

単位超球面上一様分布のための鏡映群によるベクトル量子化器の設計

榎 修一[†] 山根 延元^{††} 森川 良孝^{††}

^{†,††}岡山大学工学部 〒700-8530 岡山市津島中 1-1-1

E-mail: [†]maki@trans.cne.okayama-u.ac.jp, ^{††}{yamane,morikawa}@cne.okayama-u.ac.jp

あらまし 高次元・高レートのベクトル量子化 (VQ) の実現においては、コードブックサイズが指数的に増加するという問題が妨げとなっている。この問題に対してさまざまな方法が提案されているが、その中に鏡映群による領域統合型万華鏡 VQ (UR-KVQ) がある。UR-KVQ は最良量子化とされる最近傍探索 VQ (NNSVQ) に匹敵する特性を有するコードブックを高次元において設計することが可能である。本論文では、エントロピー拘束型 VQ の設計法を用いた棄却法により UR-KVQ の初期コードブックを決定する方法を提案する。トレーニングベクトルに対して提案法を用いて UR-KVQ の設計を行った結果を示し、16 次元において約 3bits/sample まで全探索ベクトル量子化に匹敵する量子化特性を少数の代表ベクトルで実現可能であることを明らかにする。特に 8 次元において、最適である E_8 型超球面上格子に同型となるコードブックとこれに関連した準最適なコードブックが設計例の中に含まれていた。

キーワード ベクトル量子化, 鏡映群, 多段 VQ, エントロピー拘束型 VQ

Vector Quantizer Design for Uniform Distribution on Unit hypersphere by Use of Reflection Group

Shuichi MAKI[†], Nobumoto YAMANE^{††}, and Yoshitaka MORIKAWA^{††}

^{†,††}Faculty of Engineering, Okayama University

1-1, Naka 3-chome, Tsushima, Okayama, 700-8530 Japan

E-mail: [†]maki@trans.cne.okayama-u.ac.jp, ^{††}{yamane,morikawa}@cne.okayama-u.ac.jp

Abstract In the vector quantization (VQ) method, a huge number of computations and memory amounts prevent to realize it in high vector dimensions and high coding rate. Various method have been proposed to ravel out the problem, and unified region-kaleidoscope VQ (UR-KVQ) was proposed as one of them. In high vector dimensions, UR-KVQ is able to design a codebook whose performance is comarable to the optimum Nearest Nighbor VQ (NNVQ). In this papar, we propose a design method to decide initial codebook of UR-KVQ by rejection using design method for entropy constrained VQ (ECVQ). It is shown that, the codebooks designed by the proposed method have almost the same performance as the NNVQ with small codebook-size, in rate about 3bits per sample in 16-dimensions, and also, lattice-points have minimal norm to origin in oputimum E_8 lattice and related sub-optimum codebook are include in designed codebook.

Key words Vector Quantization, Reflection Group, Multistage VQ, Entropy Constrained VQ

1. ま え が き

ベクトル量子化 (Vector Quantization : VQ) の量子化特性は次元数の増加につれ情報圧縮限界であるレート-ひずみ限界に近づくことが知られている。しかしながら、高次元・高レートでの VQ を実現するためにはコードブックサイズが指数的に増加するという問題がある。

この問題を解決するためにさまざまな方法が提案されている [1] が、その中に超球面上一様分布に対する鏡映群 (Reflection Group : RG) による万華鏡 VQ (Kaleidoscope VQ : KVQ) [2]

がある。KVQ は RG の幾何学的構造を利用するもので、初段 RGVQ、後段全探索 (Full-Search : FS) VQ で構成される従統探索型 2 段 VQ である。この方法により、コードブックサイズは大幅に削減することが可能となる。しかし、最良量子化とされる最近傍探索 VQ と同等の量子化特性を得るためには、次元数の増加に伴って後段 FSVQ のコードブックサイズを増加せねばならなかった。

量子化特性の改善法として、RG の基本領域の境界 (辺と呼ぶ) にも代表ベクトルを配置する領域統合型万華鏡 VQ (Unified Region-KVQ : UR-KVQ) が提案されている。この方法により

最近傍探索 VQ に匹敵する量子化特性を有するコードブックを設計することが可能であることが示されている [2]. UR-KVQ では、コードブック設計時の初期配置に量子化特性が大幅に依存するため、設計においてコードブックの初期配置の決定をどのように行うかが課題となっている。

本論文では、この問題に対し、エントロピー拘束型 VQ (Entropy Constrained VQ : ECVQ) の設計法 (以下、EC-LBG 法と呼ぶ) を用いた棄却法により UR-KVQ の初期コードブックを決定する方法を提案する。ECVQ はエントロピーを拘束した状態でひずみを最小化するものであるため、その設計法である EC-LBG 法を用いれば符号化レート-ひずみ特性についての注水定理の原理によって不要な代表ベクトルを棄却することができる。最後に EC-LBG 法のシミュレーション実験を行い、その有効性を明らかにする。

2. 鏡映群

n 次元ユークリッド空間 E において、非零であるベクトル t に直交する超平面 P_t に関する x の鏡映 $\gamma_t x$ は次式により表される。

$$\gamma_t x = x - \frac{2t^T x}{t^T t} t \quad (1)$$

ただし、上付きの T は転置を表す。

ユークリッド空間 E における L 枚の超平面を元とする集合 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_L\}$ による鏡映の合成 α を次式で示す。

$$\alpha = \gamma_{t_1}^{m_1} \gamma_{t_2}^{m_2} \dots \gamma_{t_L}^{m_L} \quad (2)$$

ただし、 m_i は $\{0, 1\}$ である。 α を元とする集合 G が E の合同変換群をなすとき、 G を鏡映群 [3] と呼ぶ。鏡映群 G の任意の元がその部分集合 H により生成されるとき、 H を生成系という。また $H = \{\gamma_{t_1}, \gamma_{t_2}, \dots, \gamma_{t_n}\}$ のとき、 $S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ は基本根系と呼ばれ、 T は S から H により生成されるベクトルの集合 (ただし、 $t_i \neq -t_j$) である。

このとき、ユークリッド空間 E は超平面の集合 T により互いに合同な領域に分割される。この領域は基本領域と呼ばれ、その数は鏡映群 G の位数に一致する。以下本論文では、1 つの基本領域を基準としてこの領域を探索領域と呼ぶ。このとき、任意の基本領域に位置するベクトルはある特定の指数ベクトル $[m_1, m_2, \dots, m_L]$ に対する α により探索領域内に鏡映できる。

2.1 生成系及び基本領域数

本論文では、図 1 に示す Z 型、A 型、D 型及び C 型の 4 つの鏡映群を使用する。ただし、図 1 は $E = \mathbf{R}^3$ における単位超球面の分割の様子を示している。以下、これらをそれぞれ G_Z, G_A, G_D 及び G_C で示し、 $E = \mathbf{R}^n$ におけるそれぞれの鏡映群の基本根系 S を表 1 に示す^(注1)。これらベクトルによる鏡映は、 E のベクトルの要素の互換及び要素の符号反転のみとな

(注1) : ただし、 G_A の場合、表現の簡単のため、 $E = \mathbf{R}^n$ における S の元代わりに、 \mathbf{R}^n を超平面 $P_\mu \in \mathbf{R}^{n+1}$ に写像したときの元として示している。ただし $\mu = [1, 1, \dots, 1]^T$ である。以下、 G_A の場合、 \mathbf{R}^n のベクトル $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ を超平面 $P_\mu \in \mathbf{R}^{n+1}$ に写像した $\{\bar{x} \in P_\mu \mid \bar{x} = [x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}]^T\}$ を入力ベクトルとして取り扱うので注意する。

表 1 鏡映群 G の基本根系 S 、超平面数 L 及び基本領域数 F

G	S^T	L	F
G_Z	$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$	n	2^n
G_A	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$n+1C_2$	$(n+1)!$
G_D	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$2_n C_2$	$2^{n-1} n!$
G_C	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	n^2	$2^n n!$

る。また、以下に示すようにこれらの群 G の元による鏡映も同様な演算となるため、次章で示すように鏡映処理を容易に行うことができる。

表 1 には $E = \mathbf{R}^n$ における各群の基本領域数 F 及び、参考までに、超平面数 L を示している。

3. 統合型万華鏡 VQ

本章では、万華鏡 VQ (Kaleidoscope VQ : KVQ) の特性改善法である統合型 KVQ (Unified Region-KVQ : UR-KVQ) についての説明を行う。まず準備として鏡映群の基本領域の辺について定義する。次に探索領域、UR-KVQ の構成及び処理手順について述べる。

3.1 準備

n 次元空間の鏡映群において、基本領域を構成する超平面を $n-1$ 次元辺、2 つの超平面が重なる部分空間を $n-2$ 次元辺、以下同様にして、 $n-m$ 個の超平面が重なる空間を m 次元辺と呼ぶ。また、基本領域そのものを n 次元辺と呼ぶ。更に辺の集合を S で示し、 m 次元辺の集合を S_m と定義する。

3.2 探索領域

本論文ではユークリッド空間 E の任意のベクトル x と表 1 の基本根系 S のすべての元との内積が正となる領域を探索領域とする。

- G_Z : 探索領域 \tilde{R}_{0Z} は明らかに、

$$\tilde{R}_{0Z} = \{x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, \dots, x'_n \geq 0\} \quad (3)$$

- G_A : \bar{x} と S の元との内積が正となる条件は $\{\bar{x}_i \geq \bar{x}_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ となる。したがって、

$$\tilde{R}_{0A} = \left\{ x'_1 \geq x'_2 \geq \dots \geq x'_{n+1} \mid \sum x_j = 0 \right\} \quad (4)$$

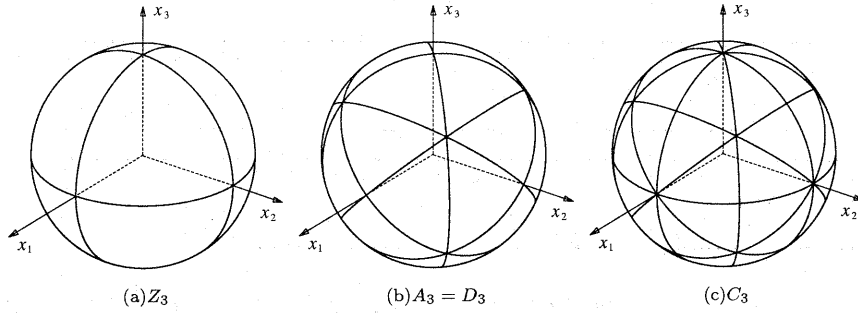


図1 鏡映群の例

Fig. 1 Example of reflection group.

• $G_C: n \rightarrow n-1, \mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ としてみた G_A の条件に、条件 $\{x_n \geq 0\}$ が加わるため、

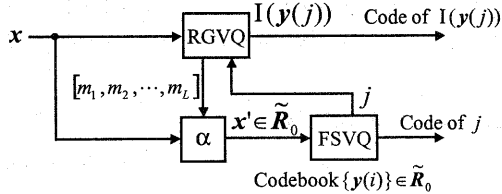
$$\tilde{R}_{0C} = \{x'_1 \geq x'_2 \geq \dots \geq x'_n \geq 0\} \quad (5)$$

• $G_D: G_C$ における条件 $\{x_n \geq 0\}$ の代わりに条件 $\{x_{n-1} \geq -x_n\}$ が加わるため、

$$\tilde{R}_{0D} = \{x'_1 \geq x'_2 \geq \dots \geq |x'_n|\} \quad (6)$$

3.3 UR-KVQ の構成

UR-KVQ のブロック図を図2に示す。



α : Mirror Operations

$I(\mathbf{y}(j))$: Position of $\mathbf{y}(j)$ nearest to \mathbf{x} in Entire Space

図2 UR-KVQ のブロック図

Fig. 2 Block diagram of UR-KVQ.

量子化操作は以下ようになる。

[符号化手順]

(1) 初段 RGWQ により入力ベクトル \mathbf{x} が属する基本領域の指数ベクトル $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_L]$ を求める。

(2) 鏡映 (Mirror Operations) α により \mathbf{x} の探索領域 \tilde{R}_0 内の像 \mathbf{x}' を求める。

(3) 後段 FSVQ により \mathbf{x}' を量子化し、その出力 j を符号化する。

(4) j を初段 RGWQ にフィードバックさせ、 $\mathbf{y}(j)$ の全空間中での位置 $I(\mathbf{y}(j))^{(註2)}$ を符号化 (付録 ??) する。

[復号化手順]

(1) $I(\mathbf{y}(j))$ と j から $\alpha^{-1} \mathbf{y}(j)$ を復号化する。

(注2): $I(\mathbf{y}(j))$ は基本領域の指数ベクトル \mathbf{m} から領域統合によって不要となる要素を取り除いて決定する。

尚、後段 FSVQ のコードブックサイズ M のとき、UR-KVQ における符号化レート R は次式で与えられる。

$$R = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^M \{P(i) \log_2 C(i) - P(i) \log_2 P(i)\} \right] \quad (7)$$

ただし、 $P(i)$ は後段 FSVQ における i 番目の出力ベクトル $\mathbf{y}(i)$ の出現確率、 $C(i)$ は次節で説明する $\mathbf{y}(i)$ の全空間での総数 (付録 1.) を表す。

3.4 UR-KVQ の設計法

RGVQ-UC のコードブックの設計法を以下に示す。

step 1 初期設定

$$C^{(0)} = \{\mathbf{y}(i) \in s_i \mid i = 1, \dots, M, s_i \in S_{k_i}\}$$

トレーニングベクトル系列 $\{\mathbf{x}_l \mid l = 1, \dots, T\}$ 、収束判定閾値 ϵ 、 $j = 0$ 、初期歪み $D_{-1} = \infty$ 。ただし、 k_i は $\mathbf{y}(i)$ が存在する辺 s_i の次元数を示す。

step 2 トレーニングベクトル系列 $\{\mathbf{x}_l \mid l = 1, \dots, T\}$ を鏡映 α により探索領域内のベクトル系列 $\{\mathbf{x}'_l \mid l = 1, \dots, T\}$ に写像する。

step 3 ベクトル系列 $\{\mathbf{x}'_l \mid l = 1, \dots, T\}$ についてそれぞれ最近傍の代表ベクトルを総当り的に探索し、ポロノイ分割する。

step 4 平均歪み D_j を計算する。

step 5 $(D_{j-1} - D_j)/D_j < \epsilon$ を満たせば終了。満たさなければ step 6 へ。

step 6 $j \leftarrow j+1$ とし、各代表ベクトル $\mathbf{y}(i) \in s_i$ がつく探索領域内でのポロノイ領域の重心 \mathbf{g}_i を求め、 \mathbf{g}_i をそれぞれが属する辺 $s_i \in S_{k_i}$ に正射影する。射影後のベクトルの集合を新しいコードブック $C^{(j)}$ とし、step 3 に戻る。

step 6 からわかるように、本アルゴリズムでは、各代表ベクトルは初めに配置された辺上に拘束されてしまうため、UR-KVQ の量子化特性は初期コードブックの配置によって決定する。

図3に FSVQ と UR-KVQ の設計例 ($n = 3$) とそのポロノイ分割の様子を示す。

4. 提案法

UR-KVQ において、各代表ベクトルの符号長はその代表ベクトルが位置する辺 s に依存して大幅に変化する。このため、その設計における初期配置の決定には、レートの増分に対するひずみの減少率を考慮する必要がある。このようなレート-歪関係にもとづく VQ の設計法としてエントロピー拘束型 VQ の設

表2 図4の設計例における鏡映群とコードブックサイズ

(a) $n = 8$

rate[bits/sample]	0.50	0.77	0.98	1.19	1.40	1.62	1.86	2.09	2.42	2.73	2.87
鏡映群	D	A	D	D	D	D	D	D	D	D	D
コードブックサイズ M	1	2	2	4	5	7	12	17	28	60	110

(b) $n = 16$

rate[bits/sample]	0.31	0.51	0.74	0.82	0.96	1.23	1.39	1.64	1.79	2.00	2.27	2.55	2.71
鏡映群	D	Z	Z	Z	A	A	A	A	D	D	D	D	D
コードブックサイズ M	1	28	70	120	8	9	19	56	9	17	50	60	100

計法 [4](EC-LBG) がある。本論文では EC-LBG 法を利用した棄却法により初期コードブックの配置を決定する方法を提案する。

エントロピー拘束型 VQ の設計は LBG アルゴリズムを用いるが、最小化する評価量として平均二乗ひずみ D の代わりに次式の J を用いる。

$$J = D + \lambda H \quad (8)$$

ただし、 H は量子化出力のエントロピー、 λ はラグランジュ乗数である。上式は次式のように書くことができる。

$$J = E[\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}(i))] \quad (9)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}(i)) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}(i)) + \lambda l(i) \quad (10)$$

$$l(i) = \log_2 C(i) - \log_2 P(i) \quad (11)$$

ただし、 $d()$ は二乗ひずみ、 $l(i)$ は代表ベクトル $\mathbf{y}(i)$ の符号長、 $\log_2 C(i)$ はそのうちで $\mathbf{I}(\mathbf{y}(j))$ の符号長を表す。 $l(i)$ の大きな代表ベクトルは、 λ を増加するにつれて $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}(i))$ が著しく増加し、結果として棄却されることになる。以下に初期コードブックの決定手順を示す。

[初期コードブック決定手順]

- (1) 初期化：低次元辺から順に各辺 1 ベクトルずつサイズ M のコードブック $\{\mathbf{y}(i) | i = 1, 2, \dots, M\}$ を初期配置する。
- (2) $\lambda > 0$ とした EC-LBG アルゴリズムによってコードブック $\{\hat{\mathbf{y}}(i) | i = 1, 2, \dots, M'\}$ ($M' < M$) を設計する。ただし、 $l(i)$ は式 (11) の代わりに次式のように近似する。

$$l(i) = \log_2 C(i) \quad (12)$$

- (3) $\{\hat{\mathbf{y}}(i) | i = 1, 2, \dots, M'\}$ ($M' < M$) を初期値とし、式 (11) の $l(i)$ を用いて 2. と同じ λ の EC-LBG アルゴリズムによりコードブックを設計する。

以上の手順により棄却されなかった代表ベクトルを初期コードブックとして 3.4 の設計法を行う。上記手順 2. で $l(i)$ を近似しているのは、 $\lambda > 0$ を加えることにより出現確率 $P(i)$ が大幅に変化するため $P(i)$ を含まない項で粗な棄却を行うためである。また、 λ の値は経験的に決めている。

5. シミュレーション実験結果

図 4 に単位超球面上に一樣に分布するトレーニングベクトルに対して設計した UR-KVQ の量子化特性を示す。ただし、次元数 $n = 8, 16$ 、トレーニングベクトル数 $t = 5.0 \times 10^6$ 、初期コードブックサイズ $M_0 = 6000$ とする。図の凡例において、

() は鏡映群の型を示している。比較のため LBG アルゴリズムにより設計した FSVQ の量子化特性を併記する^(注3)。図 4 の破線は経験的に得られたレート-歪み限界 (R-D bound) の目安を示しており、勾配が $6n/(n-1)$ [dB/bits] の直線である。また、SNR は次式によって求められる。

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\text{入力信号電力}}{\text{平均 2 乗歪み}} \quad (13)$$

また、量子化損はその符号化レートにおける SNR と R-D bound との差を示すもので、値が小さいほど特性は良い。

また、表 2 に図 4 に示した UR-KVQ のコードブックサイズ M を示す。図 4、表 2 からわかるように、UR-KVQ は $n = 8, 16$ のときも高レートにおいても少ないコードブック数 M で FSVQ とほぼ同等な量子化特性の量子化器が実現できている。特に 8 次元では FSVQ を上回る特性が得られている。これは、LBG アルゴリズムでは局所最適解に捕われてしまっているが、提案法では次章で述べる準最適解の格子を見出すことができたためである。

6. コードブックの構造

表 2 中の $n = 8, D$ 型、 $M = 2, 5$ のコードブックの構造を述べる。

- $M = 2$

2 個の代表ベクトルの持つ要素は次のようなものである。

$$\mathbf{y}(1) = [a, a, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{y}(2) = [b, b, b, b, b, b, b, -b]^T \quad (15)$$

この $M = 2$ のコードブックは、格子を用いた球充填の 8 次元における最適解である E_8 型格子 [3] の中で原点から距離が最小である格子点と同一の構造をもつ。

- $M = 5$

5 個の代表ベクトルの持つ要素は次のようなものである。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \mathbf{y}(2) \\ \mathbf{y}(3) \\ \mathbf{y}(4) \\ \mathbf{y}(5) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & c & c & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & d & d & d & d & d & d & -d \\ e & f & f & f & f & f & f & f \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$$a = 0.924, b = 0.650, c = 0.462,$$

$$d = 0.325, e = 0.693, f = 0.231$$

(注3)：初期コードブックはスプリット法により決定している。

このコードブックの構造は、 E_8 型格子の原点から最小距離 (ノルム 2 とする) の格子点 $\mathbf{y}(2), \mathbf{y}(4), b = 1, d = 1/2$ とノルム 4 の格子点 $\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(3), \mathbf{y}(5), a = 2, c = 1, e = 3/2, f = 1/2$ を単位超球面上で重ね合わせたものになっている [3].

7. まとめ

本論文において、提案法によって設計された UR-KVQ の量子化特性を明らかにし、その有効性を示した。今後の課題としては以下のものがあげられる。

- より高次元での VQ の設計を行うこと。
- 分散正規化 VQ [4] の波量子化器に UR-KVQ を用い、ガウス性ベクトルのための VQ の設計を行うこと。

文 献

- [1] C.F.Barnes, S.A.Rizvi, N.M.Nasrabadi: "Advances in Residual Vector Quantization: A Review", IEEE Trans, Image Processing, Vol.5, No.2, Feb. 1996.
- [2] 横修一, 竹本裕治, 山根延元, 森川良孝: "反射群 VQ によるガウス性ベクトルのための高速量子化器と画像符号化への応用" SITA2001 vol.1/2 pp.379-382.
- [3] J.H.Conway and N.J.A.Sloane: "Sphere Packings, Lattices and Groups," Springer-Verlag (1988).
- [4] A.Gersho, R.M.Gray: "Vector Quantization and Signal Compression," Kluwer Academic Publishers (1992).

付 録

1. $C(i)$ の導出

本論文において探索領域は $n-1$ 次元辺によって囲まれる領域である。各鏡映群について、まず i 番目の代表ベクトル $\mathbf{y}(i)$ を k 次元辺に配置したときの $\mathbf{y}(i)$ の構造 (以下タイプと呼ぶ) を示し、続いて各タイプ毎の $\mathbf{y}(i)$ の全空間での総数 $C(i)$ を導出する。

• $G_Z : G_Z$ の S の j 番目の元 t_j ($1 \leq j \leq n$) は $t_j^T \mathbf{x} = 0$ つまり $x_j = 0$ を満たす部分空間である。これより G_Z の探索領域の k 次元辺では \mathbf{x} の $n-k$ 個の要素が 0 となるので、この k 次元の部分空間にある代表ベクトル \mathbf{y} は次式のタイプとなる。

$$\mathbf{y} = [a_1, 0, a_2, a_3, \dots, a_k, 0]^T \quad (\text{A-1})$$

G_Z の T の元による鏡映は符号反転のみなので、 $C(i) = 2^k$ 。

• $G_A : G_A$ の S の j 番目の元 t_j ($1 \leq j \leq n$) に対応する辺は $t_j^T \mathbf{x} = 0$ (註4) つまり $\bar{x}_j = \bar{x}_{j+1}$ を満たす部分空間である。これより G_A の探索領域の k 次元辺では、 n 組ある $\{\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) の中の $n-k$ 組では等号が成立し、残りの k 組では等号が成立しない。したがって、 k 次元の部分空間にある代表ベクトル \mathbf{y} は次式のタイプとなる。

$$\mathbf{y} = [a_1^T, a_2^T, \dots, a_{k+1}^T]^T \quad (\text{A-2})$$

ただし、

$$a_j = a_j \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{l_j}^T, \sum_{j=1}^{k+1} l_j = n+1 \quad (\text{A-3})$$

G_A の T の元による鏡映は互換のみである。したがって、 \mathbf{y} を

G_A の T の元により全置換することで得られる全空間での総数 $C(i)$ は次式の多項展開係数で与えられる。

$$C(i) = \frac{(n+1)!}{l_1! l_2! \dots l_k! l_{k+1}!} \quad (\text{A-4})$$

この $C(i)$ の符号化は以下のように各要素の位置を符号化することによって行う。式 (A-2) の任意の鏡映 $\alpha \mathbf{y} (\forall \alpha \in G_A)$ を次式で表す。

$$\alpha \mathbf{y} = [a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_s}, \dots, a_{q_{n+1}}] \quad (\text{A-5})$$

$$q_s \in \{1, 2, \dots, k+1\}$$

ただし、 q_s は値が a_{q_s} をとる要素のインデックスを示す。このとき、 $C(i)$ は次式のように q_s に関する条件付確率で展開することができる。

$$\frac{1}{C(i)} = P(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$$

$$= P(q_1)P(q_2|q_1) \dots P(q_{n+1}|q_n, q_{n-1}, \dots, q_1) \quad (\text{A-6})$$

$$P(q_s|q_{s-1}, \dots, q_1) = \frac{l(q_s)}{n-s+2} \quad (\text{A-7})$$

式 (A-7) の条件付確率を用いて要素のインデックス q_s を $s = 1, 2, \dots$ の順に符号化することで、 a_{q_s} を符号化する。ただし、 $l(q_s)$ は a_{q_s} の値をとる未符号化要素数を示す。

• $G_C : G_Z$ 及び G_A の結果から、 G_C の探索領域の k 次元辺上にある代表ベクトル \mathbf{y} は次式のタイプとなる

$$\mathbf{y} = [a_1^T, a_2^T, \dots, a_k^T, \underbrace{0, \dots, 0}_{l_0}]^T \quad (\text{A-8})$$

ただし、

$$a_j = a_j \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{l_j}^T, \sum_{j=0}^k l_j = n \quad (\text{A-9})$$

G_C の T の元による鏡映は符号反転及び互換である。したがって、 G_C の T の元による鏡映により得られる \mathbf{y} の全空間での総数 $C(i)$ は、 G_Z, G_A の場合と同様に考えると次式で与えられる。

$$C(i) = \frac{2^{n-l_0} n!}{l_0! l_1! \dots l_k!} \quad (\text{A-10})$$

• $G_D : G_D$ の T の元は G_C の T の元から符号反転のみを行う元を除いたものである。これより本論文で扱う探索領域の場合、 G_D の探索領域は G_C の探索領域での n 番目の要素の符号の区別を行わなくしたものである。つまり、式 (A-8) において $l_0 = 0$ のときの \mathbf{y} の n 番目の要素 a_k だけに着目すると、符号反転によって n 番目の要素が $-a_k$ となるベクトルは、 G_D の場合異なるベクトルと見なす。

したがって $l_0 = 0$ のとき、 G_D の T の元による鏡映により得られる \mathbf{y} の全空間での総数 $C(i)$ は次式で与えられる。

$$C(i) = \frac{2^{n-1} n!}{l_1! l_2! \dots l_k!} \quad (\text{A-11})$$

また $l_0 \neq 0$ のとき、 \mathbf{y} の n 番目の要素の符号は無関係であり $C(i)$ は式 (A-10) で与えられる。

(註4) : $\sum \bar{x} = 0$

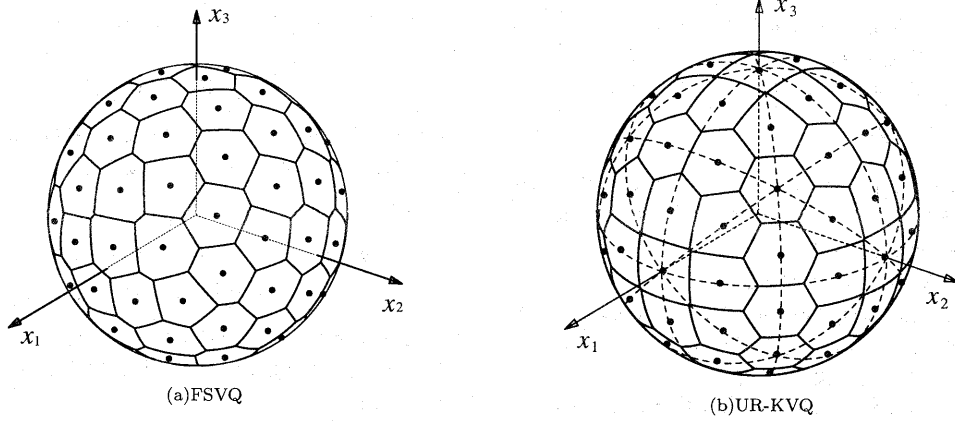


図3 (a)FSVQ と(b)UR-KVQ のポロノイ分割の様子 (3次元)
 Fig. 3 Voronoi division of (a)FSVQ and (b)UR-KVQ. ($n = 3$)

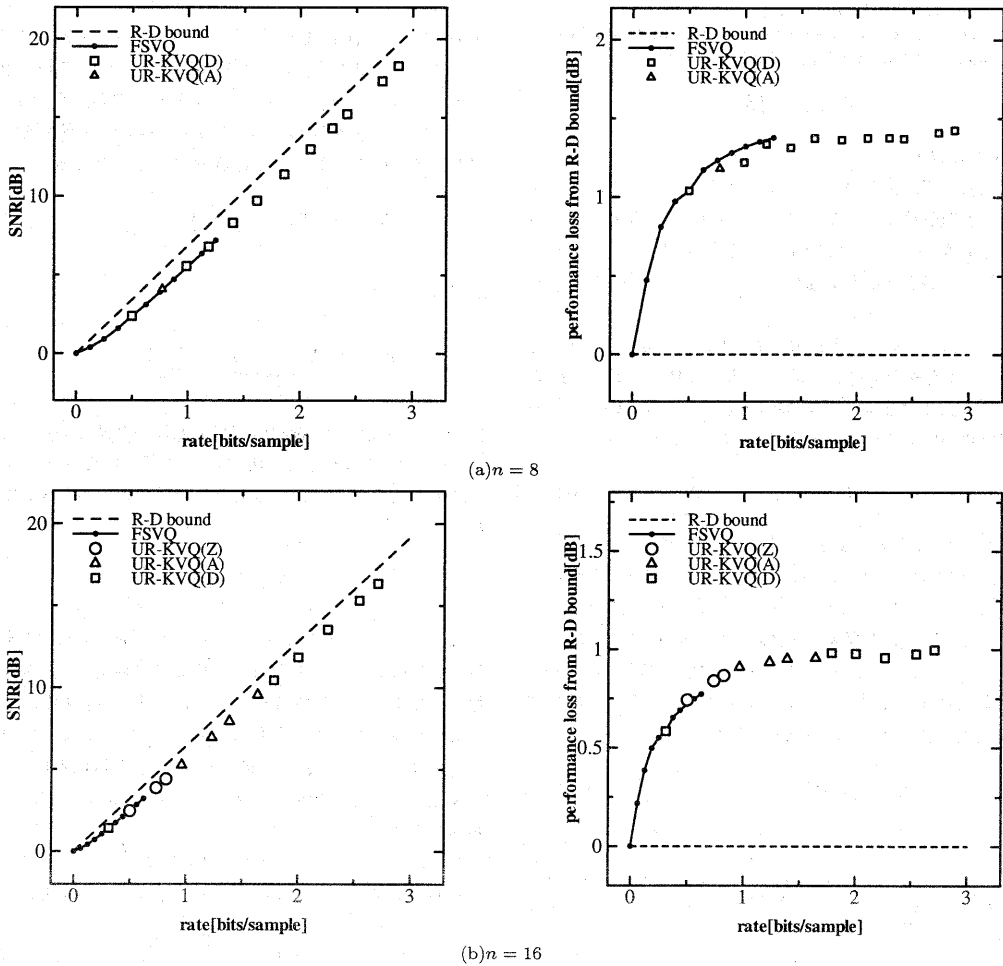


図4 単位超球面上一様分布に対する UR-KVQ の設計例
 Fig. 4 Quantizer characteristics of UR-KVQ for uniform distribution on unit hypersphere.