hat{y})^T$ はそれぞれの移動後の値、 a, b は拡大または縮小率、 θ は回転角、 α, β はそれぞれ x 方向、 y 方向の並進移動パラメータを表す。

オプティカルフロー $(u, v)^T$ は次式によって表すことができる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5)$$

これを (3) 式を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6)$$

次に、同様に移動後の点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ における等方的な運動は、次式で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathbf{AB} \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \end{pmatrix} \quad (7)$$

(6) 式と (7) 式から、フローの空間的 (水平方向、垂直方向) な変化量 $(\Delta u, \Delta v)^T$ を次式のように定義できる。

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (8)$$

(8) 式は次式で表すことができる

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} &= \{\mathbf{AB} - \mathbf{E}\} \left\{ \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{\mathbf{AB} - \mathbf{E}\} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 \mathbf{E} は単位行列である。

(1) 並進運動の場合

拡大・縮小・回転パラメータは $a = 1, b = 1, \theta = 0$ より

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ b \sin \theta & b \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

よって、(9) は、 $\mathbf{AB} - \mathbf{E} = \mathbf{0}$ となり

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (11)$$

これは、並進運動の時には (8) 式で定義した空間的な変化量が 0 であり、運動に伴うフローの空間的な変化がないことを意味している。つまり、設定する考慮領域内の運動はすべて等しいといえ、注目画素の運動と近傍画素の運動が等しいという付加条件が満たされる。理想的な状況では、考慮領域内のオプティカルフロー拘束直線は一点で交わ

る。このため並進運動の場合、交点は分散しない。

(2) 拡大・縮小・回転を含む運動の場合

並進運動以外の運動の場合、 $a \neq 1, b \neq 1, \theta \neq 0$ より (9) 式は $\mathbf{AB} - \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ となり、

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (12)$$

これは、並進運動以外では運動に伴うフローの空間的な変化が生じることを意味している。つまり設定した考慮領域内の運動は、運動することで空間的な変化が生じ、近傍の画素は注目画素の運動とは異なる。この時、設定した制約条件が満たされないで、考慮領域内のオプティカルフロー拘束直線は一点では交わず、交点が分散してしまう。また、 $\Delta u, \Delta v$ の値はそれぞれ、 $\Delta x, \Delta y$ の値に依存する。つまり、等方的な運動に伴って $\Delta x, \Delta y$ の値が大きくなれば、空間的な変化量も大きくなる。このため交点の分散も大きくなる。

3.2 物体の境界における交点分布の解析

物体の境界は、物体の運動が不連続になることや画像内の輝度値が空間的・時間的に滑らかではないなどのオプティカルフローの成立条件を満たしていない要因が数多く存在する。このため、物体内と比べて交点の分散が大きくなる。また、複数の物体が異なる運動している場合、物体の境界は考慮領域内に異なる運動が含まれる。この場合、各運動における拘束直線の交点が速度空間上に表われ、交点の分散が大きくなる。このため、物体内と比べてフロー推定精度が大幅に低下する。

4 本手法によるフロー推定

本研究では、交点が分散し複雑な交点分布であっても、そこには動きの特徴が表われており、その交点分布の情報をを用いて動きの特徴を捉えればフロー推定が可能であると考える。

本手法では、これらの特徴を捉えるために距離尺度を用いたクラスタリングを行い、交点のクラスタを動きごとに分離させる。さらに、注目画素の情報を用いることで注目画素の動きを含むクラスタを判定することができる。選定されたクラスタ内には、注目画素の動きを表す交点を含んでいると考えられるため、クラスタ内の重心を求めることでオプティカルフロー成分を精度良く求めることができる。以下に本手法の手順を示す。

4.1 拘束直線の交点のプロット

考慮領域内のオプティカルフロー拘束直線から得られる交点を速度空間上にプロットする。この時、各拘束直線は輝度変化を精度良く線形に近似した拘束直線とは限らない。

つまり、オブティカルフロー拘束直線の条件である「輝度値の空間的・時間的なめらかさ」「輝度値の連続性」を満たしている拘束直線を用いなければならない。そこで本研究では、各拘束直線を閾値処理によって判定し、閾値の条件を満たす拘束直線から得られる交点を速度空間上にプロットすることで交点の分散を抑える。

[輝度勾配の閾値処理]

- 輝度値の空間的・時間的なめらかさに関する閾値処理 (閾値: $Th1$)

$$\left. \begin{aligned} |E_x(x, y, t)| &\leq Th1 \\ |E_y(x, y, t)| &\leq Th1 \\ |E_t(x, y, t)| &\leq Th1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

- 輝度勾配の時間的連続性に関する閾値処理 (閾値: $Th2$)

$$\left. \begin{aligned} |E_x(x, y, t) - E_x(x, y, t + \delta t)| &\leq Th2 \\ |E_y(x, y, t) - E_y(x, y, t + \delta t)| &\leq Th2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ただし、 $E_x(x, y, t), E_y(x, y, t), E_t(x, y, t)$ は、それぞれ画素 (x, y, t) における x, y, t 軸に対する勾配を表し、それぞれの条件の閾値を $Th1, Th2$ とする。なおここでの閾値 $Th1, Th2$ は、実験的に決定している。

4.2 拘束直線の交点のクラスタリング

速度空間上の交点を動きごとに分離させるために、ここでは交点のクラスタリングを行う。本研究では以下の項目を考慮する。

- クラスタ数を動的に生成する
考慮領域内における運動の種類とその運動の数は未知のため、本研究では、考慮領域内の動きに対してクラスタを動的に生成する。クラスタを動的に生成する手法として NN(Nearest Neighbor) 法 [8] を用いる。
- 交点分布の特徴を捉える
物体内の交点分布は、交点の密度が高く、物体の境界では、それぞれの動きに対して交点群が現れ、かつ交点の分散が大きい。本研究では、NN 法を用いてこれらの特徴を捉えるようにクラスタリングする。

4.2.1 NN 法を用いたクラスタリング

以下に NN 法によるクラスタリングアルゴリズムを示す。

[NN 法アルゴリズム]

P_{NP} : NP 番目の交点の座標 (x_{NP}, y_{NP})

C_{NC} : クラスタ NC の代表点の座標 (x_{NC}, y_{NC})

N : 速度空間上の交点数

T : 距離尺度の閾値

$$d(P_{NP}, C_i) = \sqrt{(x_{NP} - x_i)^2 + (y_{NP} - y_i)^2}$$

図 3 に NN 法のフローチャートを示す。

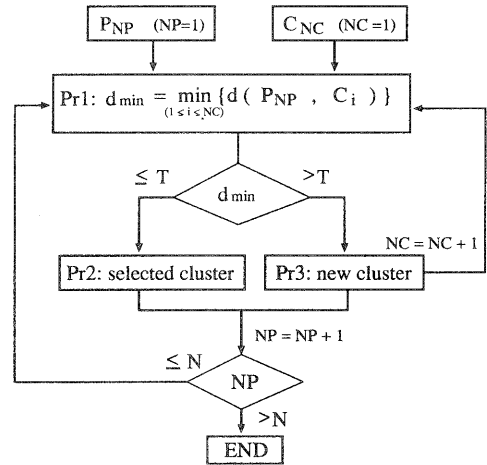


図 3: 処理のフローチャート

フローチャートにおける各処理を以下に要約する。

$$Pr1: d_{min} = \min_{(1 \leq i \leq NC)} \{d(P_{NP+1}, C_i)\}$$

これは、ある交点とクラスタ間の距離を求め、その距離が最小となるようなクラスタを選択する。次に、 T をある小さな閾値として、求めたクラスタ間の最小距離 d_{min} の値に応じて以下の処理を行う。

Pr2 (閾値以下): 交点を選択したクラスタに属させる。

Pr3 (閾値より大きい): 交点を標準パターンとした新規クラスタを生成する。

この NN 法によるクラスタリングを本手法に適用するにあたって、閾値 T は実験的に与えた。次に、初期クラスタの座標は物体内と物体の境界における交点分布の特徴を基に、交点の重心座標を与えた。これによって、動きの特徴をより捉えるようにしている。最後に、NN 法は、処理する順序によってクラスタの生成結果が異なってしまうため、前処理として交点のソーティングを行い、交点のクラスタ集中度を高める。なおソーティングアルゴリズムは、単純選択法 (selection sort)[9] を適用した。

4.3 フロー推定に用いるクラスタの選定

クラスタリング処理後、各クラスタには考慮領域内の各動き成分が含まれていると考える。注目画素のフローを決定するために、ここでは注目画素の動きが含まれるクラスタを選定する。クラスタの選定方法を以下に示す。

[クラスタの選定方法]

1. 注目画素の交点情報を用いる

注目画素の運動成分は、注目画素のオプティカルフロー拘束直線上に乗る確率が高いと考えられる。このため、注目画素の拘束直線を用いてクラスタを選定する。クラスタの選定方法は、注目画素の拘束直線 ($E_x u + E_y v + E_t = 0$) と考慮領域内の近傍画素の各拘束直線 ($E_x^{(i)} u + E_y^{(i)} v + E_t^{(i)} = 0$) との交点を以下のように求めていく (図 4)。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x u + E_y v + E_t = 0 \\ E_x^{(1)} u + E_y^{(1)} v + E_t^{(1)} = 0 \\ \vdots \\ E_x^{(n)} u + E_y^{(n)} v + E_t^{(n)} = 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

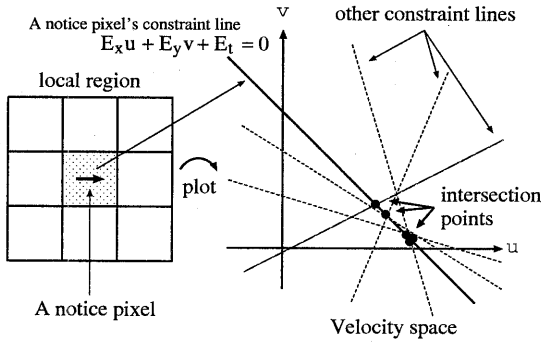


図 4: 注目画素の拘束直線との交点

2. 交点の判定

得られた近傍画素と注目画素との交点がどのクラスタに属するかを判定する (図 5)。

$$\min_{(1 \leq i \leq N_C)} (d(P_{NP}, C_i)) \quad (16)$$

ここで注目画素との交点 P_{NP} 、クラスタ代表点 C_i 、関数 $d()$ は、ユークリッド距離を計算する関数。関数 $\min()$ は、距離が最小となるクラスタを選択する関数である。

3. クラスタの決定

先の処理を考慮領域内のすべての近傍画素に対して行い、それぞれの交点がどのクラスタに属するか判定していく。得られた交点が一番多く属しているクラスタを求めたい注目画素の動きが含まれるクラスタとして選定する。また交点数が同数であるクラスタが存在した場合は、交点とクラスタ代表点との距離の平均を取り、平均距離が最小のクラスタを求めるクラスタとして決定している。

$$\min_{(1 \leq i \leq N_C)} (d_{mean}(\hat{P}_{NP}, C_i)) \quad (17)$$

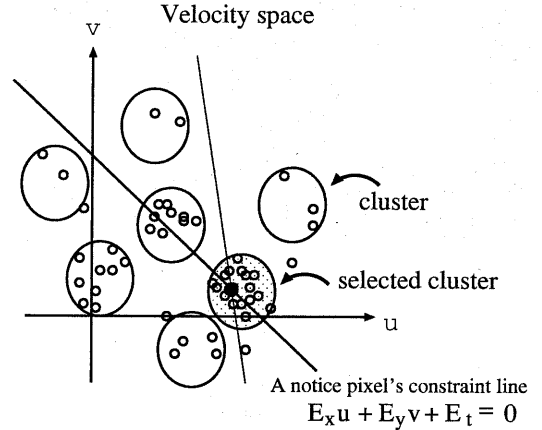


図 5: 交点と選択されたクラスタ

ここで $d_{mean}()$ は距離の平均を求める関数であり、 \hat{P}_{NP} はクラスタ C_i に属する交点である。

4.4 選択したクラスタ内でのフロー推定

選定されたクラスタ内には、注目画素の動きの成分が交点として表れていると考えることができる。よってこのクラスタ内から注目画素のフロー成分を決定する。本研究ではクラスタ内の交点の重心を求め、その成分を注目画素のフロー成分として割り当てる。

注目画素のフロー f_{xy} は、

$$f_{xy} = (u, v) \quad (18)$$

$$u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (19)$$

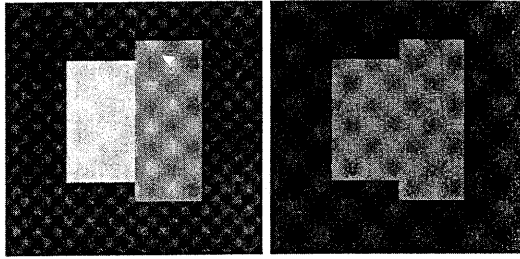
$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \quad (20)$$

ここで、 u_i, v_i はそれぞれ選択されたクラスタ内の i 番目における交点の u 成分、 v 成分 N は選定したクラスタ内の交点数である

5 オプティカルフロー推定実験

5.1 実験条件

使用するモデル画像 (128×128 [pixels]) は輝度のテクスチャと物体同士の輝度値に変化を与えるため、モデル画像 1 では、256 階調で約 80 の輝度値の差を物体同士に与え、モデル画像 2 では、256 階調で約 20 の輝度値の差を物体同士に与えた。(図 6)。画像中の 2 つの物体の運動は、表 1 に示す運動をするものとする。今回、クラスタリングの閾値 T を 1.0、考慮領域のサイズを 5×5 [pixels] の矩形領



(1) モデル画像 1 (2) モデル画像 2

図 6: 使用するモデル画像

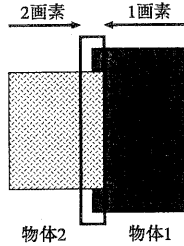


図 7: 境界領域の設定

表 1: 物体の運動

	左の物体 (物体 2)	右の物体 (物体 1)
並進	右に 2(pixels/frame)	左に 1(pixel/frame)
拡大	1.05(倍/frame)	1.05(倍/frame)
縮小	0.95(倍/frame)	0.95(倍/frame)
回転	右回りに 2(deg/frame)	右回りに 2(deg/frame)

域とした。また並進運動においては、本研究では物体の境界のフロー推定精度に注目しているため、比較対象となる領域は画像全体だけでなく物体の境界 (矩形で囲まれている領域 10×81 [pixels]) (図 7) に対してもフロー推定精度の評価を行う。

5.2 フロー推定精度の定量的評価

本手法とのフロー推定精度を定量的に評価する。ここでは、評価尺度として一般的に用いられる正解のフローとの誤差の平均を用いる。

$$\text{誤差平均: } \bar{e} = \frac{1}{NM} \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M e_{xy} \quad (21)$$

$$e_{xy} = \|\mathbf{f}'_{xy} - \mathbf{f}_{xy}\|$$

ここで M, N はそれぞれ縦方向、横方向の画素数、 \mathbf{f}'_{xy} は正解のフロー、 \mathbf{f}_{xy} は推定したフローを表す。

5.3 実験結果

各モデル画像に対する本手法及び、比較のために最小 2 乗法と投票法とによるフロー推定誤差を表 2、表 3 に示

表 2: 並進運動におけるフロー推定誤差 (\bar{e})

測定箇所	画像全体		図 6 の矩形領域	
	モデル画像 1	モデル画像 2	モデル画像 1	モデル画像 2
最小 2 乗法	1.72×10^{-1}	2.45×10^{-1}	7.75×10^{-1}	10.07×10^{-1}
投票法	0.92×10^{-1}	3.21×10^{-1}	5.05×10^{-1}	10.56×10^{-1}
本手法	1.14×10^{-1}	1.82×10^{-1}	6.00×10^{-1}	9.06×10^{-1}

表 3: 複雑な運動におけるフロー推定誤差 (\bar{e})

運動の種類	拡大		縮小	
	モデル画像 1	モデル画像 2	モデル画像 1	モデル画像 2
最小 2 乗法	2.72×10^{-1}	3.48×10^{-1}	2.49×10^{-1}	3.35×10^{-1}
投票法	1.78×10^{-1}	4.02×10^{-1}	1.72×10^{-1}	4.66×10^{-1}
本手法	2.92×10^{-1}	2.81×10^{-1}	2.96×10^{-1}	2.86×10^{-1}

運動の種類	回転	
	モデル画像 1	モデル画像 2
最小 2 乗法	2.20×10^{-1}	2.72×10^{-1}
投票法	1.17×10^{-1}	2.48×10^{-1}
本手法	1.58×10^{-1}	2.24×10^{-1}

す。モデル画像 1 に対する実験結果では、本手法は最小 2 乗法よりも推定誤差は小さくなったが、投票法よりは大きくなった。一方、モデル画像 2 に対する実験結果では、最小 2 乗法、投票法共に推定誤差が大きく増加したが本手法はモデル画像に依らず安定したフロー推定が行えた。これは、本手法が物体同士の輝度値に依らず、物体の運動に伴う交点の特徴を解析手法として用いたために画像依存性が抑えられたためと考えられる。

6 まとめ

動きの異なる複数の物体が運動している状況を想定し、画像全体だけでなく、特に物体の境界に注目して高精度なフロー推定のための検討をした。

速度空間上の交点分布の分散原因を解析し、その特徴に基づき、交点のクラスタリングを用いた手法を検討した。本手法の有効性を確認するために、従来手法とのフロー推定精度の比較実験を行った。実験結果より、本手法は従来手法と比べてテクスチャや物体同士の輝度値の類似度に依存することなく、安定したフロー推定が行えた。特に物体の境界近傍のフロー推定精度の改善が見られた。

今後の課題としては、ノイズに対するロバスト性を検証し、実画像への適用を考えている。

参考文献

- [1] 「コンピュータビジョン」技術評論と将来展望, pp123-137, 1998.
- [2] J.K.Kearney, W.B.Thompson and D.L.Boley: "Optical Flow Estimation: An error analysis of gradient-based methods with local optimization", IEEE Trans.Pattern Anal. and Mach.Intell., PAMI-9, 2, pp. 229-244, 1987.
- [3] 今村弘樹, 剣持雪子, 小谷一孔: 「フロー外挿による遮蔽、発生領域のオプティカルフロー推定」, 信学技報, CS98-123, IE98-102, pp65-72, 1998.
- [4] 梅山伸二: 「ロバスト回帰に基づく多重オプティカルフローの推定について」, 信学技報 PRMU96-108, pp33-40, 1996.
- [5] 井関徹, 小谷一孔: 「速度空間と動きの連続性に基づいた物体遮蔽判定法に関する研究」, 情報学 CVM 研技 108-9, pp63-70, 1997.
- [6] 坂貴志, 小谷一孔: 「オプティカルフロー拘束方程式による物体遮蔽判定法に関する研究」, 信学技報, PRMU96-171, pp7-13, 1997.
- [7] Horn: 「ロボットビジョン」第 12 章 「動き場とオプティカルフロー」, pp305-322, 朝倉書店, 1993.
- [8] 安居院、長尾: 「画像処理と認識」, 昭晃堂, pp92-98, 1998.
- [9] 三上直樹: 「アルゴリズム教科書」, CQ 出版社, 1996.